Détermination de l'albedo de la Terre.

par B. Fessenkoff.

A ma connaissance le seul moyen de trouver l'albedo du globe terrestre est de déterminer l'intensité de la lumière cendrée par rapport à celle de la surface lunaire directement éclairée par le Soleil. Cette méthode étant déjà bien développée, par exemple dans le traité connu du Prof. Dr. Müller (Photometrie der Gestirne p. 82), je ne donne ici que la formule définitive.

Appellons par

h, intensité de la surface lunaire éclairée directement par le Soleil
h', celle de la lumière cendrée
ω, ψ, longitude et latitude de l'élément observé dans la partie éclairée de la Lune
ω', ψ', celles de l'élément dans la lumière cendrée.
σ, rayon apparent de la Terre vu de la Lune
α, angle de la phase et
A, albedo de la Terre d'après la définition de Lambert.

Nous avons entre ces quantités la relation suivante:

$$\frac{h}{h'} = \frac{3\pi}{2A\sin^2\sigma} \cdot \frac{\cos(\omega - \alpha)\cos\psi}{(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\cos\psi'\cos\omega'}. \tag{1}$$

On peut donner encore les formules basées sur la loi d'Euler et sur celle de Lommel-Seeliger. Mais je préfère d'employer uniquement la formule donnée plus haut, parceque les lois mentionnées ne sont pas justifiées par les considérations théoriques et ne possèdent aucune vérification suffisante.

On voit de la formule (1) que le point cardinal de la question est de connaître le rapport d'intensité de la surface lunaire directement éclairée par le Soleil à celle de la lumière cendrée. C'est cela ce qu'on doit trouver par les observations photométriques.

J'ai entrepris ces observations à l'observatoire de Paris grâce à l'aimable autorisation de M. Baillaud, directeur de l'Observatoire. L'astrophotomètre dont la description et l'examen j'ai déjà donnée dans ma thèse («Lumière Zodiacale», Annales de l'Observatoire de Paris) était attaché à l'équatorial photographique de la Sorbonne installé dans les jardins de l'Observatoire. Je comparais une partie de la lune éclairée directement par le Soleil avec celle dans la lumière cendrée; la dernière était choisie près de l'équateur dans le voisinage du bord de la lune pour pouvoir la trouver facilement dans le champ de la vision malgré l'absence de details dans ce région de disque. Enfin j'étais obligé à examiner chaque fois l'intensité du fond du ciel aux environs de la lumière cendrée, afin de pouvoir tenir compte de l'éclairement provenant de l'atmosphère terrestre. Sans doute cette correction est trop faible pour le disque éclairé de la lune, mais pour la lumière cendrée se détachant faiblement sur le fond du ciel elle peut jouer un rôle assez considérable.

La principale difficulté des semblables observations est que le rapport des intensités qu'on veut mesurer est extrêmement grand. Aucun photomètre n'est capable le mesurer directement sans un dispositif auxiliaire. Dans le cas actuel j'ai employé un diaphragme placé devant l'objectif du photomètre. L'ouverture de ce diaphragme était mesurée avec une exactidude suffisante à l'aide d'un coin dont les côtés portaient une échelle divisée en millimètres.

On peut admettre que l'affaiblissement de l'intensité obtenu par ce procédé est égale au rapport de la surface libre de l'objectif à celle de l'ouverture du diaphragme. Sans doute pour les étoiles ce n'est pas vrai à cause de la diffraction, mais pour les surfaces lumineuses cette proposition conserve toute son exactitude.

Dans la suite je donne mes observatons photométriques sur la lune (le diaphragme étant introduit), sur la lumière cendrée et sur le fond du ciel (sans diaphragme).

1. 20—XII. 1913.	2^h4^m	2^h23^m	2^h49^m	$3^h15{,}5^m$	$3^h46{,}5^m$	4^h24^m	4^h54^m
Oceanus Procellarum (au sud de l'Aristarque)	54,3	58,8	51,0	52,5	61,5	54,3	31,9
lumière cendrée ...	0,741	0,685	0,641	0,636	0,559	0,636	0,384
fond du ciel	0,137	0,204	0,111	0,211	0,167	0,089	0,062

2. 31—XII. 1913.	5^h11^m	5^h37^m	6^h8^m
Mare Crisium	7,9	11,3	14,8
lumière cendrée ...	0,330	0,672	0,702
fond du ciel	0,066	0,088	0,134

3. 11—I. 1914.

