Къ опредѣленію алгебраической области при помощи сравненій (съ приложеніемъ къ Абелевымъ уравненіямъ).

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра *Бориса Делоне*.

Въ 1880 году въ Извѣстіяхъ Берлинской Академіи появилась замѣтка Кронекера «Ueber die Irreducibilität von Gleichungen», въ которой Кронекеръ ставитъ вопросъ относительно плотностей простыхъ чиселъ, для которыхъ заданное сравненіе имѣетъ данное число раціональныхъ корней; онъ замѣтилъ, что если двѣ цѣлыя функціи имѣютъ одинаковое число рѣшеній, по всѣмъ простымъ числамъ, какъ по модулямъ, то онѣ, какъ уравненія, относятся къ одной и той же области Галуа. И Кронекеръ дѣлаетъ слѣдующее весьма важное замѣчаніе: ...«und es ist also (in ähnlicher Weise wie nach dem Cauchy'schen Satze eine Function durch ihre Randwerte bestimmt wird) mit blossen Congruenzbestimmungen der ganze Inbegriff der durch die Gleichung definierten algebraischen Irrationalitäten bestimmt.».

Вслѣдъ за тѣмъ, по указаніямъ Кронекера, Frobenius (Sitzb. der Berl. Akad. (1896) S. 688) вполнѣ разобралъ вопросъ о плотностяхъ и пришелъ къ слѣдующему результату: каждой циклической подгруппѣ группы области Галуа принадлежитъ въ этой области безконечно много простыхъ идеаловъ. Эту теорему можно доказать разсматривая выраженіе $\lim\limits_{s=1}[(s-1).\zeta_{\Omega}(s)]=h.\varkappa$ въ Дедекиндовской теоріи идеаловъ областей Галуа. Воспользовавшись этимъ результатомъ Frobenius'а, можно доказать слѣдующую лемму, которая открываетъ путь къ приложеніямъ приведенной замѣчательной мысли Кронекера.

Лемма. Норма области Ω_β тогда и только тогда заключается въ нормѣ области Ω_α, когда для всѣхъ тѣхъ простыхъ чиселъ q, для которыхъ имѣетъ мѣсто сравненіе $\alpha^q\equiv\alpha$ (мод. q), имѣетъ также мѣсто и сравненіе $\beta^q\equiv\beta$ (мод. q). Подъ нормой области мы понимаемъ область составленную присоединеніемъ къ заданной всѣхъ ея сопряженныхъ; норма области всегда область Галуа.

Цѣль настоящей замѣтки, отложивъ изложеніе намѣченныхъ теорій до болѣе удобнаго случая и воспользовавшись указанной общей леммой, дать приложеніе приведенной выше замѣчательной мысли Кронекера объ опредѣленіи области при помощи сравненій; а именно мы выведемъ знаменитую теорему Кронекера объ Абелевыхъ уравненіяхъ, состоящую въ томъ, что всякій корень Абелева уравненія (т. е. уравненія съ коммутативной группой) выражается раціонально черезъ нѣкоторый корень изъ единицы, воспользовавшись закономъ взаимности Ейзенштейна. Въ настоящей замѣткѣ мы выведемъ эту теорему лишь для того случая, когда степень n Абелева уравненія простое число.

Абель далъ [Oeuvres p. 489, (34)] слѣдующее выраженіе корня циклическаго уравненія n-той степени

$$x = \frac{1}{n}\left[A + \sqrt[n]{\omega_1} + \sqrt[n]{\omega_2} + \sqrt[n]{\omega_3} + \ldots + \sqrt[n]{\omega_{n-1}}\right]$$

причемъ тутъ ω цѣлыя числа области Ω_ζ, гдѣ $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Эти числа ω удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\omega_{/_1}^{\nu}\lambda_1^n = \omega_{/\nu}\lambda_2^n \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots n-1) \qquad (1)$$

(дальше, какъ и здѣсь, значкомъ $/_i$ мы будемъ обозначать, что въ числѣ изъ области Ω_ζ, ζ замѣнено ζ^i) причемъ λ_1 и λ_2 тоже цѣлыя числа изъ Ω_ζ. Теорема Кронекера будетъ доказана, если удастся показать, что $\sqrt[n]{\omega/_1}$ выражается раціонально черезъ нѣкоторый корень изъ единицы $e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Но $\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)^q \equiv \left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$ (мод. q), для тѣхъ и только тѣхъ простыхъ чиселъ, которыя заключаются въ прогрессіи $mx+1$ и слѣдовательно, по леммѣ, достаточно показать что для всѣхъ q такой прогрессіи $(\sqrt[n]{\omega})^q \equiv \sqrt[n]{\omega}$ (мод, q), или, что то же самое, что $\omega^{\frac{q-1}{n}} \equiv 1$ (мод. q).

