Объ однократно суммируемыхъ рядахъ Sturm-Liouville'я.

Эрванда Когбетлянца.

Послѣ обобщенія классическихъ теоремъ Cantor'а и Du-Bois-Reymond'а, относящихся къ *сходящимся тригонометрическимъ* рядамъ, въ одномъ направленіи A. Haar'омъ [1]) на *сходящіеся Sturm-Liouville'вскіе*, въ другомъ — M. Riesz'омъ [2]) на *однократно суммируемые* методомъ среднихъ ариѳметическихъ *тригонометрическіе* ряды, естественно возникаетъ вопросъ: нельзя-ли попытаться слить эти результаты обобщеніемъ теоремъ Cantor'а и Du-Bois-Reymond'а на *однократно суммируемые Sturm-Liouville'вскіе* ряды?

Разрѣшеніе этого вопроса и составляетъ содержаніе настоящей работы: вышеупомянутыя теоремы M. Riesz'а, A. Haar'а равно какъ и исходныя классическія теоремы Cantor'а и Du-Bois-Reymond'а являются частными случаями доказанныхъ въ ней теоремъ. Методъ доказательства тотъ же, которымъ пользуются A. Haar и M. Riesz; онъ данъ H. Lebesgue'омъ при доказательствѣ теоремъ Cantor'а и Du-Bois-Reymond'а въ его книгѣ «Leçons sur les séries trigonométriques». Въ дальнѣйшемъ всюду слова «суммируемый», «суммируемость» и т. п. употребляются въ смыслѣ: суммируемый однократно методомъ среднихъ ариѳметическихъ и т. п.

Изъ дифференціальнаго уравненія съ аналитическими коэффиціентами $p(x)$ и $q(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot\frac{du}{dx}\right]+q(x)\,u+\lambda u=0 \qquad {\scriptstyle (p(x)>0)} \tag{1}$$

возникаетъ при удовлетвореніи пограничныхъ условій

$$\frac{du}{dx}-h'.u=0 \ \text{ при } \ x=\alpha \ \text{ и } \ \frac{du}{dx}+H'.u=0 \ \text{ при } x=\beta \tag{2}$$

[1]) *A. Haar.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme II. Mathem. Ann. B. 71. стр. 38.

[2]) *M. Riesz.* Ueber summierbare trigonometrische Reihen. Mathem. Ann. B. 71 стр. 54.

Sturm-Liouville'вская ортогональная система функцій

$$u_1(x)\,,\quad u_2(x)\,,\quad u_3(x)\ldots u_n(x),\ldots \tag{1}$$

Разсмотримъ рядъ

$$a_1.u_1(x)+a_2.u_2(x)+\ldots+a_n.u_n(x)+\ldots \tag{3}$$

и, обозначивъ значеніе параметра λ соотвѣтствующее функціи $u_n(x)$ черезъ λ_n, составимъ вспомогательный рядъ:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n.u_n(x)}{\lambda_n}=-\frac{a_1.u_1(x)}{\lambda_1}-\frac{a_2.u_2(x)}{\lambda_2}-\ldots-\frac{a_n.u_n(x)}{\lambda_n}-\ldots \tag{4}$$

Мы утверждаемъ справедливость слѣдующихъ теоремъ:

Теорема I. «*Пусть Sturm-Liouville'вскій рядъ (3) повсюду въ интервалѣ* $(\alpha,\ \beta)$ *суммируемъ съ суммой равной нулю. Если рядъ (4) сходится равномѣрно, то*

$$a_n=0\quad(n=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ldots)».$$

Эта теорема остается справедливой и при существованіи въ интервалѣ $(\alpha,\ \beta)$ приводимаго (reductible) множества точекъ, въ которыхъ рядъ (3) или не былъ бы суммируемъ или, оставаясь суммируемымъ, обладалъ-бы суммой отличной отъ нуля, если притомъ наложить на его коэффиціенты ограниченіе, заключающееся въ томъ, чтобы съ возрастаніемъ индекса они стремились къ нулю, т. е. чтобы $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$. Такимъ образомъ получается:

Теорема II. «*Пусть рядъ* (3) *суммируемъ съ суммой равной нулю во всемъ интервалѣ* $(\alpha,\ \beta)$ *за исключеніемъ нѣкотораго приводимаго множества точекъ. Если* $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$, *то всѣ его коэффиціенты равны нулю*».

Эти двѣ теоремы представляютъ обобщеніе теоремы Cantor'a; слѣдующія-же двѣ обобщаютъ теорему Du-Bois-Reymond'a:

Теорема III. «*Пусть рядъ (3) суммируемъ съ суммой* $f(x)$ *повсюду въ интервалѣ* $(\alpha,\ \beta)$. *Если рядъ (4) сходится равномѣрно и если* $f(x)$ *ограниченная функція, то для нея рядъ (3) будетъ рядомъ Fourier, т. е.*

$$a_n=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x).u_n(x).dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)».$$

И въ этомъ случаѣ, если въ нѣкоторомъ приводимомъ множествѣ точекъ рядъ (3) не суммируемъ или, оставаясь суммируемымъ, не обладаетъ суммой, заключенной въ конечныхъ предѣлахъ, то при добавочномъ условіи $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ теорема III остается справедливой:

Теорема IV. «*Пусть рядъ (3) суммируемъ и обладаетъ суммой $f(x)$ всюду въ интервалѣ (α, β) за исключеніемъ нѣкотораго приводимаго множества точекъ, причемъ $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$. Если функція $f(x)$ ограниченная, то*

$$a_n = \int_\alpha^\beta f(x) . u_n(x) . dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)».$$

Эти четыре теоремы будутъ доказаны сперва для Sturm-Liouville'вской системы функцій

$$v_1(z),\ v_2(z),\ v_3(z), \dots\ v_n(z) \dots, \tag{II}$$

получаемой изъ (I) подстановкой

$$z = \int^x [p(x)]^{-\frac{1}{2}} . dx \qquad v(z) = u(x) . \sqrt[4]{p(x)} \tag{5}$$

и нормированной такъ, что $\int_0^1 v_n^2(z) . dz = 1$, а затѣмъ ихъ легко перенести на систему (I). При подстановкѣ (5) дифференціальное уравненіе (1) переходитъ въ

$$\frac{d^2v}{dz} + Q(z) . v + \lambda v = 0 \tag{6}$$

и пограничныя условія (2) въ

$$\frac{dv}{dz} - h . v = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dz} + H . v = 0 \text{ при } z = \pi. \tag{7}$$

Для упрощенія принято $\int_\alpha^\beta [p(x)]^{-\frac{1}{2}} . dx = \pi$, что впрочемъ легко достигается умноженіемъ независимаго перемѣннаго; постоянныя h и H легко выразить черезъ h' и H'. Функція $Q(z)$, выражающаяся легко черезъ $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ и $q(x)$, также аналитическая.

