Выводъ нѣкоторыхъ асимптотическихъ разложеній.

Н. Кошлякова.

Во II томѣ Exercices de calcul intégral Legendre'a находится рядъ опредѣленныхъ интеграловъ, съ помощью которыхъ можно установить для нѣкоторыхъ функцій асимптотическія разложенія въ полусходящіеся ряды, подобные извѣстному разложенію Stirling'a.

Пусть n означаетъ любое цѣлое положительное число.

1°. Пользуясь интеграломъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \qquad a > 0 \tag{a}$$

находимъ

$$\sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} = \int_0^\infty \sum_1^n (-1)^{\nu-1} e^{-(2\nu-1)x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1+(-1)^{n-1}e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

Вычитая это выраженіе изъ очевиднаго равенства

$$\frac{\pi}{4} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} = \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}},$$

получаемъ

$$\frac{\pi}{4} = \sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} + (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

Далѣе, на основаніи интеграла Legendre'a

$$\frac{1}{e^\theta+e^{-\theta}} = 2\int_0^\infty \frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx, \tag{b}$$

имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2n\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}d\theta=2\int_0^\infty d\theta\int_0^\infty \frac{e^{-2n\theta}\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx=2\int_0^\infty dx\int_0^\infty \frac{e^{-2n\theta}\cos 2x\theta}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}d\theta=n\int_0^\infty \frac{1}{n^2+x^2}\,\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}},$$

причемъ здѣсь, какъ и во всѣхъ послѣдующихъ случаяхъ, измѣненіе порядка интегрированія (при безконечныхъ предѣлахъ) законно, такъ какъ выполняются всѣ условія соотвѣтствующей теоремы, приведенной у C. Jordan'a въ Cours d'analyse 3-e éd., t. II, § 74—75, 1913.

Итакъ,

$$\frac{\pi}{4}=\sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1}+(-1)^n n\int_0^\infty \frac{1}{n^2+x^2}\,\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} \tag{1}$$

Умножая на $\dfrac{1}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ и интегрируя отъ $x=0$ до $x=\infty$ легко доказуемое равенство

$$\frac{1}{n^2+x^2}=\sum_1^k(-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-2}}{n^{2\nu}}+(-1)^k\theta_0(x)\,\frac{x^{2k}}{n^{2k+2}}, \tag{c}$$

гдѣ

$$0<\theta_0(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{n}\right)^2}<1,$$

находимъ

$$\int_0^\infty \frac{1}{n^2+x^2}\,\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}=\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{n^{2\nu}}\int_0^\infty \frac{x^{2\nu-2}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx+\frac{(-1)^k}{n^{2k+2}}\int_0^\infty \frac{\theta_0(x)\,x^{2k}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx.$$

Интегралъ, стоящій подъ знакомъ суммы, выражается черезъ Эйлеровы числа съ помощью формулы Catalan'a [1])

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx=\frac{E_p}{4^{p+1}};$$

далѣе, замѣчая, что функція $f(x)=\dfrac{x^{2k}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ знакопостоянна при $0<x<\infty$ и функція $\theta_0(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{n}\right)^2}$ конечна и непрерывна въ тѣхъ

[1]) Mémoires de la Société des Sciences de Liège, s. II, t. XII, p. 110.

же предѣлахъ, примѣнимъ къ интегралу $\int\limits_0^\infty f(x)\,\theta_0(x)\,dx$ теорему о среднихъ значеніяхъ, въ силу которой

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,\theta_0(x)\,dx = \theta_0(\xi)\int\limits_0^\infty f(x)\,dx,$$

гдѣ $0 < \xi < \infty$, т. е.

$$0 < \theta_0(\xi) = \frac{1}{1+\left(\frac{\xi}{n}\right)^2} = \theta < 1.$$

Итакъ,

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{n^2+x^2}\,\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} = \sum_1^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{n^{2\nu}}\,\frac{E_{\nu-1}}{n^{2\nu}} + \theta\,\frac{(-1)^k}{n^{2k+2}}\,\frac{E_k}{2^{2k+2}},$$

и окончательно

$$\frac{\pi}{4} = \sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2v-1} + \sum_1^k \frac{(-1)^{n+\nu-1}}{2^{2\nu}}\,\frac{E_{\nu-1}}{n^{2\nu-1}} + \theta\,\frac{(-1)^{n+k}}{2^{2k+2}}\,\frac{E_k}{n^{2k+1}},\ 0<\theta<1 \quad (2)$$