	$6^h2,5^m$	6^h60^m	$6^h49,5^m$
Mare Foecunditatis.	38,8	33,1	31,6
lumière cendrée ...	0,334	0,399	0,364
fond du ciel	0,036	0,043	0,046

4. 1—II. 1914.

	$5^h57,5^m$	6^h18^m	6^h41^m	6^h57^m
Près de Mare Foecundit. (région montagneux près du bord).	31,3	30,7	30,8	32,0
lumière cendrée....	0,160	0,124	0,148	0,178
fond du ciel	0,024	0,023	0,023	0,032

5. 2—II 1914.

	6^h2^m	6^h31^m
Mare Tranquilitatis.	32,0	42,1
lumière cendrée....	0,500	0,685
fond du ciel.......	0,140	0,157

Chaque nombre de cette Table est la moyenne de quatre évaluations d'éclat qui étaient toujours disposées symétriquement (dans l'ordre: lune, lumière cendrée, fond du ciel, fond du ciel, lumière cendrée, lune) pour éliminer l'effet du changement de la hauteur de la lune. Il est à remarquer que ces observations sont purement relatives. Les différentes séries ne sont pas, par conséquent, comparables.

Il faut maintenant reduire l'intensité du fond du ciel au point où la lumière cendrée était observée. Ce point se trouve à peu près à la distance de 0,8 du centre du disque lunaire, le rayon de la lune étant pris pour unité. A cet effet on peut employer la méthode suivante. Déterminons la variation de l'intensité du fond du ciel dans le voisinage du bord de la pleine lune. Cette variation de l'intensité est représentée d'après mes observations spéciales, par la courbe ci-après. Il faut en déduire la variation de l'intensité pour les différentes phases de la lune.

A l'intérieur du disque de la pleine lune prenons une aire élémentaire $d\sigma$. Supposons que l'éclairement produit par l'aire dans un point A à la distance δ du centre est donné par une fonction $f(r)$, r étant la distance de A à $d\sigma$.

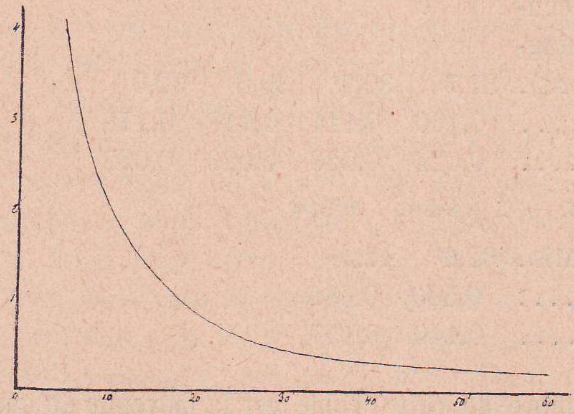
En supposant que la lune a la même intensité dans tous ses points, nous avons pour l'intensité totale dans A

$$J = \iint_{\Sigma} f(r)\, d\sigma$$

intégrale étant étendue à tout le domaine Σ.

C'est une équation intégrale de première espèce qui doit être résolue par rapport à $f(r)$. Sans pouvoir résoudre cette équation j'ai pris pour $f(r)$ une certaine fonction contenant les paramètres indeterminés. On peut, en effet, supposer que $f(r)$ est du même caractère que la courbe

Courbe de la variation d'intensité du fond du ciel en fonction de distance du bord de la pleine lune exprimée en minutes d'arc.



integrale représentée sur la figure ci-jointe. Après quelques recherches j'ai adopté pour $f(r)$ l'expression suivante:

$$\frac{1}{f(r)} = a + br^2.$$

Soit ϱ, φ les coordonnées polaires de $d\sigma$, l'origine étant supposée dans le centre de la lune et l'axe de référence passant par le point A. Comme

$$r^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\varphi$$

nous avons à intégrer l'expression

$$J = \int_0^R \int_0^\pi \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{a + b(\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\varphi)}.$$

Prenons d'abord l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a^2 + b\varrho^2 + b\delta^2 - 2b\varrho\delta\cos\varphi}$$

et posons

$$a_1 = a + b\varrho^2 + b\delta^2 \quad \text{et} \quad b_1 = -2b\varrho\delta.$$

On voit que

$$b_1^2 - a_1^2 < 0.$$

En effet

$$b_1 - a_1 = -2b\varrho\delta - a - b\varrho^2 - b\delta^2 = -a - b(\varrho + \delta)^2$$

est une quantité négative, parce que a et b sont les nombres essentiellement positifs.