§ 1.

Доказательство этихъ теоремъ для системы функцій (II) опирается на слѣдующую лемму, представляющую обобщеніе относящейся къ суммируемымъ тригонометрическимъ рядамъ леммы Fejér'а [1]):

Лемма «*Если рядъ*

$$a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + \ldots + a_n v_n(z) + \ldots \tag{1}$$

суммируемъ съ суммой $f(z)$ *повсюду въ интервалѣ* (z_0, z_1), *то непрерывная функція* $\Phi(z)$, *опредѣляемая рядомъ*

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n . v_n(z)}{\lambda_n^2} = \frac{a_1 . v_1(z)}{\lambda_1^2} + \frac{a_2 . v_2(z)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{a_n . v_n(z)}{\lambda_n^2} + \ldots \tag{2}$$

сходящимся абсолютно и равномѣрно, обладаетъ во всемъ интервалѣ (z_0, z_1) *свойствомъ*:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^4 \Phi(z)}{\delta^4} = \lim_{\delta=0} \frac{\Phi(z+2\delta) - 4\Phi(z+\delta) + 6\Phi(z) - 4\Phi(z-\delta) + \Phi(z-2\delta)}{\delta^4} =$$

$$= f(z) - \{Q''(z) - [Q(z)]^2\} . \Phi(z) - 2Q'(z) . \Phi''(z) - 2Q(z) . F(z) \quad z_0 \leq z \leq z_1\text{»} \tag{3}$$

причемъ $F(z)$ обозначаетъ сумму сходящагося ряда

$$F(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n . v_n(z)}{\lambda_n} = -\frac{a_1 . v_1(z)}{\lambda_1} - \ldots - \frac{a_n . v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \tag{4}$$

Изъ суммируемости ряда (1) слѣдуетъ [2]), что во всемъ интервалѣ (z_0, z_1)

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n . v_n(z)}{n} = 0$$

и слѣдовательно [3])

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = 0. \tag{5}$$

---

[1]) *L. Fejér*. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann. B. 58, c. 68-69.

[2]) *L. Fejér*, l. c. стр. 63.

[3]) См. *A. Haar*, l. c. § 2 стр. 47.

Сходимость въ интервалѣ (z_0, z_1) ряда

$$\sum_1^\infty \frac{a_n . v_n(z)}{n} = \frac{a_1 . v_1(z)}{1} + \frac{a_2 . v_2(z)}{2} + \ldots + \frac{a_n . v_n(z)}{n} + \ldots$$

также является слѣдствіемъ [1]) суммируемости ряда (1), изъ чего съ помощью асимптотической формулы [2])

$$\lambda_n = \left(n + \frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma'_n}{n^2}\right)^2, \tag{6}$$

въ которой числа γ и γ'_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ по абсолютной величинѣ меньше нѣкотораго постояннаго положительнаго числа, слѣдуетъ a fortiori сходимость ряда (4). Изъ той-же формулы (6) вытекаетъ сходимость ряда $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ и слѣдовательно, принимая во вниманіе асимптотическую формулу [2])

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \cos nz . \left(1 + \frac{\alpha_n(z)}{n^2}\right) + \sin nz \left(\frac{\beta(z)}{n} + \frac{\gamma_n(z)}{n^2}\right) \tag{7}$$

въ которой функціи $\alpha_n(z)$, $\beta(z)$ и $\gamma_n(z)$ по абсолютной величинѣ при всякомъ значеніи индекса n и для любого z въ интервалѣ $(0, \pi)$ меньше нѣкоторой постоянной величины, мы съ помощью (5) легко убѣждаемся въ абсолютной и равномѣрной сходимости ряда (2).

Составивъ теперь по формулѣ

$$\begin{aligned} \Delta_\delta^4[f(z) . \varphi(z)] = f(z) . \Delta_\delta^4 \varphi(z) + 2 . [f(z+\delta) - f(z)] . [\Delta_\delta^2 \varphi(z+\delta) - \Delta_\delta^2 \varphi(z)] + \\ + 2 . [f(z) - f(z-\delta)] . [\Delta_\delta^2 \varphi(z) - \Delta_\delta^2 \varphi(z-\delta)] + \Delta_\delta^2 f(z+\delta) . \Delta_\delta^2 \varphi(z+\delta) + \\ + 4 \Delta_\delta^2 f(z) . \Delta_\delta^2 \varphi(z) + \Delta_\delta^2 f(z-\delta) . \Delta_\delta^2 \varphi(z-\delta) + \\ + 2 . [\varphi(z) - \varphi(z-\delta)] . [\Delta_\delta^2 f(z) - \Delta_\delta^2 f(z-\delta)] + \\ + 2[\varphi(z+\delta) - \varphi(z)] . [\Delta_\delta^2 f(z+\delta) - \Delta_\delta^2 f(z)] + \varphi(z) . \Delta_\delta^4 f(z) \end{aligned}$$

выраженіе

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\lambda_n^2} . \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} = \frac{a_n}{\lambda_n^2} . \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \frac{\Delta_\delta^4 \left[\cos n\zeta . \left(1 + \frac{\alpha_n(\zeta)}{n^2}\right)\right]}{\delta^4} + \\ + \frac{a_n}{\lambda_n^2} . \frac{\Delta_\delta^4 \left[\sin n\zeta . \left(\frac{\beta(\zeta)}{n} + \frac{\gamma_n(\zeta)}{n^2}\right)\right]}{\delta^4} \end{aligned}$$

---

[1]) См. *M. Riesz*, l. c. стр. 74.

[2]) *Hobson*. Proceedings of the London Mathem. Soc. Ser. 2. Vol. 6 p. 378.

