О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремахъ Stieltjes'а.

Я. Успенскаго.

---

§ 1. Въ двухъ замѣткахъ: «Sur un théorème de Liouville» (Comptes rendus, t. XCVIII, 1883) Stieltjes опубликовалъ нѣсколько особаго характера соотношеній между числами классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ отрицательнаго опредѣлителя, аналогичныхъ соотношенію, данному Ліувиллемъ въ 14-мъ томѣ 2-ой серіи своего журнала. Stieltjes указываетъ на то, что всѣ эти соотношенія были имъ получены изъ соображеній ариѳметическихъ. Размышляя надъ ариѳметическими источниками подобнаго рода теоремъ, я замѣтилъ, что всѣ онѣ могутъ быть доказаны очень просто.

При доказательствѣ теоремъ Stieltjes'а мы будемъ пользоваться нѣкоторыми общими числовыми тождествами. Пусть $F(x)$ нечетная функція x, т. е. такая, что

$$F(-x) = -F(x); \quad F(0) = 0.$$

Въ такомъ случаѣ имѣетъ мѣсто тождество:

$$\sum_{m=\lambda s^2+\mu t^2+\ldots+\rho w^2+\lambda d\delta} (-1)^s F(d+s) = \sum_{m=\lambda s^2+\mu t^2+\ldots+\rho w^2;\, s>0} (-1)^{s-1} s F(s) \tag{I}$$

Здѣсь черезъ $m, \lambda, \mu, \ldots \varrho$ обозначены *данныя* положительныя числа; сумма въ лѣвой части распространяется на всѣ представленія m въ видѣ

$$m = \lambda s^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2 + \lambda d\delta,$$

гдѣ $s, t, \ldots w$ произвольныя цѣлыя числа (положительныя, равныя нулю или отрицательныя), d и δ положительныя цѣлыя числа и притомъ δ нечетное; сумма въ правой части распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = \lambda s^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2, \quad \text{гдѣ } s > 0$$

Если таковыхъ рѣшеній нѣтъ, то правая часть замѣняется нулемъ.

Доказательство тождества (I) не представляетъ затрудненій. Въ суммѣ лѣвой части этого тождества взаимно сокращаются всѣ члены, соотвѣтствующіе такимъ рѣшеніямъ уравненія

$$m = \lambda s^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2 + \lambda d\delta\,, \tag{A}$$

для которыхъ $d - \delta + 2s \neq 0$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ рѣшеніе

$$s,\ t, \ldots w,\ d,\ \delta \tag{B}$$

этого уравненія, для котораго $d - \delta + 2s \gtrless 0$. Если $d - \delta + 2s > 0$, то выбранному рѣшенію соотвѣтствуетъ отличное отъ него рѣшеніе

$$s' = -s + \delta;\quad d' = d - \delta + 2s;\quad \delta' = \delta;\quad t' = t; \ldots w' = w\,, \tag{C}$$

для котораго $d' - \delta' + 2s' = d > 0$ и $d' + s' = d + s$. Вслѣдствіе нечетности δ члены суммы

$$\sum (-1)^s F(d+s)\,,$$

соотвѣтствующіе рѣшеніямъ (B) и (C), сокращаются. Если для рѣшенія (B)

$$d - \delta + 2s < 0,\quad \text{но}\quad -\delta + 4d + 4s > 0,$$

то въ соотвѣтствіи съ этимъ рѣшеніемъ имѣемъ рѣшеніе

$$s' = 2d - \delta + 3s;\ d' = -d + \delta - 2s;\ \delta' = -\delta + 4d + 4s;\ t' = t; \ldots w' = w, \tag{D}$$

для котораго

$$-d' + \delta' - 2s' = d > 0;\quad s' + d' = s + d;\quad -\delta' + 4d' + 4s' = \delta.$$

Члены суммы

$$\sum (-1)^s F(d+s),$$

соотвѣтствующіе рѣшеніямъ (B) и (D) сокращаются. Если наконецъ

$$d - \delta + 2s < 0\quad \text{и}\quad \delta - 4d - 4s > 0\,,$$

то мы имѣемъ рѣшеніе

$$s' = -s - 2d;\ d' = d;\ \delta' = \delta - 4d - 4s;\ t' = t; \ldots w' = w \tag{E}$$