D'autre part

$$b_1+a_1=a+b\varrho^2+b\delta^2-2b\varrho\delta=a+b\,(\varrho-\delta)^2>0.$$

Nous avons, donc,

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a_1+b_1\cos\varphi}=\frac{2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{(a_1-b_1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}.$$

Il reste à calculer l'intégrale

$$J=\pi\int_0^R \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{b^2\varrho^4+2\varrho^2(ab-b^2\delta^2)+(a+b\delta^2)^2}}.$$

Posons

$$\alpha=b^2;\quad \beta=b\,(a-b\delta^2);\quad \gamma=(a+b\delta^2)^2.$$

Nous avons

$$J=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log(\beta+\alpha\varrho^2+\sqrt{\alpha}\,.\sqrt{\alpha\varrho^4+2\beta\varrho^2+\gamma})\right]_{\varrho=0}^{\varrho=R}$$

ou

$$J=\frac{\pi}{2b}\log\left[\frac{a-b\delta^2}{2a}+\frac{b}{2a}R^2+\frac{\sqrt{b^2R^4+2b(a-b\delta^2)R^2+(a+b^2\delta^2)^2}}{2a}\right].$$

En posant enfin

$$k=\frac{b}{a},\quad R=1,$$

nous avons

$$J=\frac{\pi}{2b}\left[\log(1+k(1-\delta^2)+\sqrt{k^2(1-\delta^2)^2+2k\,(1+\delta^2)+1})-\log 2\right]$$

Notre graphique donne

1.	$\delta=1{,}00$	$J=1{,}32$
2.	1,33	0,86
3.	1,66	0,60
4.	2,00	0,45

Ces quatre quantités suffisent pour calculer un paramètre k.

En améliorant la valeur primitive de k à l'aide d'une formule différentielle facile à déduire, j'ai obtenu définitivement

$$k=2,$$

ce que représente lcs observations de la façon suivante:

1,32	0,86	0,60	0,45	observé
1,32	0,93	0,59	0,46	calculé

On ne saurait obtenir une meilleure concordance en conservant la forme simple de $f(r)$ qui était adoptée pour le calcul.

Nons avons donc

$$f(r) = \frac{1}{a(1+2r^2)}, \qquad (r=1{,}0-2{,}0)$$

a restant naturellement indéterminé.

Imaginons maintenant la lune dans une de ses phases, α étant l'angle de la phase. Cherchons l'éclat de l'átmosphère dans un point à la distance δ du centre (le point en question se trouve sur l'équateur d'intensité) en supposant toujours que le disque de la lune possède une intensité uniforme. En appliquant les résultats obtenus, nous voyons, qu'il faut calculer l'intégrale

$$i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varrho_0}^{R} \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{1+2(\delta^2+\varrho^2+2\delta\varrho\cos\varphi)}.$$

Il est facile de déterminer ϱ_0, la limite inférieure de l'intégration. En effet l'équation de l'ellipse limitant intérieurement la partie eclairée de la lune est

$$x^2 + y^2 \sin^2(\alpha - 90^0) = R^2 \sin^2(\alpha - 90^0),$$

α étant toujours supposé supérieur à 90^0. En posant

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi,$$

nous avons

$$\varrho_0{}^2 = \frac{R^2 \sin^2(\alpha - 90^0)}{1 - \sin^2\varphi \cos^2(\alpha - 90^0)}.$$

Intégrons d'abord l'intégrale

$$\int_{\varrho_0}^{R} \frac{\varrho d\varrho}{1+2\delta^2+4\delta\cos\varphi \,.\, \varrho + 2\varrho^2}. \qquad (R=1)$$