гдѣ ζ обозначаетъ какую-нибудь опредѣленную точку интервала (z_0, z_1), мы легко получимъ:

$$\frac{a_n}{\lambda_n^2} \cdot \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} = a_n \cdot v_n(\zeta) \cdot \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^4 + a_n \cdot \Psi_n(\zeta, \delta) \tag{8}$$

гдѣ

$$\Psi_n(\zeta, \delta) = \left(\frac{n^4}{\lambda_n^2} - 1\right) \cdot v_n(\zeta) \cdot \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^4 - \frac{4n}{\lambda_n^2} \cdot \left[n \cdot \cos n\zeta \cdot \frac{\beta(\zeta+\delta) - \beta(\zeta-\delta)}{2\delta} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin n\zeta \cdot \frac{\alpha_n(\zeta+\delta) - \alpha_n(\zeta-\delta)}{2\delta} + \cos n\zeta \cdot \frac{\gamma_n(\zeta+\delta) - \gamma_n(\zeta-\delta)}{2\delta}\right] \cdot \cos\frac{n\delta}{2} \cdot \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^3 -$$

$$- \frac{2(1 + 2\cos n\delta)}{\lambda_n^2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos n\zeta \frac{\Delta_\delta^2 \alpha_n(\zeta)}{\delta^2} + \sin n\zeta \cdot \left(n \cdot \frac{\Delta_\delta^2 \beta(\zeta)}{\delta^2} + \frac{\Delta_\delta^2 \gamma_n(\zeta)}{\delta^2}\right)\right] \cdot \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^2 -$$

$$- \frac{4}{n\lambda_n^2} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin n\zeta \cdot \frac{\Delta_\delta^2 \alpha_n(\zeta+\delta) - \Delta_\delta^2 \alpha_n(\zeta-\delta)}{2\delta^3} - \right.$$

$$\left. - \cos n\zeta \cdot \left(n \cdot \frac{\Delta_\delta^2 \beta(\zeta+\delta) - \Delta_\delta^2 \beta(\zeta-\delta)}{2\delta^3} + \frac{\Delta_\delta^2 \gamma_n(\zeta+\delta) - \Delta_\delta^2 \gamma_n(\zeta-\delta)}{2\delta^3}\right)\right] \cdot \left(\frac{\sin 2n\delta}{2n\delta}\right) +$$

$$+ \frac{\cos 2n\delta}{n^2 \cdot \lambda_n^2} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos n\zeta \cdot \frac{\Delta_\delta^4 \alpha_n(\zeta)}{\delta^4} + \sin n\zeta \cdot \left(n \cdot \frac{\Delta_\delta^4 \beta(\zeta)}{\delta^4} + \frac{\Delta_\delta^4 \gamma_n(\zeta)}{\delta^4}\right)\right].$$

Рядъ $\sum\limits_1^\infty a_n \cdot \Psi_n(\zeta, \delta)$ сходится при всякомъ отличномъ отъ нуля δ т. к. въ этомъ случаѣ (см. (8)) сходятся ряды

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2} \cdot \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} \quad \text{и} \quad \sum_1^\infty a_n \cdot v_n(\zeta) \cdot \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^4$$

(послѣдній по леммѣ Fejér'a) [1]).

---

[1]) Fejér. l. c. § 2.

Обозначимъ теперь

$$\lim_{\delta=0} \Psi_n(\zeta,\delta) = \psi_n(\zeta) = \left(\frac{n^4}{\lambda_n^2} - 1\right) v_n(\zeta) - \frac{4n}{\lambda_n^2}\left[n.\cos n\zeta.\beta'(\zeta) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin n\zeta.\alpha_n'(\zeta) + \right.$$

$$\left. + \cos n\zeta.\gamma_n'(\zeta)\right] - \frac{6}{\lambda_n^2}\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\cos n\zeta\,\alpha_n''(\zeta) + \sin n\zeta.[n\beta''(\zeta) + \gamma_n''(\zeta)]\right] -$$

$$- \frac{4}{n\lambda_n^2}\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\sin n\zeta.\alpha_n'''(\zeta) - \cos n\zeta.[n\beta'''(\zeta) + \gamma_n'''(\zeta)]\right] +$$

$$+ \frac{1}{n^2.\lambda_n^2}\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\zeta.\alpha_n^{(\mathrm{IV})}(\zeta) + \sin n\zeta.[n\beta^{(\mathrm{IV})}(\zeta) + \gamma_n^{(\mathrm{IV})}(\zeta)]\right]$$

и докажемъ сходимость ряда $\sum_1^\infty a_n.\psi_n(\zeta)$. Составимъ съ этой цѣлью выраженіе $\frac{1}{\lambda_n^2}\cdot\frac{d^4 v_n(z)}{dz^4}$, пользуясь асимптотической формулой (7):

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\cdot\frac{d^4 v_n(z)}{dz^4} = v_n(z) + \psi_n(z).$$

Изъ дифференціальнаго уравненія мы имѣемъ:

$$\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2} = -[Q(z) + \lambda_n].v_n(z)$$

слѣдовательно

$$\psi_n(z) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{d^2}{dz^2}\{[Q(z)+\lambda_n].v_n(z)\} - v_n(z) = \frac{2Q(z).v_n(z)}{\lambda_n} - \frac{2Q'(z).v_n'(z)}{\lambda_n{}^2} +$$

$$+ [(Q(z))^2 - Q''(z)].\frac{v_n(z)}{\lambda_n^2}\quad. \tag{9}$$

Далѣе разсмотримъ рядъ $\sum_1^\infty \frac{a_n v_n'(z)}{\lambda_n^2}$; съ помощью асимптотической формулы [1])

$$v_n'(z) = \frac{dv_n(z)}{dz} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nz.\left(n + \frac{\delta_n(z)}{n}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz.\left(h - \alpha z + \frac{\varepsilon_n(z)}{n}\right)$$

мы, принимая во вниманіе (5), убѣждаемся въ абсолютной и равномѣрной сходимости ряда $\sum_1^\infty \frac{a_n.v_n'(z)}{\lambda_n^2}$ и такимъ образомъ:

$$\Phi'(z) = \frac{d}{dz}\left(\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n^2}\right) = \sum_1^\infty \frac{a_n v_n'(z)}{\lambda_n^2}$$

[1]) *Hobson*. l. c. стр. 378.