2^0. Обращаясь снова къ интегралу (a), имѣемъ

$$\sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} = \int\limits_0^\infty \frac{1-(-1)^n e^{-nx}}{1+e^x}\,dx,$$

но съ другой стороны

$$\log 2 = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+e^x},$$

слѣдовательно

$$\log 2 = \sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} + (-1)^n \int\limits_0^\infty \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx;$$

прибавляя и вычитая въ правой части этого равенства выраженіе:

$$\frac{(-1)^n}{2n} = \frac{(-1)^n}{2}\int\limits_0^\infty e^{-nx}\,dx,$$

находимъ

$$\log 2 = \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} + \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \int_0^\infty e^{-nx} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx,$$

а такъ какъ по Legendre'у

$$\frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1} = 4 \int_0^\infty \frac{\sin\theta x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\, dx \qquad \text{(d)}$$

то

$$\int_0^\infty e^{-n\theta} \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1}\, d\theta = 4 \int_0^\infty d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-n\theta}\sin\theta x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\, dx = 4 \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{e^{-n\theta}\sin x\theta}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\, d\theta =$$

$$= 4 \int_0^\infty \frac{x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}$$

и такимъ образомъ

$$\log 2 = \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} + \frac{(-1)^n}{2n} + (-1)^{n+1} 2 \int_0^\infty \frac{x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \qquad (3)$$

Принимая во вниманіе разложеніе (c), имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = \sum_{1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{n^{2\nu}} \int_0^\infty \frac{x^{2\nu-1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\, dx + (-1)^k \int_0^\infty \frac{\theta_0(x)\, x^{2k+1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\, dx\ ,$$

но

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\nu-1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\, dx = \frac{T_\nu}{2^{2\nu+1}}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\theta_0(x)\, x^{2k+1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\, dx = \theta\, \frac{T_{k+1}}{2^{2k+3}}\,,\ \ 0 < \theta < 1\,,$$

гдѣ T_ν означаютъ коэффиціенты въ разложеніи тангенса, связанные съ Бернулліевыми числами соотношеніемъ

$$\frac{2^{2n} - 1}{n} B_n = \frac{T_n}{2^{2n-1}}$$

Окончательно,

$$\log 2 = \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} + \frac{(-1)^n}{2n} + \sum_{1}^{k} \frac{(-1)^{n+\nu}}{2^{2\nu}} \frac{T_\nu}{n^{2\nu}} + \theta \frac{(-1)^{n+k+1}}{2^{2k+2}} \frac{T_{k+1}}{n^{2k+2}}, \quad 0<\theta<1 \quad (4)$$

3°. Пользуясь хорошо извѣстнымъ интеграломъ

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \qquad a>0 \qquad (e)$$

находимъ

$$n \sum_{1}^{n} \frac{1}{\nu^2+n^2} = \int_{0}^{\infty} \sum_{1}^{n} e^{-\nu x} \sin nx dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1-e^{-nx}}{e^x-1} \sin nx dx;$$

далѣе, умножая на $\sin nx$ и интегрируя отъ $x=0$ до $x=\infty$ равенство

$$\frac{1}{e^x-1} = \sum_{1}^{h} e^{-\nu x} + \frac{e^{-hx}}{e^x-1}.$$

имѣемъ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^x-1} dx = \sum_{1}^{h} \int_{0}^{\infty} e^{-\nu x} \sin nx dx + R_h = \sum_{1}^{h} \frac{n}{n^2+\nu^2} + R_h,$$

гдѣ

$$R_h = \int_{0}^{\infty} e^{-hx} \frac{\sin nx}{e^x-1} dx,$$

Этотъ послѣдній интегралъ при $h=\infty$ обращается въ ноль, въ чемъ убѣждаемся, примѣняя къ данному случаю теорему Du Bois Reymond'a [1]), опредѣляющую условія, при которыхъ имѣетъ мѣсто равенство

$$\lim_{h=\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, \varphi(x, h)\, dx = 0.$$

Равенство

$$\lim_{h=\infty} R_h = 0$$

[1]) Borchardt's Journal, Bd. 79. Эту теорему, равно какъ и замѣчаніе на случай безконечныхъ предѣловъ, можно найти въ диссертаціи А. А. Адамова «О разложеніяхъ произвольной функціи одной вещественной перемѣнной въ ряды, расположенные по функціямъ опредѣленнаго рода»—подъ именемъ теоремы *A* (стр. 17) и замѣчанія 3 (стр. 19).

