Замѣтка по варіаціонному исчисленію.

А. Пшеборскаго.

Какъ извѣстно, въ различныхъ приложеніяхъ варіаціоннаго исчисленія къ геометріи на плоскости приходится, слѣдуя Weierstrass'y, разсматривать extremum интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x,\ y,\ x',\ y')\,dt\,,$$

причемъ функція f тождественно удовлетворяетъ соотношенію

$$f = x'f_{x'} + y'f_{y'}\,.$$

Благодаря послѣднему обстоятельству и тому, что f не зависитъ отъ t, оба уравненія Эйлера

$$\frac{d}{dt}f_{x'} - f_x = 0,\quad \frac{d}{dt}f_{y'} - f_y = 0$$

въ этомъ случаѣ совпадаютъ.

Мы займемся изслѣдованіемъ общихъ условій, при которыхъ уравненія Эйлера для интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x,\ y,\ x',\ y',\ t)\,dx$$

совпадаютъ. Положимъ для краткости

$$x' = p,\quad y' = q;$$

тогда дифференціальныя уравненія Эйлера будутъ

$$f_{pp}p' + f_{pq}q' + f_{px}p + f_{py}q + f_{pt} - f_x = 0,$$
$$f_{pq}p' + f_{qq}q' + f_{qx}p + f_{qy}q + f_{qt} - f_y = 0.$$

Эти уравненія будутъ тождественны при выполненіи двухъ условій:

$$\begin{vmatrix} f_{pp}, & f_{pq} \\ f_{pq}, & f_{qq} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f_{pp}, & f_{px}p + f_{py}q + f_{pt} - f_x \\ f_{pq}, & f_{qx}p + f_{qy}q + f_{qt} - f_y \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Изъ условія

$$f_{pp}f_{qq} - (f_{pq})^2 = 0$$

заключаемъ, что функція f, разсматриваемая какъ функція отъ p и q, будетъ вида

$$f = \alpha p + \varphi(\alpha, t, x, y)\,q + \psi(\alpha, t, x, y), \tag{2}$$

гдѣ φ и ψ произвольныя функціи, а α опредѣляется изъ условія

$$p + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} q + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0. \tag{3}$$

Изъ (2) на основаніи (3) имѣемъ

$$\begin{gathered} f_p = \alpha, \quad f_q = \varphi(\alpha, t, x, y), \\ f_{pp} = \frac{\partial\alpha}{\partial p}, \quad f_{pq} = f_{qp} = \frac{\partial\alpha}{\partial q} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p}, \quad f_{qq} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial q}, \end{gathered} \tag{4}$$

и, далѣе, если z представляетъ одну изъ перемѣнныхъ t, x, y, то

$$f_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} q + \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad f_{pz} = \frac{\partial\alpha}{\partial z}, \quad f_{qz} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{5}$$

Пользуясь соотношеніями (4) и (5), напишемъ второе изъ равенствъ (1) въ видѣ

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial\alpha}{\partial x} p + \frac{\partial\alpha}{\partial y} q + \frac{\partial\alpha}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} q - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, & \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} p + \frac{\partial\alpha}{\partial y} q + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x} p + \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(p + q\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

или, на основаніи (3),

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}=0. \qquad (6)$$

Такимъ образомъ, стоитъ намъ, задавши произвольно одну изъ функцій $\varphi(\alpha, t, x, y)$ или $\psi(\alpha, t, x, y)$, проинтегрировать уравненіе (6), опредѣлить изъ (3) соотвѣтствующее значеніе α и вставить это значеніе въ (2), и мы найдемъ искомую функцію f.

Замѣтимъ, что f удовлетворяетъ тождественно соотношенію

$$f=f_p p+f_q q+\psi(f_p, t, x, y). \qquad (7)$$

Въ частномъ случаѣ, полагая $\psi\equiv 0$, получимъ изъ (6)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\equiv 0,$$

откуда на основаніи (3) заключаемъ, что α, а слѣдовательно и f, не зависитъ отъ t. Въ этомъ случаѣ соотношеніе (7) обращается въ

$$f=f_p p+f_q q.$$

Такимъ образомъ, приходимъ къ случаю Weierstrass'а.