для котораго

$$\delta' - 4d' - 4s' = \delta > 0;\quad s' + d' = -s - d.$$

Такъ какъ $F(-x) = -F(x)$ и $F(0) = 0$, то ясно, что члены, соотвѣтствующіе рѣшеніямъ (B) и (E), сокращаются. Такимъ образомъ въ суммѣ

$$\sum (-1)^s F(d+s)$$

останутся только члены, соотвѣтствующіе такимъ рѣшеніямъ уравненія (A), гдѣ

$$2s = \delta - d$$

Положимъ

$$d + \delta = 2\sigma, \quad \sigma > 0;$$

тогда

$$s = \delta - \sigma; \quad d + s = \sigma$$

и

$$m = \lambda\sigma^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2, \quad \text{гдѣ} \quad \sigma > 0 \tag{F}$$

Каждому рѣшенію уравненія (A), для котораго $2s + d - \delta = 0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе $\sigma > 0$, t, $u, \ldots w$ уравненія (F). Но каждое такое рѣшеніе получится изъ нѣсколькихъ рѣшеній уравненія (A), а именно изъ тѣхъ, гдѣ

$$\delta = 1, 3, 5, \ldots 2\sigma - 1.$$

Для всѣхъ такихъ рѣшеній

$$(-1)^s F(d+s) = (-1)^{\sigma-1} F(\sigma),$$

слѣдовательно всякому рѣшенію уравненія (F) въ суммѣ

$$\sum_{m=\lambda s^2+\mu t^2+\ldots+\varrho w^2+d\delta} (-1)^s F(d+s)$$

соотвѣтствуетъ членъ

$$(-1)^{\sigma-1} \sigma F(\sigma),$$

откуда видно, что упомянутая сумма равна суммѣ

$$\sum (-1)^{\sigma-1} \sigma F(\sigma),$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = \lambda\sigma^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2, \quad \text{гдѣ } \sigma > 0.$$

Изъ этого доказательства видно, что числа t, $u, \ldots w$ (число которыхъ произвольно) можно подчинить какимъ угодно ограниченіямъ; напр. считать какія угодно изъ нихъ по произволу четными или нечетными.

§ 2. Разсмотримъ частный случай тождества (I). Пусть N нечетное число; будемъ разсматривать всѣ представленія $4N$ въ видѣ

$$4N = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 + d\delta, \tag{G}$$

гдѣ s произвольное цѣлое число, t, u, v—нечетныя числа, d и δ числа положительныя и притомъ δ нечетное. На всѣ представленія (G) распространимъ сумму

$$\sum(-1)^s F(d+s);$$

тогда въ силу тождества (I) имѣемъ

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta}(-1)^s F(d+s) = \sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\, s>0}(-1)^{s-1} sF(s) \tag{II}$$

Если здѣсь положимъ

$$F(x) = \sin\frac{\pi x}{2},$$

то послѣ нѣкоторыхъ упрощеній получимъ

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta}(-1)^s \sin\frac{\pi d}{2}\cos\frac{\pi s}{2} = \frac{1}{2}\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2}(-1)^{\frac{s-1}{2}} s; \tag{II*}$$

сумма справа распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$4N = s^2 + t^2 + u^2 + v^2$$

въ нечетныхъ числахъ s, t, u, v. Въ суммѣ же слѣва останутся только такіе члены, гдѣ s четное число $2g$; но тогда d будетъ нечетнымъ числомъ. Извѣстно, что сумма

$$4\sum_{d\delta=k}(-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

равна числу представленій нечетнаго числа k суммою двухъ квадратовъ. Принявъ это во вниманіе и обозначивъ

через R_1 число рѣшеній уравн. $4N = 4g^2 + t^2 + u^2 + v^2 + w^2 + z^2$, гдѣ $g \equiv 0$, $t \equiv u \equiv v \equiv w \equiv 1$; $z \equiv 0$ (Mod. 2)

через R_2 число рѣшеній уравн. $4N = 4g^2 + t^2 + u^2 + v^2 + w^2 + z^2$, гдѣ $g \equiv 1$, $t \equiv u \equiv v \equiv w \equiv 1$; $z \equiv 0$ (Mod. 2) изъ равенства (II*) получимъ

$$R_1 - R_2 = 16 \sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\, s,\, t,\, u,\, v \text{ неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s.$$

Очевидно, что R_1 равно также числу рѣшеній уравненія

$$4N = 4g^2 + 4h^2 + t^2 + u^2 + v^2 + w^2,$$

гдѣ g четное, а t, u, v, w нечетныя; и что R_2 равно числу рѣшеній того же уравненія, гдѣ g нечетное, равно какъ и t, u, v, w. Примемъ теперь во вниманіе слѣдующій извѣстный фактъ: число представленій учетвереннаго нечетнаго числа суммою четырехъ нечетныхъ квадратовъ въ два раза больше числа представленій того же числа суммою четырехъ четныхъ квадратовъ. Отсюда ясно, что обозначивъ