имѣетъ мѣсто и во всѣхъ остальныхъ случаяхъ, когда мы будемъ перемѣщать знаки интеграла и безконечной суммы.

Итакъ,

$$n\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{v^2+n^2}=\int_0^\infty\frac{\sin nx}{e^x-1}\,dx,$$

но по Legendre'у

$$\int_0^\infty\frac{\sin\theta x}{e^{2\pi x}-1}\,dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^\theta-1}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right\},\ \theta>0 \qquad (f)$$

и такимъ образомъ

$$2n\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{v^2+n^2}=\pi cth n\pi-\frac{1}{n};$$

дѣлая теперь преобразованія, подобныя предыдущимъ, получаемъ

$$\pi cth n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{v^2+n^2}+2\left\{-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4n}+\int_0^\infty\frac{e^{-nx}\sin nx}{e^x-1}\,dx\right\},$$

но

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin nx}{x}\,dx,\quad \frac{1}{2n}=\int_0^\infty e^{-nx}\sin nx\,dx,$$

слѣдовательно

$$\pi cth n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{v^2+n^2}+2\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right\}e^{-nx}\sin nx\,dx.$$

Далѣе, пользуясь интеграломъ (f), находимъ

$$\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^\theta-1}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right\}e^{-n\theta}\sin n\theta\,d\theta=2\int_0^\infty d\theta\int_0^\infty\frac{e^{-n\theta}\sin n\theta\sin\theta x}{e^{2\pi x}-1}\,dx=$$

$$=2\int_0^\infty dx\int_0^\infty\frac{e^{-n\theta}\sin n\theta\sin x\theta}{e^{2\pi x}-1}\,d\theta=4n^2\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}.$$

и окончательно

$$\pi cth n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{v^2+n^2}+8n^2\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{2\pi x}-1} \qquad (5)$$

Принимая во вниманіе разложеніе (c), имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}=\sum_1^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu}.n^{4\nu}}\int_0^\infty \frac{x^{4\nu-3}}{e^{2\pi x}-1}dx+\frac{(-1)^k}{2^{2k+2}n^{4k+4}}\int_0^\infty \frac{\theta_0(x)x^{4k+1}}{e^{2\pi x}-1}dx,$$

но

$$\int_0^\infty \frac{x^{4\nu-3}}{e^{2\pi x}-1}dx=\frac{1}{4}\frac{B_{2\nu-1}}{2\nu-1}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\theta_0(x)\,x^{4k+1}}{e^{2\pi x}-1}dx=\frac{\theta}{4}\frac{B_{2k+1}}{2k+1},\qquad 0<\theta<1,$$

гдѣ B_n означаютъ Бернулліевы числа.

Итакъ,

$$\pi cth n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_1^n\frac{1}{\nu^2+n^2}+\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-1}.n^{4\nu-2}}\frac{B_{2\nu-1}}{2\nu-1}+$$

$$+\theta\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}.n^{4k+2}}\frac{B_{2k+1}}{2k+1},\quad 0<\theta<1, \tag{6}$$

Это разложеніе, переписанное въ формѣ

$$\pi=4n\sum_1^n\frac{1}{\nu^2+n^2}-\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1}+\frac{1}{n}+\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-2}.n^{4\nu-2}}\frac{B_{2\nu-1}}{2\nu-1}+$$

$$+\theta\frac{(-1)^k}{2^{2k}.n^{4k+2}}\frac{B_{2k+1}}{2k+1},\quad 0<\theta<1 \tag{7}$$

было указано Euler'омъ въ одномъ изъ писемъ къ N. Bernoulli [1]), но въ видѣ безконечнаго ряда, безусловно расходящагося. Разложеніе же (7) съ указаніемъ остаточнаго члена дано Я. В. Успенскимъ [2]).

4⁰. Обращаясь снова къ интегралу (e), имѣемъ

$$n\sum_1^m\frac{(-1)^\nu}{\nu^2+n^2}=\int_0^\infty\sum_1^m(-1)^\nu e^{-\nu x}\sin nx\,dx+\int_0^\infty\frac{(-1)^m e^{-mx}-1}{e^x+1}\sin nx dx,$$

---

[1]) Corresp. t. II p. 690.

