О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ.

Димитрія Граве.

1. Ариѳметическая теорія періодическихъ непрерывныхъ дробей, созданная Lagrange'омъ и вылившаяся далѣе въ Gauss'ову теорію квадратичныхъ формъ, была основой, изъ которой развилась современная теорія алгебраическихъ чиселъ. Черезъ все XIX столѣтіе проходитъ желаніе обобщить алгориѳмъ непрерывныхъ дробей для алгебраическихъ чиселъ, опредѣляемыхъ уравненіями выше второй степени. Наука обязана нашему соотечественнику Г. Ѳ. Вороному первой удачной попыткой обобщенія теоріи Lagrange'а на уравненія третьей степени.

2. Въ настоящей статьѣ я хочу обратить вниманіе на обобщеніе теоріи Lagrange'а другого характера, а именно, показать, что можетъ получиться теорія, аналогичная для разложенія въ непрерывную дробь корня квадратнаго уравненія съ цѣлыми алгебраическими коэффиціентами.

Оставляя до болѣе подробнаго мемуара детальное изложеніе предмета, я разсмотрю въ настоящей предварительной статьѣ нѣсколько наиболѣе характерныхъ примѣровъ.

3. Возьмемъ какое нибудь алгебраическое поле Ω степени n.

Пусть фундаментальный базисъ будетъ

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \ldots\ \omega_n .$$

Возьмемъ число D поля Ω, относительно котораго справедлива формула

$$\sqrt{D} = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \ldots + \alpha_n\omega_n , \tag{1}$$

причемъ всѣ числа $\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ вещественныя, но не всѣ раціональныя.

Пусть кромѣ того число D будетъ дискриминантомъ уравненія

$$Ax^2 - 2Bx + C = 0 , \tag{2}$$

съ коэффиціентами цѣлыми алгебраическими изъ поля Ω, такъ что

$$x = \frac{B \pm \sqrt{D}}{A}, \quad \text{гдѣ } D = B^2 - AC. \tag{3}$$

Выбирая въ формулѣ (3) какой нибудь опредѣленный знакъ у радикала, получаемъ

$$x = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \ldots + \beta_n\omega_n, \tag{4}$$

гдѣ $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ числа вещественныя и не всѣ раціональныя.

Дѣло идетъ о нахожденіи цѣлаго числа a_1 поля Ω, возможно близкаго къ числу x.

Когда число a_1 найдено, полагаемъ $x = a_1 + \frac{1}{x_1}$ и продолжаемъ подобное же разсужденіе относительно числа x_1. Получается разложеніе корня квадратнаго уравненія (2) въ непрерывную дробь

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots},$$

у которой неполныя частныя $a_1, a_2, \ldots$ цѣлыя числа поля Ω.

Правила указанія числа a_1, ближайшаго къ x, должны быть даны такъ, чтобы съ одной стороны получался всегда единственный результатъ, а съ другой стороны, чтобы мы приходили къ періодической непрерывной дроби.

4. Разсмотримъ Gauss'ово поле Ω комплексныхъ чиселъ вида $a + bi$, гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а числа a, b числа раціональныя. Въ этомъ случаѣ фундаментальный базисъ есть $(1, i)$.

Если корень

$$\sqrt{A + iB}$$

не извлекается въ полѣ Ω, то будетъ

$$\sqrt{A + iB} = \alpha_1 + \alpha_2 i,$$

гдѣ вещественныя ирраціональныя числа α_1 и α_2 вычисляются по формуламъ

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}},$$

причемъ радикалъ $\sqrt{A^2 + B^2}$ берется со знакомъ $+$.

Пусть въ этомъ случаѣ цѣлая часть a_1 числа x берется по обычному правилу замѣны дробныхъ координатъ ближайшими цѣлыми числами.

5. Пояснимъ способъ на примѣрѣ произвольно взятаго числа

$$\sqrt{D} = \sqrt{357 + i216} = \alpha_1 + i\alpha_2,$$

гдѣ

$$\alpha_1 = 19{,}675\ldots, \quad \alpha_2 = 5{,}495\ldots$$

Получаемъ очевидно

$$\sqrt{D} = 20 + 5i + \frac{1}{x_1}.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - (20+5i)} = \frac{\sqrt{D} + 20 + 5i}{-18+16i} = \frac{(-18-16i)(\sqrt{D}+20+5i)}{580} =$$

$$= -\frac{546,23\ldots}{580} - i\frac{823,72\ldots}{580} = -1 - i + \frac{1}{x_2}.$$