черезъ Ω_1 число рѣшеній уравненія $N = g^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2 + n^2$, гдѣ $g \equiv 0$, $k^2 + l^2 + m^2 + n^2 \equiv 1$ (Mod. 2)

черезъ Ω_2 число рѣшеній уравненія $N = g^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2 + n^2$, гдѣ $g \equiv 1$, $k^2 + l^2 + m^2 + n^2 \equiv 1$ (Mod. 2)

будемъ имѣть

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} R_1; \quad \Omega_2 = \frac{1}{2} R_2$$

и

$$\Omega_1 - \Omega_2 = 8 \sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\, s,\, t,\, u,\, v \text{ неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s$$

Положимъ въ тождествѣ

$$\sum_{N=s^2+t^2+d\delta} (-1)^s F(d+s) = \sum_{s^2+t^2=N,\, s>0} (-1)^{s-1} s F(s) \qquad \text{(II**)}$$

$F(x) = x$ и будемъ считать одинъ разъ t числомъ четнымъ, а другой разъ нечетнымъ; тогда получимъ:

$$\text{I} \quad t \equiv 0 \ (\text{Mod. } 2) \quad \sum_{s\equiv 0,\, t\equiv 0} d - \sum_{s\equiv 1,\, t\equiv 0} d = \frac{1}{2} \sum_{s^2+t^2=N,\, s \text{ неч.}} s^2$$

$$\text{II} \quad t \equiv 1 \ (\text{Mod. } 2) \quad \sum_{s\equiv 0,\, t\equiv 1} d - \sum_{s\equiv 1,\, t\equiv 1} d = -\frac{1}{2} \sum_{s^2+t^2=N,\, s \text{ чет.}} s^2.$$

Всѣ указанныя здѣсь слѣва суммы распространяются на рѣшенія уравненія

$$N = s^2 + t^2 + d\delta$$

ограниченныя нѣкоторыми условіями; эти ограниченія указаны снизу суммъ. Принявъ во вниманіе, что

$$\sum_{s\equiv 1,\, t\equiv 0} d = \sum_{s\equiv 0,\, t\equiv 1} d$$

получимъ

$$\sum_{s\equiv 0,\, t\equiv 0} d - \sum_{s\equiv 1,\, t\equiv 1} d = \frac{1}{2}\sum_{s^2+t^2=N,\ s \text{ нечетн.}} (s^2-t^2)$$

При $s\equiv t\equiv 0$ или $s\equiv t\equiv 1$ (Mod 2) число d всегда нечетное. Принимая во вниманіе, что сумма

$$8\sum_{d\delta=k} d$$

равна числу представленій нечетнаго числа k суммою 4-хъ квадратовъ и обозначая черезъ

P_1 число рѣш. ур. $N=s^2+t^2+u^2+v^2+w^2+z^2$, гдѣ $s\equiv t\equiv 0$ (Mod 2),
P_2 число рѣш. ур. $N=s^2+t^2+u^2+v^2+w^2+z^2$, гдѣ $s\equiv t\equiv 1$ (Mod 2),

изъ раньше выведеннаго равенства получимъ

$$P_1-P_2=8\sum_{s^2+t^2=N,\ \text{гдѣ } s \text{ неч. полож.}} (s^2-t^2)$$

Но съ помощью простыхъ разсужденій, которыя мы позволимъ себѣ опустить, легко убѣждаемся, что

$$\Omega_1=8P_1 \quad \text{и} \quad \Omega_2=8P_2\,;$$

слѣдовательно

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s,\,t,\,u,\,v \text{ неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s = \sum_{N=s^2+t^2,\ s \text{ неч. полож.}} (s^2-t^2) \tag{1}$$

Обозначимъ черезъ $F(n)$ число классовъ квадратичныхъ формъ опредѣлителя $-n$, у которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ крайнихъ коэффиціентовъ нечетный. Извѣстно, что число представленій числа $n\equiv 3$ (Mod 8) суммою трехъ квадратовъ нечетныхъ положительныхъ чиселъ равно $F(n)$; откуда слѣдуетъ, что сумму

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s,\,t,\,u,\,v \text{ неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s$$

можно представить такъ

$$\sum_{s^2<4N}(-1)^{\frac{s-1}{2}}sF(4N-s^2)$$

и переписать равенство (1) въ видѣ

$$\sum_{s=1,\,3,\,5,\ldots}(-1)^{\frac{s-1}{2}}sF(4N-s^2)=\sum_{N=s^2+t^2,\ s\text{ неч. полож.}}(s^2-t^2) \qquad (1^*)$$

Равенство (1*) представляетъ теорему Ліувилля, о которой мы говорили въ началѣ.