[2]) Сборникъ задачъ по высшей математикѣ препод. Инст. Инж. Путей Сообщенія 1912 г. отд. XI зад. № 245.

откуда, полагая послѣдовательно $m=n$ и $m=\infty$, находимъ

$$n\sum_1^n \frac{(-1)^\nu}{\nu^2+n^2}=\int_0^\infty \sum_1^n (-1)^\nu e^{-\nu x} \sin nx dx=\int_0^\infty \frac{(-1)^n e^{-nx}-1}{e^x+1}\sin nx dx$$

и

$$n\sum_1^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu^2+n^2}=\int_0^\infty \sum_1^\infty (-1)^\nu e^{-\nu x} \sin nx dx=-\int_0^\infty \frac{\sin nx}{e^x+1}\,dx;$$

но какъ извѣстно [1])

$$\int_0^\infty \frac{\sin nx}{e^x+1}\,dx=\frac{1}{2n}-\frac{\pi}{2sh n\pi}\,, \tag{g}$$

слѣдовательно

$$n\sum_1^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu^2+n^2}=\frac{\pi}{2sh n\pi}-\frac{1}{2n}$$

и, поступая подобно предыдущему случаю, имѣемъ

$$\frac{\pi}{Sh n\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+2n\sum_1^n \frac{(-1)^\nu}{\nu^2+n^2}+(-1)^n\left\{\frac{1}{2n}-2\int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{e^x+1}\sin nx\,dx\right\}$$

откуда

$$\frac{\pi}{Sh n\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+2n\sum_1^n \frac{(-1)^n}{\nu^2+n^2}+(-1)^n\int_0^\infty e^{-nx}\frac{e^x-1}{e^x+1}\sin nx\,dx\Big\}$$

Далѣе на основаніи интеграла (d), получаемъ

$$\int_0^\infty e^{-n\theta}\frac{e^\theta-1}{e^\theta+1}\sin n\theta\, d\theta=4\int_0^\infty d\theta\int_0^\infty e^{-n\theta}\frac{\sin n\theta \sin \theta x}{e^{\pi x}-e^{\pi x}}\,dx=$$

$$=4\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-n\theta}\frac{\sin n\theta \sin x\theta}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,d\theta=8n^2\int_0^\infty \frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}$$

---

[1]) См. напр. J. Bertrand. Traité de calcul intégral.

и такимъ образомъ

$$\frac{\pi}{sh n\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+2n\sum_1^n\frac{(-1)^\nu}{\nu^2+n^2}+(-1)^n 8n^2\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \quad (8)$$

Пользуясь теперь соотношеніемъ (c), получаемъ

$$\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}=\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{6\nu-1}}\frac{T_{2\nu-1}}{n^{4\nu}}+\theta\frac{(-1)^k}{2^{6k+5}}\frac{T_{2k+1}}{n^{4k+4}}, \qquad 0<\theta<1$$

и окончательно

$$\frac{\pi}{sh n\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+2n\sum_1^n\frac{(-1)^\nu}{\nu^2+n^2}+\sum_1^k\frac{(-1)^{n+\nu-1}}{2^{6\nu-4}}\frac{T_{2\nu-1}}{n^{4\nu-2}}+$$
$$+\theta\frac{(-1)^{n+k}}{2^{6k+2}}\frac{T_{2k+1}}{n^{4k+2}}. \qquad 0<\theta<1 \qquad (9)$$

5^0. Полагая въ интегралѣ (e) $a=2\nu-1$ и $b=2n$, имѣемъ

$$2n\sum_1^m\frac{1}{(2\nu-1)^2+(2n)^2}=\int_0^\infty\sum_1^m e^{-(2\nu-1)}\sin 2nx dx=\int_0^\infty\frac{1-e^{-2mx}}{e^x-e^{-x}}\sin 2nx dx$$

откуда, полагая послѣдовательно $m=n$ и $m=\infty$, получаемъ

$$2n\sum_1^n\frac{1}{(2\nu-1)^2+(2n)^2}=\int_0^\infty\sum_1^n e^{-(2\nu-1)}\sin 2nx dx=\int_0^\infty\frac{1-e^{-2nx}}{e^x-e^{-x}}\sin 2nx dx$$

и

$$2n\sum_1^\infty\frac{1}{(2\nu-1)^2+(2n)^2}=\int_0^\infty\sum_1^\infty e^{-(2\nu-1)}\sin 2nx dx=\int_0^\infty\frac{\sin 2nx}{e^x-e^{-x}}dx$$