Далѣе

$$x_2 = \frac{-18+16i}{\sqrt{D}-(14-3i)} = \frac{(-18+16i)(\sqrt{D}+14-3i)}{357+216i-(14-3i)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{D}+14-3i}{3-14i} = \frac{(3+14i)(\sqrt{D}+14-3i)}{205} =$$

$$= \frac{66,095}{205} + i\frac{478,93\ldots}{205} = 2i + \frac{1}{x_3}$$

Продолжая далѣе, мы приходимъ къ періодической непрерывной дроби

$$\sqrt{D} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

причемъ

$$x_i = a_i + \frac{1}{x_{i+1}}$$

Обозначимъ подходящія дроби знакомъ $\frac{P_i}{Q_i}$ при условіи

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0\,, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Всякое полное частное x_i будетъ выражаться формулой

$$x_i = \frac{\sqrt{D} + \tau_i}{\sigma_i}\,,$$

гдѣ τ_i и σ_i суть цѣлыя комплексныя числа. Результатъ разложенія въ непрерывную дробь можетъ быть представленъ въ видѣ таблицы

i	σ_i	a_i	P_i	Q_i
0	—	$20+5i$	$20+5i$	1
1	$-18+16i$	$-1-i$	$-14-25i$	$-1-i$
2	$3-14i$	$2i$	$70-23i$	$3-2i$
3	$6+16i$	$1-2i$	$10-188i$	$-2-9i$
4	$21+20i$	$1-i$	$-108-221i$	$-8-9i$
5	4	$9+2i$	$-520-2393i$	$-56-106i$
6	$3+16i$	$1-2i$	$-5414-1574i$	$-276-3i$
7	$3-8i$	$4i$	$5776-24049i$	$-44-1210i$
8	$3+16i$	$1-2i$	$-47736-37175i$	$-2740-1125i$
9	4	$10+2i$	$-397234-491271i$	$-25194-17940i$
10	$-17+12i$	$-1-2i$	$-633044+1248564i$	$-13426+67204i$
11	$-25+12i$	$-1-i$	$1484374-1106791i$	$55435-71717i$
12	$3-14i$	$1+2i$	$3064912+3110521i$	$185443+106356i$
13	$-18+16i$	$-1-i$	$1529983-7282224i$	$-23652-363516i$
14	1	$40+10i$	....	....
15	σ_1	a_1	....	....

Всегда будетъ имѣть мѣсто

$$P_i^2-(357+216i)\,Q_i^2=(-1)^{i+1}\,\sigma_{i+1}\,,$$

слѣдовательно, при

$$i=4\,,\;8\,,\;13$$

мы получаемъ рѣшеніе Pell'ева уравненія.

6. Второй примѣръ возьмемъ изъ дѣленія круга, а именно, изъ поля, зависящаго отъ корня изъ единицы 8-ой степени.

Базисъ поля есть

$$1\,,\;i\,,\;\theta\,,\;\theta i\,,$$

гдѣ $\theta^2=i$.

Если A и B суть цѣлыя Gauss'овы комплексныя числа, то

$$\sqrt{A+\theta B}=\xi+\theta\eta\,,$$

гдѣ ξ и η имѣютъ видъ $a+bi$ съ вещественными a, b. Въ самомъ дѣлѣ, получаемъ

$$\xi^2+i\eta^2=A\,,\quad 2\xi\eta=B\,,$$

откуда

$$\xi=\sqrt{\frac{A\pm\sqrt{A^2+iB^2}}{2}}\,,\quad \eta=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{A\mp\sqrt{A^2+iB^2}}{2}}\,.$$

Примѣняя къ случаю $\sqrt{\theta}$, получимъ

$$\sqrt{\theta} = a + bi + c\theta + \partial i\theta$$

гдѣ

$$a = c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} = 0{,}6533\ldots$$

$$-b = \partial = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = 0{,}2706\ldots$$

Мы получимъ, примѣняя тотъ же самый способъ приближенія къ вещественнымъ ирраціональнымъ координатамъ,

$$\sqrt{\theta} = 1 + \theta + \frac{1}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\theta}-(1+\theta)} = \frac{\sqrt{\theta}+1+\theta}{-1-i-\theta} = \frac{(-1-i+\theta)(\sqrt{\theta}+1+\theta)}{i} =$$

$$= (i-1-\theta i)(\sqrt{\theta}+1+\theta) = c-a-b+i(a+1-b+\partial)+\theta(b-1-c-\partial)+$$

$$+ i\theta(c-\partial-a) = 2i-2\theta+\frac{1}{x_2}.$$

Далѣе

$$\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{\theta}-(1+\theta)}{-1-i-\theta}, \quad x_2 = \sqrt{\theta}+1+\theta = 2+2\theta+\frac{1}{x_1}$$