§ 3. Имѣя въ виду послѣдующее мы изложимъ другое доказательство той же теоремы.

Въ тождествѣ (II**) § 2 будемъ считать $t=0$; тогда получимъ

$$\sum_{m=s^2+d\delta;\ m\text{ неч.}}(-1)^sF(d+s)=\left\{\begin{array}{c}0,\ \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\(-1)^{s-1}sF(s),\ \text{ если } m=s^2,\ s>0\end{array}\right\} \qquad (\mathrm{III})$$

Взявъ здѣсь

$$F(x)=\operatorname{Sin}\frac{\pi x}{2}$$

и введя числовую функцію

$$\varrho(n)=\sum_{d\delta=n;\ n\text{ неч.}}(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

послѣ должныхъ упрощеній лѣвой части получимъ

$$\sum_{g=0,\pm1,\pm2,\ldots}(-1)^g\varrho(m-4g^2)=\left\{\begin{array}{l}\quad 0,\ \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\(-1)^{\frac{s-1}{2}}s,\ \text{ если } m=s^2,\ s>0\end{array}\right.$$

Отсюда нетрудно вывести такую теорему: если m нечетное число $\equiv 1$ (Mod 4), то сумма

$$\sum(-1)^g,$$

распространенная на всѣ представленія m въ видѣ

$$m=4g^2+4h^2+k^2$$

равна 0, если m не квадратъ, и равна $2\sqrt{m}(-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}}$, если m квадратъ.

Обозначивъ черезъ N нечетное число, будемъ разсматривать представленія $2N$ въ видѣ

$$2N=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2 \qquad (\mathrm{H})$$

гдѣ λ и ϱ нечетныя, а μ и ν четныя. На всѣ представленія (H) распространимъ сумму

$$S = \sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}}$$

Въ этой суммѣ соберемъ сперва члены, соотвѣтствующіе данному λ; совокупность этихъ членовъ будетъ равна суммѣ

$$(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \sum (-1)^{\frac{\mu}{2}},$$

распространенной на всѣ представленія $2N - \lambda^2$ въ видѣ

$$2N - \lambda^2 = \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2,$$

т. е. будетъ равна 0, если $2N - \lambda^2$ не квадратъ, и равна $2(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}\sigma$, если $2N - \lambda^2$ квадратъ, равный σ^2, $\sigma > 0$. Суммируя отдѣльныя найденныя части суммы при измѣняющемся λ, получимъ слѣдующій результатъ

$$S = \sum_{\lambda^2+\mu^2=2N} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda . (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \mu,$$

глѣ суммированіе распространяется на *всѣ* числа (нечетныя) λ и μ, удовлетворяющія уравненію

$$\lambda^2 + \mu^2 = 2N$$

Всѣ рѣшенія этого уравненія получаются изъ рѣшеній уравненія

$$s^2 + t^2 = N,$$

гдѣ s нечетное, t четное, съ помощью равенствъ

$$\lambda = s + t; \quad \mu = \pm (s - t);$$

вслѣдствіе чего оказывается

$$S = 2 \sum_{N=s^2+t^2;\, s \text{ неч.}} (s^2 - t^2)$$

Съ другой стороны всѣ представленія $4N$ въ видѣ суммы четырехъ нечетныхъ квадратовъ

$$4N = \sigma^2 + \sigma'^2 + \sigma''^2 + \sigma'''^2$$

получаются изъ представленій $2N$ въ видѣ

$$2N=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2;\quad \lambda\equiv 1,\ \mu\equiv 0,\ \nu\equiv 0,\ \varrho\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 2)$$

съ помощью равенствъ

$$\sigma=\lambda+\mu;\quad \sigma'=\pm(\lambda-\mu);\quad \sigma''=\nu+\varrho;\quad \sigma'''=\pm(\nu-\varrho),$$

откуда легко найти, что

$$\sum_{4N=\sigma^2+\sigma'^2+\sigma''^2+\sigma'''^2}(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}\sigma=4\sum_{2N=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}}(\lambda+\mu)=4S$$

Сравнивая два найденныя выраженія для S, получимъ окончательно равенство (1) § 2:

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s,\,t,\,u,\,v,\ \text{неч. полож.}}(-1)^{\frac{s-1}{2}}s\quad=\quad\sum_{N=s^2+t^2;\ s\ \text{неч. полож.}}(s^2-t^2). \tag{1}$$

§ 4. Перейдемъ теперь къ доказательству теоремъ Stieltjes'a и начнемъ съ той, провѣрка которой съ помощью эллиптическихъ функцій требуетъ примѣненія преобразованія 3-й степени и приводитъ къ довольно сложнымъ вычисленіямъ. По этому поводу самъ Stieltjes въ перепискѣ съ Эрмитомъ говоритъ: «J'ai été, d'abord, un peu effrayé des calculs que demandait la vérification du théorème IV“ [1]).—Обозначимъ черезъ m произвольное положительное цѣлое число и будемъ разсматривать всѣ представленія $4m$ въ формѣ

$$4m=3\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2,$$

гдѣ λ и ϱ нечетныя, а μ и ν четныя числа. На всѣ такія представленія распространимъ сумму

$$S=\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}}\lambda$$

Съ помощью разсужденій, совершенно аналогичныхъ разсужденіямъ предыдущаго §, убѣждаемся въ томъ, что

$$S=\sum_{3\lambda^2+\mu^2=4m}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda.(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\mu,$$

---

[1]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, t. I, lettre 37.

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$3\lambda^2 + \mu^2 = 4m$$

съ *нечетнымъ* λ. Отсюда видно, что $S = 0$, если m четное число. Если же m нечетное число, то всѣ требуемыя значенія λ и μ найдутся изъ равенствъ

$$\lambda = z + 3t$$
$$\mu = \pm (z - t),$$

если вмѣсто z и t брать всѣ рѣшенія уравненія:

$$z^2 + 3t^2 = m.$$

Отсюда нетрудно найти, что

$$S = 2 \sum_{s^2 + 3t^2 = m} (z^2 - 3t^2)$$

при m нечетномъ; при m четномъ $S = 0$. Съ другой стороны всѣ рѣшенія уравненія

$$16m = 3\sigma^2 + \tau^2 + 4s^2 + 4t^2,$$

гдѣ σ, τ и t нечетныя числа, получаются изъ рѣшеній уравненія

$$4m = 3\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2;\ \lambda \equiv 1,\ \mu \equiv \nu \equiv 0,\ \varrho \equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ 2)$$

съ помощью равенствъ

$$\sigma = \mu - \lambda;\ \tau = \pm (\mu + 3\lambda);\ s = \nu;\ t = \varrho;$$

откуда легко найти, что

$$\sum_{16m = 3\sigma^2 + \tau^2 + 4s^2 + 4t^2} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} \sigma = 2 \sum_{4m = 3\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}} (\lambda - \mu) = 2S.$$

Слѣдовательно

$$\sum_{16m = 3\sigma^2 + \tau^2 + 4s^2 + 4t^2;\ \sigma > 0} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} \sigma \quad = \quad 2 \sum_{z^2 + 3t^2 = m} (z^2 - 3t^2). \tag{2}$$

Въ этомъ равенствѣ вторую часть слѣдуетъ замѣнить нулемъ, если m четное или если уравненіе $z^2 + 3t^2 = m$ невозможно; но легко убѣдиться, что при четномъ m даже въ случаѣ возможности уравненія

$$z^2 + 3t^2 = m$$

всегда

$$\sum_{z^2+3t^2=m} (z^2 - 3t^2) = 0 .$$

Примемъ теперь во вниманіе, что число представленій $k \equiv 5 \pmod 8$ въ видѣ

$$k = \tau^2 + 4t^2 + 4s^2 ; \quad \tau \equiv t \equiv 1 \pmod 2 ; \quad s \equiv 0 \pmod 2$$

равно $2F(k)$; тогда равенство (2) можетъ быть переписано такъ:

$$\sum_{\sigma=m=1,3,5,\ldots} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} \sigma F(16m - 3\sigma^2) = \sum_{z^2+3t^2=m} (z^2 - 3t^2) \tag{2*}$$

и въ такомъ видѣ выражаетъ одну изъ теоремъ Stieltjes'а.