Теперь изъ (9) ясно, что рядъ $\sum\limits_1^\infty a_n \psi_n(z)$ сходится и поэтому

$$\lim_{\delta=0} \sum_1^\infty a_n \Psi_n(\zeta,\ \delta) = \sum_1^\infty a_n \cdot \psi_n(\zeta) = 2 \cdot Q(\zeta) \sum_1^\infty \frac{a_n \cdot v_n(\zeta)}{\lambda_n} -$$

$$-2Q'(\zeta) \cdot \sum_1^\infty \frac{a_n \cdot v_n'(\zeta)}{\lambda_n^2} + [(Q(\zeta))^2 - Q''(\zeta)] \cdot \sum_1^\infty \frac{a_n \cdot v_n(\zeta)}{\lambda_n^2} = \qquad (10($$

$$= -2 \cdot Q(\zeta) \cdot F(\zeta) - 2Q'(\zeta) \cdot \Phi'(\zeta) + [(Q(\zeta))^2 - Q''(\zeta)] \cdot \Phi(\zeta).$$

Составивъ по (8) выраженіе

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2} \cdot \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} = \sum_1^\infty a_n \cdot v_n(\zeta) \cdot \left(\frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}} \right)^4 + \sum_1^\infty a_n \Psi_n(\zeta,\ \delta)$$

мы замѣчаемъ, что по леммѣ Fejèr'a [1])

$$\lim_{\delta=0} \sum_1^\infty a_n \cdot \ (\zeta) \left(\frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}} \right)^4 = f(\zeta) \qquad (11)$$

слѣдовательно существуетъ и $\lim\limits_{\delta=0} \dfrac{\Delta_\delta^4 \Phi(\zeta)}{\delta^4}$, равный по (10) и (11):

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^4 \Phi(\zeta)}{\delta^4} = \lim_{\delta=0} \sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2} \cdot \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} = \lim_{\delta=0} \sum_1^\infty a_n \cdot v_n(\zeta) \left(\frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}} \right)^4 +$$

$$+ \lim_{\delta=0} \sum_1^\infty a_n \cdot \Psi_n(\zeta, \delta) = f(\zeta) - 2 \cdot Q(\zeta) \cdot F(\zeta) - 2Q'(\zeta) \cdot \Phi'(\zeta) - [Q''(\zeta) - (Q(\zeta))^2] \cdot \Phi(\zeta).$$

и такъ какъ ζ любая точка интервала суммируемости (z_0, z_1), то очевидно

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^4 \Phi(z)}{\delta^4} = f(z) - 2Q(z) \cdot F(z) - 2Q'(z) \cdot \Phi'(z) - [Q''(z) - (Q(z))^2] \cdot \Phi(z) \quad {\scriptstyle z_0 \leq z \leq z_1} \qquad (12)$$

Выведемъ теперь изъ доказанной нами леммы формулу необходимую намъ въ дальнѣйшемъ: лемма предполагаетъ лишь суммируемость ряда (1) съ суммой $f(z)$, прибавимъ къ этому допущеніе равномѣрной

---

[1]) *L. Fejèr*. l. c. § 2 стр. 62.

сходимости ряда (4) и предположеніе, что $f(z)$—функція ограниченная; въ такомъ случаѣ $\Phi(z)$ удовлетворяетъ условіямъ слѣдующей теоремы M. Riesz'a [1]).

«*Если $\Phi(z)$ имѣетъ повсюду въ нѣкоторомъ интервалѣ обобщенную четвертую производную $\varphi(z)$ и непрерывную вторую производную $\Phi''(z)$, причемъ $\varphi(z)$ всегда остается въ конечныхъ границахъ, то*

$$\Phi''(z) = \int_0^z\int_0^\vartheta \varphi(t)\,.\,dt\,.\,d\vartheta + Az + B$$

причемъ A и B въ этомъ интервалѣ постоянны».

Въ нашемъ случаѣ $\Phi(z)$ въ интервалѣ (z_0, z_1) суммируемости ряда (1) отвѣчаетъ первому требованію теоремы; далѣе благодаря предположенію равномѣрной сходимости ряда (4) ея вторая производная непрерывна:

$$\Phi''(z) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n^2}\right) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2}\,.\,\frac{d^2\,v_n(z)}{dz^2} = -\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n} - Q(z)\,.\sum_1^\infty \frac{a_n\,v_n(z)}{\lambda_n^2}$$

т. е.

$$\Phi''(z) = F(z) - Q(z)\,.\,\Phi(z) \tag{13}$$

и наконецъ послѣднее требованіе теоремы M. Riesz'a удовлетворяется предположеніемъ, что $f(z)$—функція ограниченная, т. к. въ данномъ случаѣ:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^4\,\Phi(z)}{\delta^4} = \varphi(z) = f(z) - 2Q(z).F(z) - 2.Q'(z).\Phi'(z) - [Q''(z) - (Q(z))^2].\,\Phi(z)$$

что, пользуясь (13), мы перепишемъ такъ

$$\varphi(z) = f(z) - Q(z)\,.\,F(z) - \frac{d^2}{dz^2}\,[\Phi(z)\,.\,Q(z)]$$

Такимъ образомъ, примѣняя эту теорему, мы получаемъ:

$$\Phi''(z) = F(z) - Q(z)\,.\,\Phi(z) = \int_0^z\int_0^\vartheta \left\{f(t) - Q(t)\,.\,F(t) - \frac{d^2}{dt^2}\,[\Phi(t)\,.\,Q(t)]\right\} dt\,.\,d\vartheta + az + b$$

т. е.

$$F(z) = \int_0^z\int_0^\vartheta [f(t) - Q(t)\,.\,F(t)]\;dt\,.\,d\vartheta + Az + B. \tag{14}$$

---

[1]) *M. Riesz*. l. c. стр. 67.

Подготовимъ еще обобщеніе 2-ой теоремы Riemann'a [1]) на Sturm-Liouville'вскіе ряды; оно формулируется такъ:

«*Если коэффиціенты ряда* $\sum\limits_1^\infty a_n \,.\, v_n(z)$ *стремятся съ возрастаніемъ индекса* n *къ нулю т. е.* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, *то рядъ*

$$F(z) = -\frac{a_1 \,.\, v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2 \,.\, v_2(z)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n \cdot v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \qquad (4)$$

сходится равномѣрно и

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 F(z)}{\delta} = \lim_{\delta=0} \frac{F(z+\delta) - 2F(z) + F(z-\delta)}{\delta} = 0».$$

Возьмемъ асимптотическую формулу (7) въ упрощенномъ видѣ

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \,.\, \cos nz + \frac{\beta(z) \,.\, \sin nz}{n} + \frac{\omega_n(z)}{n^2} \qquad (15)$$

причемъ функціи $\omega_n(z)$ по абсолютной величинѣ при всякомъ значеніи n и для любого z меньше нѣкоторой постоянной величины.