Posons

$$\varrho = t + \delta\cos\varphi.$$

Le coefficient de t dans le dénominateur devient nul et nous avons facilement:

$$\int \frac{\varrho d\varrho}{1+2\delta^2+4\delta\varrho\cos\varphi+2\varrho^2} = \frac{1}{4}\log(1+2\delta^2+4\delta\cos\varphi+2\varrho^2) - \\ - \frac{\delta\cos\varphi}{\sqrt{2+4\delta^2\sin^2\varphi}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(\varrho+\delta\cos\varphi)}{\sqrt{1+2\delta^2\sin^2\varphi}}.$$

Il faut maintenant calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}\log(1+2\delta^2+4\delta\cos\varphi+2)-\frac{\delta\cos\varphi}{\sqrt{2+4\delta^2\sin^2\varphi}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(1+\delta\cos\varphi)}{\sqrt{1+2\delta^2\sin^2\varphi}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\log(1+2\delta^2+4\delta\varrho_0\cos\varphi+2\varrho_0^2)+\frac{\delta\cos\varphi}{\sqrt{2+4\delta^2\sin^2\varphi}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(\varrho_0+\delta\cos\varphi)}{\sqrt{1+2\delta^2\sin^2\varphi}}\right]d\varphi$$

où

$$\varrho_0^2=\frac{\sin^2(\alpha-90^0)}{1-\sin^2\varphi\cos^2(\alpha-90^0)}.$$

On ne peut calculer cette intégrale qu'à l'aide de l'intégration mécanique.

Posons d'abord $\delta=1{,}0$;

l'expression à calculer prend la forme suivante:

$$(9{,}760)\log\frac{5+4\cos\varphi}{3+4\varrho_0\cos\varphi+2\varrho_0^2}-$$

$$-\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2+4\sin^2\varphi}}\left[\operatorname{arctang}\frac{2(1+\cos\varphi)}{\sqrt{2+4\sin^2\varphi}}-\operatorname{arctang}\frac{2(\varrho_0+\cos\varphi)}{\sqrt{2+4\sin^2\varphi}}\right]$$

où log est le logarithme vulgaire.

En posant $\delta=0{,}8$ nous avons de la même façon

$$(9{,}760)\log\frac{4{,}28+3{,}2\cos\varphi}{2{,}28+3{,}2\varrho_0\cos\varphi+2\varrho_0^2}-$$

$$-\frac{0{,}8\cos\varphi}{\sqrt{2+2{,}56\sin^2\varphi}}\left[\operatorname{arctang}\frac{2(1+0{,}8\cos\varphi)}{\sqrt{2+2{,}56\sin\varphi}}-\operatorname{arctang}\frac{2(\varrho_0+0{,}8\cos\varphi)}{\sqrt{2+2{,}56\sin^2\varphi}}\right].$$

Il suffit de calculer ces expressions pour les valeurs suivantes de φ et de α:

$$\varphi=0^0\quad 30^0\quad 60^0\quad 90^0$$
$$\alpha=90^0\quad 120^0\quad 150^0\quad 180^0.$$

Le calcul donne

$\delta=1{,}0$	$\varphi=0^0$	30^0	60^0	90^0
$\alpha=90^0$	0,082	0,083	0,097	0,128
120^0	0,052	0,048	0,0343	0,000
150^0	0,0137	0,0116	0,0052	0,000
180^0	0,000	0,000	0,000	0,000
$\delta=0{,}8$				
$\alpha=90^0$	0,099	0,104	0,121	0,157
120^0	0,064	0,0610	0,0407	0,000
150^0	0,0174	0,0156	0,0066	0,000
180^0	0,000	0,000	0,000	0,000

En effectuant l'intégration à l'aide de ces quantités nous obtiendrons facilement les résultats suivants:

		$\delta = 1,0$	$\delta = 0,8$
$\alpha =$	90^0	1,000	1,245
	120	0,390	0,471
	150	0,083	0,109
	180	0,000	0,000

On peut construire d'après ces nombres les courbes pour tous les angles des phases entre 90^0 ct 180^0; le rapport des ordonnées donne le coefficient de réduction en question.