или на основаніи формулы (d):

$$2n\sum_1^\infty\frac{1}{(2\nu-1)^2+(2n)^2}=\frac{\pi}{4}\,th n\pi,$$

и такимъ образомъ

$$\frac{\pi}{4}\, thn\pi = 2n \sum_1^n \frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2} + \int_0^\infty e^{-2nx} \frac{\sin 2nx}{e^x - e^{-x}}\, dx$$

Далѣе, съ помощью интеграла (g), находимъ

$$\int_0^\infty e^{-2n\theta} \frac{\sin 2n\theta}{e^\theta - e^{-\theta}}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2n\theta} \frac{\sin 2n\theta}{\theta}\, d\theta - 2\int_0^\infty d\theta \int_0^\infty e^{-2n\theta} \frac{\sin 2n\theta \sin 2\theta x}{e^{2\pi x}+1}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - 2\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-2n\theta} \frac{\sin 2n\theta \sin 2x\theta}{e^{2\pi x}+1}\, d\theta = \frac{\pi}{8} - 2n^2 \int_0^\infty \frac{x}{x^4+4n^4} \frac{dx}{e^{2\pi x}+1}$$

и слѣдовательно

$$\frac{\pi}{4}\, thn\pi = \frac{\pi}{8} + 2n \sum_1^n \frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2} - 2n^2 \int_0^\infty \frac{x}{x^4+4n^4} \frac{dx}{e^{2\pi x}+1} \qquad (10)$$

Вспоминая разложенiе (c) и замѣчая, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{4\nu-3}}{e^{2\pi x}+1}\, dx = \frac{B'_{2\nu-1}}{2v-1}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\theta_0(x) x^{4k+1}}{e^{2\pi x}+1}\, dx = \theta\, \frac{B'_{2k+1}}{2k+1}, \qquad 0<\theta<1,$$

гдѣ

$$B'_\nu = \frac{2^{2\nu-1}-1}{2^{2\nu+1}}\, B_\nu$$

и B_ν означаютъ Бернуллiевы числа, получаемъ

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+4n^4} \frac{dx}{e^{2\pi x}+1} = \sum_1^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu}.\, n^{4\nu}} \frac{B'_{2\nu-1}}{2v-1} + \theta\, \frac{(-1)^k}{2^{2k+2}.\, n^{4k+4}} \frac{B'_{2k+1}}{2k+1}$$

и окончательно

$$\frac{\pi}{4}\, thn\pi = \frac{\pi}{8} + 2n \sum_1^n \frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2} + \sum_1^k \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu-1}.\, n^{4\nu-2}} \frac{B'_{2\nu-1}}{2v-1} +$$

$$+ \theta\, \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}.\, n^{4k+2}} \frac{B'_{2k+1}}{2k+1}. \qquad 0<\theta<1 \qquad (11)$$

6°. Пользуясь интеграломъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\operatorname{arctg}\frac{b}{a},\qquad a>0 \tag{h}$$

имѣемъ

$$\sum_1^m(-1)^{\nu-1}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2\nu-1}=\int_0^\infty\sum_1^m(-1)^{\nu-1}e^{-(2\nu-1)x}\frac{\sin 2nx}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1-(-1)^m e^{-2mx}}{e^x+e^{-x}}\,\frac{\sin 2nx}{x}\,dx,$$

откуда, полагая послѣдовательно $m=n$ и $m=\infty$, находимъ

$$\sum_1^n(-1)^{\nu-1}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2\nu-1}=\int_0^\infty\sum_1^n(-1)^{\nu-1}e^{-(2\nu-1)x}\frac{\sin 2nx}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1-(-1)^n e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}\,\frac{\sin 2nx}{x}\,dx$$

и

$$\sum_1^\infty(-1)^{\nu-1}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2\nu-1}=\int_0^\infty\sum_1^\infty(-1)^{\nu-1}e^{-(2\nu-1)x}\frac{\sin 2nx}{x}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin 2nx}{e^x+e^{-x}}\,\frac{dx}{x},$$

но какъ извѣстно

$$\int_0^\infty\frac{\sin 2nx}{e^x+e^{-x}}\,\frac{dx}{x}=\operatorname{arctg}\frac{e^{n\pi}-1}{e^{n\pi}+1} \tag{i}$$