Ряды

$$f_1(z) = -\sum_1^n \frac{a_n \,.\, \cos nz}{\lambda_n}, \quad f_2(z) = -\sum_1^\infty \frac{a_n \,.\, \sin nz}{n\lambda_n} \quad \text{и} \quad f_3(z) = -\sum_1^\infty \frac{a_n \,.\, \omega_n(z)}{n^2 \lambda_n}$$

сходятся благодаря $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ абсолютно и равномѣрно т. к. рядъ $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ какъ извѣстно сходится; слѣдовательно сходится равномѣрно и рядъ (4) и мы имѣемъ:

$$F(z) = f_1(z) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta(z) \,.\, f_2(z) + f_3(z)$$

По 2-ой теоремѣ Riemann'a мы заключаемъ:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 f_1(z)}{\delta} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 f_2(z)}{\delta} = 0 \qquad (16)$$

---

[1]) *Riemann* Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe; Gesammelte Werke (1892) стр. 227.

Составимъ далѣе выраженіе

$$\frac{\Delta_\delta^2[\beta(z).f_2(z)]}{\delta}=\beta(z+\delta).\frac{\Delta_\delta^2 f_2(z)}{\delta}+f_2(z).\frac{\Delta_\delta^2\beta(z)}{\delta}+$$

$$+2\,[f_2(z)-f_2(z-\delta)].\frac{\beta(z+\delta)-\beta(z-\delta)}{2\delta}$$

т. к. $\beta(z)$ дважды непрерывно дифференцируемая функція, то

$$\lim_{\delta=0}\frac{\Delta_\delta^2\beta(z)}{\delta}=0$$

и благодаря непрерывности $f_2(z)$ ясно, что

$$\lim_{\delta=0}\frac{\Delta_\delta^2[\beta(z).f_2(z)]}{\delta}=0 \tag{17}$$

Вставивъ теперь въ дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}+[Q(z)+\lambda_n].v_n(z)=0$$

вмѣсто $v_n(z)$ асимптотическое выраженіе (15), мы получаемъ

$$\frac{1}{n^2}.\frac{d^2\omega_n(z)}{dz^2}=v_n(z).[n^2-\lambda_n-Q(z)]-\frac{\beta''(z).\sin nz}{n}-2\beta'(z).\cos nz-\omega_n(z)\,;$$

т. к. по формулѣ (6) $n^2-\lambda_n=-2\gamma-\frac{\gamma_n'}{n}$ (числа γ и γ_n' по абсолютной величинѣ меньше постояннаго числа), то изъ этого выраженія мы выводимъ слѣдствіе:

$$\left|\frac{1}{n^2}.\frac{d^2\omega_n(z)}{dz^2}\right|<\mu$$

гдѣ μ—постоянное число, а изъ этого по теоремѣ Hölder'a [1]) вытекаетъ, что и

$$\left|\frac{1}{n^2}.\frac{\Delta_\delta^2\omega_n(z)}{\delta^2}\right|<\mu \quad \text{т. е.} \quad \left|\frac{\Delta_\delta^2\omega_n(z)}{n^2\delta}\right|<\mu\delta. \tag{18}$$

Рядъ

$$\sum_1^\infty\frac{a_n.\Delta_\delta^2\omega_n(z)}{n^2.\lambda_n}$$

---

[1]) *Hölder.* Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. Mathem. Ann. B. 24 стр. 183.

сходится абсолютно и равномѣрно и поэтому, примѣняя (18):

$$\left|\frac{\Delta_\delta^2 f_3(z)}{\delta}\right| \leqq \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{\lambda_n} \cdot \left|\frac{\Delta_\delta^2 \omega_n(z)}{n^2 . \delta}\right| < \mu . \delta . \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{\lambda_n}$$

Рядъ $\sum\limits_1^\infty \frac{|a_n|}{\lambda_n}$ сходится, т. к. $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, и рядъ $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ сходится, и поэтому

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 f_3(z)}{\delta} = 0. \tag{19}$$

Складывая (16), (17) и (19), мы и получаемъ

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 F(z)}{\delta} = 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 2.

Обобщеніе теоремы Cantor'a.

$$a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + \ldots + a_n v_n(z) + \ldots \tag{1}$$

$$F(z) = -\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n} = -\frac{a_1 v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2 v_2(z)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \tag{2}$$

Теорема I. «*Пусть рядъ (1) суммируемъ повсюду въ интервалѣ (0, π) съ суммой равной нулю, если рядъ (2) сходится равномѣрно, то всѣ коэффиціенты ряда (1) равны нулю*».

Теорема II. «*При допущеніи нѣкотораго приводимаго множества точекъ въ интервалѣ (0, π), въ которыхъ рядъ (1) или не былъ бы суммируемъ или оставаясь суммируемымъ, обладалъ бы суммой отличной отъ нуля теор. I остается справедливой, если притомъ* $\lim a_n = 0$».

Доказательство теор. I. Примѣнимъ формулу (14) § 1-го; въ нашемъ случаѣ $f(z) \equiv 0$ и потому

$$F(z) = -\int_0^z \int_0^\vartheta Q(t) . F(t) dt . d\vartheta + Az + B$$

гдѣ A и B постоянны во всемъ интервалѣ (0, π). Такъ какъ $Q(t)$ непрерывна, то изъ этого мы заключаемъ, что $\frac{d^2 F(z)}{dz^2}$ непрерывна и $F(z)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + Q(z) . F(z) = 0. \tag{3}$$

По предположенію рядъ (2) сходится равномѣрно и слѣдовательно

$$-\frac{a_n}{\lambda_n}=\int\limits_0^{\pi} F(z).v_n(z).dz. \qquad (n=1,\,2,\,3,\ldots)$$

Изъ дифференціальнаго уравненія мы имѣемъ:

$$-\lambda_n.v_n(z)=\frac{d^2 v_n(z)}{dz}+Q(z).v_n(z)$$

и такимъ образомъ

$$a_n=\int\limits_0^{\pi} F(z).\left[\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}+Q(z).v_n(z)\right].dz$$

