Sur la représentation des polynômes positifs.

par Serge Bernstein.

Dans ma Note [1]) «Sur les séries normales» inserée à la fin du t. II des «Principes d'analyse» de M. d'Adhémar je me suis proposé, en particulier, un certain problème de minimum qui m'a amené à effectuer la transformation d'un polynome arbitraire

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

à la forme

$$P(x) = A_0(1-x)^m + A_1 x(1-x)^{m-1} + \ldots + A_m x^m, \tag{1}$$

où $m \geqq n$. L'identification de ces deux expressions donne

$$\begin{aligned} &A_0 = a_0\,, \\ &A_1 = a_1 + m a_0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_k = a_k + C^1_{m-k+1} a_{k-1} + \ldots + C_m^k a_0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_m = a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0 \end{aligned} \tag{2}$$

(pour $k > n$, on pose $a_k = 0$),
et j'ai montré que

$$\lim_{m=\infty} \frac{A_k}{C_m^k} = P\left(\frac{k}{m}\right). \tag{3}$$

Il en résulte, entre autres, la conséquence suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynome $P(x)$ n'admette pas de racines dans l'intervalle 0,1 *est que $P(x)$ soit susceptible, pour m assez grand, d'être mis sous la forme d'une somme de termes de même signe*

$$\sum_{i=0}^{i=m} A_i x^i (1-x)^{m-i}.$$

[1]) Voir aussi mon Mémoire russe «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій» pp. 120—125.

Il est facile de tlrer de cette proposition le théorème suivant de Laguerre [1]): *si le polynome* $P(x)$ *reste positif (non nul) pour* $x \geqq 0$, *on peut le mettre sous la forme* $P(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *où* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *sont deux polynômes à coefficients positifs.*

Nous pouvons même donner à ce théorème une forme plus précise: *dans la représentation indiquée on peut toujours poser* $\varphi(x) = (1+x)^\alpha$, *à condition de prendre* α *assez grand.* Autrement dit, si le polynome $P(x)$ reste positif pour $x \geqq 0$, on peut toujours choisir α assez grand pour que tous les cofficients de $f(x) = P(x).(1+x)^\alpha$ soient positifs.

En effet, posons $x = \frac{y}{1-y}$.

Donc

$$P(x) = \frac{R(y)}{(1-y)^n},$$

où $R(y) > 0$, pour $0 \leqq y \leqq 1$. Par conséquent,

$$R(y) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i y^i (1-y)^{m-i},$$

où tous les A sont *positifs* pour m assez grand. Mais

$$y = \frac{x}{1+x}, \quad 1-y = \frac{1}{1+x};$$

donc

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i y^i (1-y)^{m-n-i} = \sum_{i=0}^{i=m} A_i x^i \left(\frac{1}{1+x}\right)^{m-n} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{i=m} A_i x^i}{(1+x)^{m-n}}.$$

C. q. f. d.

---

[1]) Voir E. Meissner «Über positive Darstellungen von Polynomen». Mathematische Annalen; Bd. 70. La démonstration de Laguerre lui-même ne semble pas avoir été publiée.