и такимъ образомъ

$$\operatorname{arctg}\frac{e^{n\pi}-1}{e^{n\pi}+1}=\sum_1^n(-1)^{\nu-1}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2\nu-1}+(-1)^n\int_0^\infty\frac{e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}\,\frac{\sin 2nx}{x}\,dx.$$

Далѣе,

$$\int_0^\infty\frac{e^{-2n\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}\,\frac{\sin 2n\theta}{\theta}\,d\theta=2\int_0^\infty d\theta\int_0^\infty e^{-2n\theta}\frac{\sin 2n\theta}{\theta}\,\frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx=$$

$$=2\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-2n\theta}\frac{\sin 2n\theta}{\theta}\,\frac{\cos 2x\theta}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,d\theta=\int_0^\infty\operatorname{arctg}2\left(\frac{n}{x}\right)^2\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\int_0^\infty\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$$

и слѣдовательно

$$\frac{\pi}{8}=(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{e^{n\pi}-1}{e^{n\pi}+1}+\sum_1^n(-1)^{n+\nu}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2v-1}+$$

$$+\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}. \tag{12}$$

Взявъ разложеніе $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2$ въ рядъ Маклорена, получаемъ

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2=\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-1}.n^{4\nu-2}}\frac{x^{4\nu-2}}{2v-1}+\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}.n^{4k+2}}\frac{x^{4k+2}}{2k+1}\theta_0(x),$$

гдѣ

$$\theta_0(x)=(2k+1)\int_0^1\frac{u^{2k}du}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4u^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4\xi^2},\quad 0<\xi<1$$

т. е.

$$0<\theta_0(x)<1.$$

Отсюда имѣемъ

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}=\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{6\nu-1}.n^{4\nu-2}}\frac{E_{2\nu-1}}{2v-1}+\theta\frac{(-1)^k}{2^{6k+5}.n^{4k+2}}\frac{E_{2k+1}}{2k+1},$$

гдѣ

$$0<\theta=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{\eta}{n}\right)^4\xi^2}<1;\qquad (0<\eta<\infty)$$

окончательно

$$\frac{\pi}{8}=(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{e^{n\pi}-1}{e^{n\pi}+1}+\sum_1^n(-1)^{n+\nu}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2v-1}+$$

$$+\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{6\nu-1}.n^{4\nu-2}}\frac{E_{2\nu-1}}{2v-1}+\theta\frac{(-1)^k}{2^{6k+5}.n^{4k+2}}\frac{E_{2k+1}}{2k+1},\quad 0<\theta<1 \tag{13}$$

Въ заключеніе замѣтимъ, что выраженія (1), (3), (5), (8), (10), (12) могутъ быть выведены изъ сумматорныхъ формулъ, приведенныхъ въ III главѣ книги проф. E. Lindelöf'a: „Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions". Paris, Gautier-Villars, 1905.

Примѣчаніе. *Стр. 210 стр. 5 сверху.*

Теорема, на которую я ссылаюсь, формулирована у C. Jordan'a, l. c. на стр. 75 и сл. (§ 74—75).

Въ данномъ случаѣ имѣемъ

$$\int_B^\infty \frac{e^{-2n\theta}\cos 2x\theta}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx = e^{-2n\theta}\int_B^\infty \frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx,$$

и для функціи $\varphi(\theta)=e^{-2n\theta}(n>0)$ выполнены всѣ условія предыдущей теоремы; съ другой стороны

$$\int_B^\infty \frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx < \int_B^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$$

т. е. интегралъ

$$\int_B^\infty \frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx$$

съ увеличеніемъ B до ∞ стремится къ нулю независимо отъ θ, такъ какъ интегралъ

$$\int_B^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}},$$

будучи меньше постоянной величины

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} = \frac{1}{4},$$

стремится къ нулю равномѣрно при возразстаніи B до ∞.

Далѣе,

$$\int_A^\infty \frac{e^{-2n\theta}\cos 2x\theta}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,d\theta < \frac{1}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\int_A^\infty e^{-2n\theta}\,d\theta = \frac{e^{-2nA}}{2n(e^{\pi x}+e^{-\pi x})}$$

и для функціи $\psi(x)=\dfrac{1}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ выполнены условія предыдущей теоремы; функція же e^{-2nA} стремится къ 0, при возрастаніи A до ∞, независимо отъ x.

Остальные случаи доказываются аналогичными разсужденіями.