Простой идеалъ $1-\zeta$ области Ω_ζ, какъ легко видѣть изъ (1), если напримѣръ положить $\nu = 2$, входитъ въ ω съ показателемъ, дѣлящимся на n. Положимъ поэтому $\omega = \overline{\omega}(1-\zeta)^{n\cdot\nu}$, гдѣ $\overline{\omega}$ уже не дѣлится на $1-\zeta$; $\overline{\omega}$ опять удовлетворяетъ уравненію вида

$$\omega_{/_1}^{\nu}\mu_1^n = \omega_{/\nu}\mu_2^n \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots n-1) \qquad (1')$$

Пусть

$$\bar{\omega}_{/1}^{\frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_1} \text{ (мод. } \varrho_{/1}) \tag{2}$$

$$\bar{\omega}_{/1}^{\frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_\nu} \text{ (мод. } \varrho_{/\nu}) \tag{3}$$

гдѣ ϱ простой идеалъ дѣлитель q (перваго порядка, т. к. q вида $nx+1$); изъ (3) получимъ

$$\bar{\omega}_{/\theta}^{\frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_\nu \theta} \text{ (мод. } \varrho_{/1}) \tag{4}$$

гдѣ θ наименьшій положительный корень сравненія $\nu.\theta \equiv 1$ (мод. n) но изъ (1'); $\bar{\omega}_{/1}^{\theta}\mu_1^n = \bar{\omega}_{/\theta}\mu_2^n$, или, если возвысить въ $\frac{q-1}{n}$ степень и принять во вниманіе теорему Ферма, получимъ $\bar{\omega}^{\theta \cdot \frac{q-1}{n}} \equiv \bar{\omega}_{\theta}^{\frac{q-1}{n}}$ (мод. ϱ_1), такимъ образомъ (4) замѣняемъ

$$\bar{\omega}_{/1}^{\theta \cdot \frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_\nu \theta} \qquad \text{(мод. } \varrho_{/1}) \tag{5}$$

а изъ (2) возвышая въ θ степень получаемъ

$$\bar{\omega}_{/1}^{\theta \cdot \frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_1 \cdot \theta} \qquad \text{(мод. } \varrho_{/1}) \tag{6}$$

сравнивая (5) и (6) мы видимъ что $b_1 = b_\nu$; такимъ образомъ мы видимъ что символъ $\left\{\frac{\omega}{\varrho_\nu}\right\}$ имѣетъ одно и то же значеніе для всѣхъ простыхъ идеаловъ ϱ_ν дѣлителей одного и того же простого числа q.

Всякое [1]) число области Ω_ζ можно превратить въ т. н. семипримарное умноженіемъ на соотвѣтственно подобранную степень ζ. Пусть $\bar{\bar{\omega}} = \bar{\omega}.\zeta^k$ семипримарное число. Пусть q вида $n^2.x+1$ тогда $\left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/\nu}}\right\} = \left\{\frac{\bar{\omega}}{\varrho_{/\nu}}\right\}$

Если $\left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{q}\right\} = \left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/1}}\right\}\left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/2}}\right\} \dots \left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{{}_{/n-1}}\right\} = \left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/1}}\right\}^{n-1} = +1$, то $\left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/1}}\right\} = +1$.

---

[1]) Всякое число взаимно простое съ $1-\zeta$; см. Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper S. 369.

Но по закону взаимности Эйзенштейна между семипримарнымъ числомъ области Ω_ζ и раціональнымъ простымъ числомъ имѣетъ мѣсто соотношеніе $\left\{\frac{\overline{\overline{\omega}}}{q}\right\}=\left\{\frac{q}{\overline{\overline{\omega}}}\right\}$; для всѣхъ же q вида $N(\overline{\omega}).x+1$, $\left\{\frac{q}{\overline{\overline{\omega}}}\right\}=+1$, и слѣдовательно $\left\{\frac{\overline{\overline{\omega}}}{q}\right\}=+1$, и слѣд. по доказанному и $\left\{\frac{\overline{\overline{\omega}}}{q}\right\}=+1$., или иначе $\overline{\overline{\omega}}^{\frac{q-1}{n}}\equiv 1$ (мод. ϱ_ν) $(v=1,\ 2,\ 3,\ldots n-1)$ т. е. $\overline{\overline{\omega}}^{\frac{q-1}{n}}\equiv 1$ (мод. q) для всѣхъ простыхъ чиселъ q прогрессіи $N(\overline{\overline{\omega}})\,n^2.x+1$; и такимъ образомъ $\sqrt[n]{\overline{\overline{\omega}}}$ выражается раціонально черезъ корень изъ единицы, а слѣдовательно и $\sqrt[n]{\overline{\omega}}$, а слѣдовательно и $\sqrt[n]{\omega}$ тоже. Ч. и т. д.