Pour trouver les angles des phases, on peut utiliser les formules suivantes:

$$\cos v = \cos\beta \cos(\lambda - \lambda')$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sin v}{\cos v - \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}},$$

λ, β, $\tilde{\omega}$ étant longitude, latitude et parallaxe de la lune et λ', $\tilde{\omega}'$, longitude et parallaxe du soleil.

Nous avons:

	1	2	3	4	5
α	$97^0,1$	$131,3^0$	$118,9^0$	$108,4^0$	$97,3^0$

d'où le coefficient de réduction est dans chaque cas

1,24	1,26	1,24	1,24	1,24

Après avoir corrigé l'intensité du fond du ciel, nous calculons celle de la lumière cendrée proprement dite. Dès lors on peut former le rapport cherché $\frac{h}{h'}$:

1	2	3	4	5
$117k_1$	$26,8k_2$	$103k_3$	$263k_4$	$92k_5$,

où k_i exprime l'affaiblissement de l'intensité de la surface de la lune à cause de l'emploi du diaphragme.

En mesurant soigneusement le diamètre de l'ouverture du diaphragme et celui de l'objectif chaque fois immédiatement après les observations j'ai trouvé lcs valeurs suivantes:

$\log k_1$	$\log k_2$	$\log k_3$	$\log k_4$	$\log k_5$
2,0476	2,0168	2,0152	2,0086	2,0086

Il en résulte pour le rapport d'intensité cherché

1	2	3	4	5
13100	2790	10670	26900	9400

Ces nombres ne sont pas encore utilisables pour le calcul. En effet la théorie suppose que toutes les parties de la lune possèdent le même pouvoir de réflechir la lumière. En réalité la surface lunaire est loin d'être homogène. Il faut, par conséquent, examiner le disque de la lune et surtout les régions qui étaient observés precédemment.

En observant la lune quand celle-ci était pleine, j'ai obtenue les résultats suivants:

	lecture du micrometre	nombre d'observations	log. de l'intensité
région montagneux près de Mare Foecunditatis (près du bord de la lune)	$11^t,80$	8	1,873
Mare Crisium	$5^t,43$	6	1,328
Mare Tranquilitatis	$6^t,44$	6	1,457
Oceanus Procellarum (au sud de l'Aristarque) .	$6^t,50$	6	1,461
Mare Foecunditatis	$8^t,67$	6	1,670
région montagneux prés de l'oceanus Procellarum (au bord de la lune)	$12^t,36$	6	1,902

On peut en conclure que les rapports précédents doivent être multipliés par les facteurs dont les logarithmes sont:

1	2	3	4	4
0,412	0,574	0,232	0,029	0,445

Cela donne définitivement pour $\log \frac{h}{h'}$

1	2	3	4	5
4,528	4,019	4,260	4,458	4,418

Il ne reste maintenant qu'appliquer directement la formule (1). Dans cette formule j'ai pris pour les coordonnées des différents points de la lune, les valeurs que voici:

	1	2	3	4	5
ω	50^0	58^0	50^0	70^0	30^0
ψ	-15^0	-15^0	0^0	10^0	-5^0
ω'	70^0	70^0	70^0	70^0	70^0
ψ'	0^0	0^0	0^0	0^0	0^0

Ceci donne pour l'albedo d'après la définition de Lambert

1.	0,74
2.	0,62
3.	0,57
4.	0,73
5.	0,67

en moyenne 0,67 $\pm$ 0,032 (err. moyenne).

J'ai déduit la moyenne en attribuant le même poids à toutes ces quantités quoique le nombre d'observations n'était pas le même dans tous les cas. Cela tient à ce que la discordance entre les déterminations séparées est due plutôt á l'inexactitude de la loi de Lambert, mise au fond de ces recherches, qu'aux erreurs des observations photomètriques. Quoi qu'il en soit, la première décimale, au moins, peut etre considérée comme exacte.

Il serait peut etre intéressant de confronter les albedos des autres planètes avec celui de la Terre. Les voici:

Lune	0,13
Mercure	0,14
Venus	0,76
Terre	0,67
Mars	0,22
Jupiter	0,62
Saturne	0,72
Uranus	0,60
Neptune	0,52

On voit que la Terre occupe une place intermédiaire entre Venus et Mars, comme il fallait s'y attendre.