Это выраженіе съ помощью (3) и пограничныхъ условій

$$v'_n(0)-h.v_n(0)=0 \quad \text{и} \quad v'_n(\pi)+H.v_n(\pi)=0 \qquad (n=1,\,2,\,3\ldots.)$$

преобразуется въ

$$a_n=\int\limits_0^{\pi}\left[F(z).\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}-v_n(z).\frac{d^2 F(z)}{dz^2}\right]dz=\left[F(z).\frac{dv_n(z)}{dz}-v_n(z)\frac{dF(z)}{dz}\right]_0^{\pi}$$

и далѣе

$$a_n=-C.v_n(\pi)+D.v_n(0) \qquad (n=1,\,2,\,3,\ldots)$$

причемъ

$$C=F'(\pi)+H.F(\pi) \text{ и } D=F'(0)-h.F(0).$$

Асимптотическая формула (7) § 1 даетъ намъ:

$$v_n(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\left(1+\frac{\alpha_n(0)}{n^2}\right) \quad \text{и} \quad v_n(\pi)=(-1)^n.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+\frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right) \qquad (4)$$

и значитъ

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[(D-(-1)^n.C)+\frac{1}{n^2}.(D.\alpha_n(0)-(-1)^n.C.\alpha_n(\pi))\right] \quad (n=1,\,2,\,3\ldots) \qquad (5)$$

По (4) и (5) мы имѣемъ:

$$\sum_1^{\infty} a_n.v_n(0)=\frac{2}{\pi}.\sum_1^{\infty}[D-(-1)^n.C]+\frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n^2}$$

причемъ числа ε_n по абсолютной величинѣ меньше нѣкотораго положительнаго числа. Рядъ $\sum\limits_1^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n^2}$ сходится и значитъ суммируемъ, поэтому изъ суммируемости ряда (1) въ точкѣ $z=0$ вытекаетъ, что рядъ

$$\sum_1^{\infty}[D-(-1)^n.C]$$

долженъ также быть суммируемымъ и слѣдовательно [1]) для него $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n}=0$. Вычисляя мы получаемъ $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n}=D$ и значитъ необходимо $D=0$ иначе рядъ (1) не былъ-бы суммируемъ въ точкѣ $z=0$. Если $D=0$, то (5) даетъ намъ:

$$a_n=(-1)^{n+1}C.\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\left(1+\frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right) \qquad {\scriptstyle (n=1,\,2,\,3,\ldots)} \qquad (6)$$

и изъ (4) и (6) мы имѣемъ:

$$\sum_1^\infty a_n\cdot v_n(\pi)=-\frac{2}{\pi}\cdot C\sum_1^\infty\left(1+\frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right)^2 \text{ и, т. к. рядъ } \sum_1^\infty\left(1+\frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right)^2$$

существенно расходящійся, ясно, что для суммируемости ряда (1) въ точкѣ $z=\pi$ необходимо должно быть $C=0$ и такимъ образомъ доказано, что

$$a_n=0 \qquad {\scriptstyle (n=1,\,2.\,3,\ldots,)} \qquad \text{q. e. d.}$$

Доказательство теор. II. Во всякомъ частномъ интервалѣ, не содержащемъ исключительныхъ точекъ, въ которыхъ рядъ (1) не былъ-бы суммируемъ съ суммой равной нулю, мы можемъ примѣнить нашу лемму и имѣемъ для такого интервала

$$F(z)=-\int_0^z\int_0^\vartheta Q(t).F(t).dt\;d\vartheta+A'z+B'$$

но въ другомъ такомъ интервалѣ, сосѣднемъ съ первымъ, мы имѣемъ

$$F(z)=-\int_0^z\int_0^\vartheta Q(t).F(t).dt.d\vartheta+A''z+B''$$

т. е. постоянныя уже другія; но $\lim\limits_{n=\infty}a_n=0$ и потому

$$\lim_{\delta=0}\frac{\Delta_\delta^2F(z)}{\delta}=0$$

а изъ этого и изъ непрерывности функціи $F(z)$ (въ случаѣ $\lim a_n=0$ рядъ (2) сходится равномѣрно) слѣдуетъ, что $A'=A''$ и $B'=B''$. Разсуждая такимъ образомъ, мы убѣждаемся, что числа A и B въ формулѣ

$$F(z)=-\int_0^z\int_0^\vartheta Q(t).F(t).dt.d\vartheta+Az+B$$

---

[1]) *L. Fejèr.* l. c. стр. 63.

постоянны для всего интервала $(0, \pi)$. Теперь уже примѣнимо то разсужденіе, путемъ котораго при доказательствѣ теор. I мы получили формулу (5). Итакъ возьмемъ формулу (5); но теперь $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ и кромѣ того ясно, что

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2}[D.\alpha_n(0) - (-1)^n.C.\alpha_n(\pi)] = 0$$

и такимъ образомъ изъ формулы (5) получаемъ

$$\lim_{n=\infty}[D - (-1)^n.C] = 0 \quad \text{т. е.} \quad D = C = 0$$

и поэтому

$$a_n = 0 \quad (n=1, 2, 3\ldots,) \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 3.

Обобщеніе теоремы Du-Bois-Reymond'а.

$$a_1.v_1(z) + a_2.v_2(z) + \ldots + a_n.v_n(z) + \ldots \tag{1}$$

$$F(z) = -\sum_1^\infty \frac{a_n.v_n(z)}{\lambda_n} = -\frac{a_1.v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2.v_2(z)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n.v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \tag{2}$$

Теорема III. «*Пусть рядъ (1) суммируемъ повсюду* въ интервалѣ $(0, \pi)$ съ суммой $f(z)$, а рядъ (2) сходится равномѣрно. Если $f(z)$— ограниченная функція, то рядъ (1) будетъ ея рядомъ Fourier т. е.*

$$a_n = \int_0^\pi f(z).v_n(z).dz\text{»} \quad (n=1, 2, 3,\ldots)$$

Теорема IV. «*Если $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, то теор. III остается справедливой и при допущеніи нѣкотораго приводимаго множества точекъ, въ которыхъ или рядъ (1) не былъ-бы суммируемъ, или его сумма не лежала бы въ конечныхъ границахъ*».