и мы приходимъ къ періодической непрерывной дроби съ двумя звеньями въ періодѣ

$$\sqrt{\theta} = 1+\theta+\cfrac{1}{2(i-\theta)+\cfrac{1}{2(i+\theta)+\cfrac{1}{2(i-\theta)+\ldots}}}$$

Получается простѣйшее рѣшеніе Pell'ева уравненія

$$x^2 - \theta y^2 = 1$$

въ видѣ

$$x = 1-2\theta-2\theta i, \quad y = 2(i-\theta).$$

7. Какъ послѣдній примѣръ возьмемъ кубическое поле, зависящее отъ корня уравненія

$$\theta^3 = 2.$$

Будемъ раскладывать корень квадратный

$$\sqrt{\theta}=x+\theta y+\theta^2 z$$

Можетъ произойти одно изъ двухъ

$$x=\pm\frac{2\sqrt[6]{2}}{3},\quad y=\pm\frac{\sqrt[6]{32}}{3},\quad z=\mp\frac{1}{\sqrt{18}}$$

$$x=0,\quad y=0,\quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ограничиваясь верхними знаками, получимъ въ первомъ случаѣ

$$x=0{,}748\ldots,\quad y=0{,}564\ldots,\quad z=-0{,}236\ldots,$$

то есть

$$\sqrt{\theta}=1+\theta+\frac{1}{x_1}$$

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{\theta}-(1+\theta)}=\frac{\sqrt{\theta}+1+\theta}{-1-\theta-\theta^2}.$$

Дѣля x^3-2 на x^2+x+1 получаемъ въ частномъ $x-1$ и остатокъ -1, то есть

$$x^3-2=(x^2+x+1)(x-1)-1.$$

Подставляя сюда θ, получимъ

$$0=(\theta^2+\theta+1)(\theta-1)-1,$$

откуда

$$\frac{1}{-1-\theta-\theta^2}=1-\theta.$$

Итакъ

$$x_1=(1-\theta)(\sqrt{\theta}+1+\theta)=(1-\theta)[x+1+\theta(y+1)+z\theta^2]=1+x-2z+$$
$$+(y-x)\theta+(z-1-y)\theta^2=2-2\theta^2+\frac{1}{x_2}$$

Далѣе

$$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{D}-(1+\theta)}{1-\theta-\theta^2}$$

$$x_2=\sqrt{\theta}+1+\theta=2(1+\theta)+\frac{1}{x_1}$$

Періодъ уже обнаружился и состоитъ изъ двухъ звеньевъ.

Мы пришли къ дроби

$$\sqrt{\theta}=1+\theta+\cfrac{1}{2(1-\theta^2)+\cfrac{1}{2(1+\theta)+\cfrac{1}{2(1-\theta^2)+\dots}}} \tag{5}$$

Во второмъ случаѣ

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0{,}707\dots,$$

слѣдовательно, получаемъ

$$\sqrt{\theta}=\theta^2+\frac{1}{x_1}.$$

Поступая подобно изложенному, приходимъ къ дроби

$$\sqrt{\theta}=\theta^2+\cfrac{1}{-2\theta+\cfrac{1}{2\theta^2+\cfrac{1}{-2\theta+\dots}}} \tag{6}$$

періодъ опять состоитъ изъ двухъ звеньевъ.

Мы получимъ два простѣйшихъ рѣшенія Pell'ева уравненія

$$x^2-\theta y^2=1,$$

одно изъ первой дроби (5)

$$x=-1-2\theta+2\theta^2,\quad y=2(1-\theta^2),$$

другое изъ второй дроби (6)

$$x=+3,\quad y=2\theta.$$

8. Въ заключеніе я замѣчу, что обобщеніе идетъ также и на трансцендентныя поля съ одной независимой перемѣнной. Если коэффиціенты произвольныя дѣйствительныя или мнимыя числа, то разложеніе корня квадратнаго изъ цѣлыхъ элементовъ такого поля въ непрерывную дробь даетъ алгориѳмъ, имѣющій большое значеніе въ интегральномъ

исчисленіи. Эти приложенія указаны въ знаменитомъ мемуарѣ Abel'я Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, R et ϱ étant des fonctions entières.

Къ болѣе опредѣленнымъ выводамъ можно придти, если ограничить коэффиціенты элементовъ трансцендентнаго поля. Таковы изслѣдованія Чебышева, когда коэффиціенты раціональные, а также изслѣдованія Золотарева при коэффиціентахъ алгебраическихъ.

Мы видимъ что теорія ультра-эллиптическихъ функцій сближается все болѣе съ высшими частями теоріи чиселъ.

8 февраля 1915 г.
Кіевъ.