Объ одномъ функціональномъ уравненіи.

Д. М. Синцова.

Поставимъ себѣ такую задачу:

«Какова должна быть функція $f(x)$ для того, чтобы при всякомъ x (можетъ быть, ограниченномъ извѣстнымъ интерваломъ) можно было найти двѣ такія независящія отъ x постоянныя m и v, чтобы при данныхъ m_1, v_1, m_2, v_2, не равныхъ соотвѣтственно между собою, выполнялось тожество

$$mf(vx) \equiv m_1 f(v_1 x) + m_2 f(v_2 x). \tag{1}$$

Ограничимъ задачу: будемъ разыскивать *аналитическую* функцію, которая выполняла бы указанныя условія.

Прежде всего разсмотримъ случай, когда

$$1) \quad f(0) \neq 0 \tag{a}$$

Предполагая что значеніе $x = 0$ принадлежитъ къ допустимымъ для x значеніямъ, положимъ въ (1) $x = 0$. Получимъ

$$mf(0) = m_1 f(0) + m_2 f(0)$$

Въ силу допущенія (а) должно быть

$$m = m_1 + m_2 \tag{2}$$

Мы можемъ отбросить случай $m_1 + m_2 = 0$, потому что при $f(x)$ конечной это обращаетъ (1) въ силу (2) въ тожество

$$m_1 [f(v_1 x) - f(v_2 x)] = 0$$

что при $v_1 \neq v_2$ даетъ $f(x) = 0$, а при $v_1 = v_2$ ничего не говоритъ о видѣ функціи $f(x)$.

Итакъ $m_1 + m_2 \neq 0$.

Въ дальнѣйшемъ можно снова сдѣлать два предположенія:

$$\alpha) \; f'(0) \neq 0 \quad \text{и} \quad \beta) \; f'(0) = 0$$

Продифференцировавъ (1) одинъ разъ по x, получимъ:

$$mvf'(vx) \equiv m_1 v_1 f'(v_1 x) + m_2 v_2 f'(v_2 x).$$

Полагая здѣсь $x=0$, получимъ въ первомъ предположенiи

$$mv = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{3}$$

т. е. въ связи съ (2):

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

этимъ уже m и v опредѣлены.

Новое дифференцированiе даетъ

$$mv^2 f''(vx) \equiv m_1 v_1{}^2 f''(v_1 x) + m_2 v_2{}^2 f''(v_2 x)$$

Отсюда при $x=0$ должно быть уже непремѣнно $f''(0)=0$, а также и всѣ дальнѣйшiя производныя при $x=0$ обращаются въ 0.

Дѣйствительно, при $f^{(k)}(0) \neq 0$ имѣли бы одновременно

$$(m_1 + m_2)\, v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$(m_1 + m_2)\, v^k = m_1 v_1{}^k + m_2 v_2{}^k$$

или

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2 - v}{v - v_1} = \frac{v_2{}^k - v^k}{v^k - \tau_1{}^k}$$

Такъ какъ v не равно v_1 или v_2 при $v_1 \neq v_2$, то при $k=2$ отсюда заключаемъ $f''(0)=0$, при $k=3: f'''(0)=0$ и т. д.

Итакъ при сдѣланныхъ предположенiяхъ

$$f(x) = A + Bx. \tag{Iα}$$

Пусть теперь $f'(0)=0$. Тогда должно быть одно изъ двухъ: или всѣ дальнѣйшiя производныя также равны нулю при $x=0$, т. е.

$$f(x) = A \tag{Iβ_1}$$

или же есть такая производная $f^{(k)}(x)$, которая первая не обращается въ 0 при $x=0$: $f^{(k)}(0) \neq 0$.

Тогда дифференцируя k разъ находимъ

$$mv^k f^{(k)}(vx) \equiv m_1 v_1{}^k f^{(k)}(v_1 x) + m_2 v_2{}^k f^{(k)}(v_2 x)$$

и полагая $x=0$, заключаемъ

$$mv^k = m_1 v_1{}^k + m_2 v_2{}^k \tag{3_1}$$

Изъ уравненiй (2) и (3_1) найдемъ m и v.

Отсюда уже $f^{(k+1)}(0)=0$ и всѣ дальнѣйшія производныя также обращаются въ 0 при $x=0$. Иначе одновременно съ (2) и (3_1) должно бы быть

$$mv^{k+1}=m_1v_1^{k+1}+m_2v_2^{k+1}$$

и т. д.

Итакъ въ этомъ случаѣ

$$f(x)=A+Bx^k \qquad (\mathrm{I}\beta_2)$$

Не трудно провѣрить, что тожество (1) выполнено.

2) Остается случай $f(0)=0$. Но при этомъ одно изъ двухъ: или *всѣ производныя* $f(x)$ *при* $x=0$ *обращаются въ* 0, и аналитическою функціей удовлетворяющей поставленнымъ условіямъ, является

$$f(x)=0 \qquad (\mathrm{II}\alpha)$$

или же существуетъ такая производная конечнаго порядка l, которая при $x=0$ въ нуль не обращается: $f^{(l)}(0)\neq 0$. Но тогда разложеніе $f(x)$ въ степенную строку начинается съ члена

$$\frac{x^l}{l!}f^{(l)}(0),$$

и мы можемъ положить

$$f(x)=x^l\varphi(x) \qquad (4)$$

гдѣ уже

$$\varphi(0)\neq 0 \quad \left(=\frac{f^{(l)}(0)}{l!}\right)$$

Тожество (1) при подстановкѣ (4) даетъ

$$m'\varphi(vx)\equiv m_1'\varphi(v_1x)+m_2'\varphi(v_2x)\,, \qquad (1')$$

если сократить на x^l и положить

$$mv^l=m',\quad m_1v_1^l=m_1',\quad m_2v_2^l=m_2'.$$

Такимъ образомъ $\varphi(x)$ опредѣляется такимъ же тожествомъ, что и $f(x)$, но уже $\varphi(0)\neq 0$. Итакъ снова $\varphi(x)$ должно быть вида $A+Bx^k$, и слѣдовательно, въ этомъ случаѣ

$$f(x)=x^l(A+Bx^k) \qquad (\mathrm{II}\beta)$$

Всѣ эти случаи объединяются въ одной формѣ

$$f(x) = Ax^l + Bx^k \tag{5}$$

гдѣ k и l цѣлыя числа, неравныя между собою, одно изъ коихъ можетъ быть нулемъ.

Такія и только такія могутъ быть *аналитическія* функціи, удовлетворяющія тожеству (1).

[Можно замѣтить, что k и l могутъ быть и не цѣлыми числами, и (5) все же будетъ удовлетворять (1). Къ этому можно прійти, предполагая, что $f(x)$ разлагается въ сходящуюся строку вида

$$A_0 + A_1 x^\alpha + A_2 x^\beta + \ldots].$$

Если поэтому возьмемъ какую-нибудь аналитическую функцію, отличную отъ (5), то хотя при каждомъ данномъ x можно найти m и v такъ, чтобы равенство (1) соблюдалось, но эти m и v будутъ различны для различныхъ x,—т. е. будутъ оба или одно,—функціями x.