Доказательство теор. III. Изъ равномѣрной сходимости ряда (2) слѣдуетъ:

$$-\frac{a_n}{\lambda_n} = \int_0^\pi F(z).v_n(z)\ dz \qquad (n=1, 2, 3,\ldots,)$$

т. е., принимая во вниманіе дифференціальное уравненіе для $v_n(z)$,

$$a_n = \int_0^\pi F(z).Q(z).v_n(z)\,dz + \int_0^\pi F(z).\frac{d^2v_n(z)}{dz^2}.dz. \tag{3}$$

Примѣнимъ формулу (14) § 1

$$F(z)=\int_0^z\int_0^\vartheta [f(t)-Q(t).F(t)].dt.d\vartheta+Az+B \qquad (0\leq z\leq\pi)$$

и такимъ образомъ:

$$\int_0^\pi F(z)\frac{d^2v_n(z)}{dz^2}dz=\int_0^\pi\int_0^z\int_0^\vartheta [f(t)-Q(t).F(t)].\frac{d^2v_n(z)}{dz^2}.dt.d\vartheta.dz+$$

$$+\int_0^\pi (Az+B)\frac{d^2v_n(z)}{dz^2}.dz;$$

т. к. всѣ подъинтегральныя функціи ограничены, то въ тройномъ интегралѣ можно [1]) измѣнить порядокъ интегрированія, и интегрируя сперва по z потомъ по ϑ, мы получаемъ:

$$\int_0^\pi\int_0^z\int_0^\vartheta [f(t)-Q(t).F(t)].\frac{d^2v_n(z)}{dz^2}.dt.d\vartheta.dz=$$

$$=\int_0^\pi [f(t)-Q(t).F(t)]\,dt.\int_t^\pi d\vartheta\int_\vartheta^\pi\frac{d^2v_n(z)}{dz^2}.dz=v_n'(\pi).\int_0^\pi\int_0^\vartheta [f(t)-Q(t).F(t)].dtd\vartheta-$$

$$-\int_0^\pi [f(t)-Q(t).F(t)]dt\int_t^\pi\frac{dv_n(\vartheta)}{d\vartheta}d\vartheta=\int_0^\pi f(t).v_n(t).dt-\int_0^\pi F(t).Q(t).v_n(t).dt+$$

$$+a.v_n'(\pi)-bv_n(\pi)$$

мы обозначили

$$a=\int_0^\pi\int_0^\vartheta [f(l)-Q(t).F(t)].dt.d\vartheta,\quad b=\int_0^\pi [f(t)-Q(t).f(t)]\,dt.$$

Кромѣ того

$$\int_0^\pi (Az+B)\frac{d^2v_n(z)}{dz^2}dz=(A\pi+B).v_n'(\pi)-B.v_n'(0)-Av_n(\pi)+Av_n(0);$$

благодаря

$$v_n'(0)-h.v_n(0)=0 \quad \text{и} \quad v_n'(\pi)+Hv_n(\pi)=0$$

формула (3) принимаетъ видъ:

$$a_n=\int_0^\pi f(z).v_n(z).dz+C.v_n(\pi)+D.v_n(0)$$

---

[1]) *Lebesgue*. Intégrale, Aire, Longueur. (Ann. di mat. 1902).

постоянныя C и D легко выражаются черезъ a, b, h, H, A и B. Примѣняя формулы (4) § 2 мы окончательно имѣемъ:

$$a_n = \int_0^\pi f(z).v_n(z).dz + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left[(D+(-1)^n.C) + \frac{1}{n^2}(D.\alpha_n(0)+(-1)^n.C.\alpha_n(\pi)\right]$$

$$(n=1,2,3,\ldots) \qquad (4)$$

Разсмотримъ теперь суммируемый рядъ $\sum\limits_1^\infty a_n.v_n(0)$ и представимъ его съ помощью полученнаго для a_n выраженія и формулъ (4) § 2 въ видѣ:

$$\sum_1^\infty a_n v_n.(0) = \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\int_0^\pi f(z).v_n(z).dz + D + (-1)^n.C\right] + \sum_1^\infty \frac{\omega_n}{n^2}$$

причемъ числа ω_n по абсолютной величинѣ при всякомъ n меньше постояннаго числа. Рядъ $\sum\limits_1^\infty \frac{\omega_n}{n^2}$, какъ сходящійся, суммируемъ; слѣдовательно изъ суммируемости ряда $\sum\limits_1^\infty a_n v_n(0)$ вытекаетъ суммируемость ряда

$$\sum_1^\infty\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\int_0^\pi f(z).v_n(z)\,dz + D + (-1)^n.C\right]$$

и поэтому для него необходимо должно быть $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n}=0$. Вычислимъ же $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n}$; т. к.

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\pi f(z).v_n(z)\;dz = 0 \quad {}^{1}),$$

то, обозначивъ

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\int_0^\pi f(z).v_n(z).dz$$

мы можемъ для сколь угодно малаго ε подобрать такое N, чтобы при $n>N$ имѣло мѣсто неравенство $|\varepsilon_n|<\frac{\varepsilon}{2}$; и такъ

$$s_n = s_N + \varepsilon_{N+1} + \varepsilon_{N+2} + \ldots + \varepsilon_n + (n-N).D + \frac{(-1)^n-(-1)^N}{2}C \qquad (n>N)$$

значитъ

$$\left|\frac{s_n}{n} - D\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|s_N| + N.|D| + |C|}{n}$$

---

[1]) *A. Haar.* l. c. стр. 52.

и ясно, что при достаточно большомъ n

$$\left|\frac{s_n}{n} - D\right| < \varepsilon \quad \text{итакъ} \quad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = D$$

Такимъ образомъ выяснилось, что для суммируемости ряда (1) въ точкѣ $z = 0$ необходимо должно быть $D = 0$. Чтобы доказать, что для суммируемости ряда (1) въ точкѣ $z = \pi$ необходимо должно быть $C = 0$, достаточно примѣнить аналогичное разсужденіе къ ряду

$$\sum_1^\infty a_n v_n(\pi) = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \left[(-1)^n . \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz + (-1)^n . D + C\right] + \sum_1^\infty \frac{\omega_n'}{n^2} ,$$

замѣтивъ, что теперь C и D помѣнялись ролями. Такимъ образомъ, доказавъ, что $C = D = 0$, мы изъ (4) получаемъ

$$a_n = \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{q. e. d.}$$

Доказательство теор. IV. Точно также какъ въ доказательствѣ теоремы II-ой мы убѣждаемся въ томъ, что благодаря $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ въ

$$F(z) = \int_0^z \int_0^\vartheta [f(t) - Q(t) . F(t)] . dt . d\vartheta + Az + B$$

A и B постоянны во всемъ интервалѣ $(0, \pi)$ несмотря на допущеніе приводимаго множества исключительныхъ точекъ.