Стр. 218 стр. 2—1 снизу.

Теорема и замѣчаніе, на которыя я здѣсь ссылаюсь, слѣдующія:

«**Теорема А.** Пусть функція отъ x и параметра h : $\varphi(x, h)$ остается конечной (меньше Φ по абсолютному значенію) для всѣхъ достаточно большихъ значеній h и для значеній x, заключенныхъ въ конечномъ промежуткѣ (a, b); кромѣ того, пусть интегралъ

$$\int_{a'}^{b'} \varphi(x, h)\,dx$$

при всѣхъ достаточно большихъ h имѣетъ опредѣленное значеніе и

$$\text{пред.}_{h=\infty}\int_{a'}^{b'} \varphi(x,\ h) = 0\ ,$$

каковы бы ни были числа a', b', удовлетворяющія неравенствамъ

$$a \leq a' < b' \leq b.$$

Пусть другая функція $f(x)$ при

$$a \leq x \leq b$$

остается конечной и можетъ быть интегрируема. При такихъ условіяхъ имѣетъ мѣсто формула

$$\text{пред.}_{h=\infty}\int_{a'}^{b'} f(x)\,\varphi(x,\ h)\,dx = 0.$$

...**Замѣчаніе 3.** Предыдущее доказательство теоремы A предполагаетъ промежутокъ $(a,\ b)$ конечнымъ, такъ какъ иначе число n не можетъ быть конечнымъ. Если же промежутокъ $(a,\ b)$ дѣлается безконечнымъ, то нужно, чтобы имѣть право распространить теорему A и на этотъ случай, убѣдиться такъ или иначе въ томъ, что интегралъ

$$\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,\varphi(x,\ h)\,dx \quad \text{при } a = -\infty$$

или интегралъ

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,\varphi(x,\ h)\,dx \quad \text{при} \quad b = +\infty$$

имѣетъ предѣломъ нуль при $h = \infty$ и при значеніяхъ x_0—(отрицательныхъ при $a = -\infty$ и положительныхъ при $b = +\infty$)—достаточно большихъ по численной величинѣ».

Въ нашемъ случаѣ

$$a' = a = 0,\ \ b' = b = \infty,\ \ \varphi(x,\ h) = e^{-hx},\ \ f(x) = \frac{\sin nx}{e^x - 1}.$$

Равенство

$$\text{пред.}_{h=\infty}\int_0^{\infty} e^{-hx}\,dx = 0$$

очевидно имѣетъ мѣсто, въ чемъ убѣждаемся взявъ квадратуру $\int e^{-hx}dx$; функція же $f(x)$ также удовлетворяетъ условіямъ, перечисленнымъ въ теоремѣ. Остается только показать, что интегралъ

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-hx}\frac{\sin nx}{e^x - 1}\,dx$$

можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малымъ при $h = \infty$ и при положительныхъ значеніяхъ x_0 достаточно большихъ по численной величинѣ.

Такъ какъ функція $f_1(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ остается конечною, знакопостоянною и по абсолютному значенію невозрастающей въ промежуткѣ (x_0, ∞), то, пользуясь извѣстной теоремой

$$\int_{x_0}^{\infty} f_1(x)\varphi(x) = f_1(x_0+0)\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx,$$

гдѣ $x_0 \leq \xi \leq \infty$, имѣемъ

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-hx}\frac{\sin nx}{e^x-1}\,dx = \frac{1}{e^{x_0}-1}\int_{x_0}^{\xi} e^{-hx}\sin nx dx,$$

откуда

$$\left|\int_{x_0}^{\infty} e^{-hx}\frac{\sin nx}{e^x-1}\,dx\right| < \frac{1}{e^{x_0}-1}\int_{x_0}^{\xi} e^{-hx}dx,$$

но

$$\int_{x_0}^{\xi} e^{-hx}dx = \frac{e^{-hx_0} - e^{-h\xi}}{h}.$$

откуда видно, что интегралъ $\int\limits_{x_0}^{\infty} e^{-hx}\dfrac{\sin nx}{e^x-1}\,dx$ имѣетъ предѣломъ 0 при $h = \infty$ и при положительныхъ значеніяхъ x_0, достаточно большихъ по численной величинѣ.

Съ помощью этой теоремы A (P. Du Bois Reymond'a—Borchardt's Journal, Bd. 79) и замѣчанія 3 доказываются и остальные случаи.