Рядъ (2) сходится равномѣрно, т. к. $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ и, примѣняя то-же разсужденіе какъ въ доказательствѣ теор. III, мы приходимъ къ выраженію (4) для a_n:

$$a_n = \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz + \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \left[(D + (-1)^n . C) + \frac{1}{n^2} (D . \alpha_n(0) + (-1)^n . C . \alpha_n(\pi))\right]$$

въ этомъ выраженіи

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} [D . \alpha_n(0) + (-1)^n . C . \alpha_n(\pi)] = 0$$

слѣдовательно и

$$\lim_{n=\infty} [D + (-1)^n . C] = 0 \qquad \text{т. е.} \quad D = C = 0$$

и такимъ образомъ:

$$a_n = \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{q. e. d.}$$

Всѣ вышедоказанныя теоремы теперь легко перенести на наиболѣе общую Sturm-Liouville'вскую систему функцій (I).

Итакъ пусть рядъ

$$a_1 . u_1(x) + a_2 . u_2(x) + \ldots + a_n . u_n(x) + \ldots \tag{5}$$

суммируемъ съ суммой равной нулю повсюду въ интервалѣ (α, β), причемъ рядъ

$$F(x) = -\frac{a_1 u_1(x)}{\lambda_1} - \frac{a_2 u_2(x)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n u_n(x)}{\lambda_n} - \ldots \tag{6}$$

сходится равномѣрно. Умноживъ каждый членъ этихъ рядовъ на $[p(x)]^{\frac{1}{4}}$ и совершивъ подстановку

$$z = \int_\alpha^x [p(x)]^{-\frac{1}{2}} dx \qquad v_n(z) = u_n(x) . [p(x)]^{\frac{1}{4}} \tag{7}$$

мы получаемъ ряды

$$a_1 . v_1(z) + a_2 v_2(z) + \ldots + a_n v_n(z) + \ldots \tag{8}$$

$$F_1(z) = -\frac{a_1 v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2 v_2(z)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \tag{9}$$

отличающіеся отъ рядовъ (5) и (6) лишь множителемъ $[p(x)]^{\frac{1}{4}}$, слѣдовательно рядъ (8) повсюду въ интервалѣ $(0, \pi)$ суммируемъ съ суммой равной нулю, и рядъ (9) сходится равномѣрно; по теоремѣ I-ой изъ этого слѣдуетъ

$$a_n = 0 \qquad \text{q. e. d.}$$

Пусть далѣе рядъ (5) суммируемъ съ суммой равной нулю во всемъ интервалѣ (α, β) за исключеніемъ нѣкотораго приводимаго множества точекъ и $\lim_{n=\infty} a_n = 0$; теперь къ ряду (8) примѣнима теор. II и опять

$$a_n = 0 \qquad \text{q. e. d.}$$

Пусть рядъ (5) суммируемъ повсюду въ итервалѣ (α, β) съ суммой $f(x)$ причемъ $f(x)$ — ограниченная функція, а рядъ (6) сходится равномѣрно; опять таки мы строимъ ряды (8) и (9), изъ которыхъ первый суммируемъ повсюду въ интервалѣ $(0, \pi)$ съ суммой $f_1(z) = f(x) . [p(x)]^{1/4}$ и второй $F_1(z)$ сходится равномѣрно.

Функція $f_1(z)$ ограниченная и потому по теор. III:

$$a_n = \int_0^\pi f_1(z) . v_n(z) . dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

т. к. $f_1(z)=f(x).[p(x)]^{1/4}$, то съ помощью (7) мы получаемъ

$$a_n=\int_\alpha^\beta f(x).u_n(x).dx \quad (n=1,2,3,\ldots) \text{ q. e. d.}$$

Если-же $\lim_{n=\infty} a_n=0$ и рядъ (5) имѣетъ въ интервалѣ суммируемости (α, β) нѣкоторое приводимое множество исключительныхъ точекъ, то къ ряду (8) примѣнима теор. IV и опять

$$a_n=\int_0^\pi f_1(z).v_n(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(x).u_n(x).dx \quad (n=1,2,3,\ldots) \text{ q. e. d.}$$

Къ этимъ теоремамъ добавимъ слѣдующее: если рядъ (5) суммируемъ методомъ среднихъ ариѳметическихъ k аго порядка [1], то изъ этого вытекаетъ [2], вопервыхъ его суммируемость методомъ среднихъ ариѳметическихъ любого большаго чѣмъ k порядка и вовторыхъ $\lim_{n=\infty}\frac{a_n.u_n(x)}{n^k}=0$ т. е. слѣдовательно $\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n^k}=0$. Изъ этого ясно, что при $0\leq k<1$ рядъ (5) суммируемъ и однократно, и рядъ (6) сходится равномѣрно, значитъ теоремы I и III примѣнимы и мы получаемъ полное обобщеніе теоремы Cantor'a и Du-Bois-Reymond'a безъ всякихъ добавочныхъ условій:

«Если рядъ (5) всюду въ интервалѣ (α, β) суммируемъ методомъ среднихъ ариѳметическихъ k-аго порядка, $0\leq k<1$, то при суммѣ равной нулю всѣ его коэффиціенты равны нулю, а при суммѣ, равной ограниченной функціи $f(x)$, рядъ (5) есть ея рядъ Фурье т. е.

$$a_n=\int_\alpha^\beta f(x).u_n(x)\,dx».$$

Какъ и для тригонометрическихъ рядовъ [3] при $k=1$, т. е. въ случаѣ однократной суммируемости ряда (5), остается открытымъ вопросъ о необходимости равномѣрной сходимости ряда (6), являющейся достаточнымъ условіемъ теоремъ I и III.

Москва

---

[1]) k—любое положительное число. См. опредѣленіе метода у Cesàro. Sur la multiplication des séries. Bull. de la Soc. Math. 14 (1890).

[2]) *Knopp*. Grenzwerthe von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldissertation. Berlin 1907.

[3]) *M. Riesz*. l. c. стр. 73. III.