§ 5. Обозначимъ черезъ m какое-либо цѣлое число и будемъ разсматривать всѣ представленія m въ видѣ

$$m = s^2 + 2t^2 + d\delta ,$$

гдѣ s какое нибудь цѣлое число, t по произволу четное или нечетное, d и δ положительныя и притомъ δ нечетное. При $s \equiv m \pmod 2$ число d четное, а при $s \equiv m - 1 \pmod 2$—нечетное. Принимая $t \equiv 0 \pmod 2$ будемъ имѣть въ силу тождества § 1

$$\sum_{m=s^2+2t^2+d\delta;\ t\equiv 0} (-1)^s F(d+s) = \sum_{m=s^2+2t^2;\ s>0,\ t\equiv 0} (-1)^{s-1} s F(s) \tag{IV}$$

Точно также въ случаѣ $t \equiv 1 \pmod 2$ имѣемъ

$$\sum_{m=s^2+2t^2+d\delta;\ t\equiv 1} (-1)^s F(d+s) = \sum_{m=s^2+2t^2;\ s>0,\ t\equiv 1} (-1)^{s-1} s F(s) \tag{IV*}$$

Положимъ теперь въ (IV) и (IV*)

$$F(x) = x ;$$

тогда получимъ послѣ должныхъ упрощеній

$$\sum_{s\equiv m;\ t\equiv 0} d - \sum_{s\equiv m-1;\ t\equiv 0} d = -\frac{1}{2} \sum_{s^2+2t^2=m;\ t\equiv 0} s^2 \tag{α}$$

$$\sum_{s\equiv m;\, t\equiv 1} d - \sum_{s\equiv m-1,\ t\equiv 1} d = -\frac{1}{2} \sum_{s^2+2t^2=m;\, t\equiv 1} s^2 \tag{β}$$

Будемъ далѣе разсматривать представленія того же числа m въ видѣ

$$m = 2t^2 + s^2 + 2d'\delta',$$

гдѣ $s \equiv m \,(\mathrm{Mod}\ 2)$; тогда въ силу тождества (I)

$$\sum_{m=2t^2+s^2+2d'\delta';\ s\equiv m} (-1)^t F(d'+t) = \sum_{m=2t^2+s^2;\ t>0,\ s\equiv m} (-1)^{t-1}\, t F(t) \tag{V}$$

Положивъ здѣсь

$$F(x) = x\,,$$

получимъ

$$2\sum_{t\equiv 0,\, s\equiv m} d' - 2\sum_{t\equiv 1,\, s\equiv m} d' = \sum_{m=s^2+2t^2} (-1)^{t-1} t^2 \tag{γ}$$

Но очевидно, что

$$2\sum_{t\equiv 0,\, s\equiv m} d' = \sum_{s\equiv m,\, t\equiv 0} d\,; \qquad 2\sum_{t\equiv 1,\, s\equiv m} d' = \sum_{s\equiv m,\, t\equiv 1} d\,;$$

принявъ это во вниманіе получимъ изъ (α), (β), (γ) равенство

$$\sum_{t\equiv 0,\, s\equiv m-1} d - \sum_{t\equiv 1,\, s\equiv m-1} d = \sum_{m=s^2+2t^2} (-1)^{t-1} t^2 + \frac{1}{2} \sum_{s^2+2t^2=m;\, t\equiv 0} s^2 - \frac{1}{2} \sum_{s^2+2t^2=m;\, t=1} s^2\,,$$

правая часть котораго можетъ быть упрощена. Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что въ уравненіи

$$s^2 + t^2 = m$$

необходимо

$$t \equiv \frac{m(m-1)}{2}\ (\mathrm{Mod.}\ 2)\,;$$

вслѣдствіе чего одна изъ суммъ

$$\sum_{s^2+2t^2=m;\, t\equiv 0} s^2 \quad \text{и} \quad \sum_{s^2+2t^2=m;\, t\equiv 1} s^2$$

всегда приводится къ нулю. Принявъ въ разсчетъ эти обстоятельства, получаемъ

$$\sum_{t\equiv 0,\, s\equiv m-1} d - \sum_{t\equiv 1,\, s\equiv m-1} d = \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{m=s^2+2t^2} (s^2 - 2t^2)$$

Полученное равенство можетъ быть истолковано такъ. Разсмотримъ всѣ представленія $4m$ въ видѣ

$$4m = 8t^2 + 4s^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2,$$

гдѣ $s \equiv m - 1$ (Mod. 2) и $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ числа нечетныя положительныя. Обозначимъ черезъ P_1 число такихъ представленій, гдѣ t четное; а черезъ P_2 число такихъ, гдѣ t нечетное. Тогда можемъ написать равенство

$$2(P_1 - P_2) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{m=s^2+2t^2} (s^2 - 2t^2) \qquad (\delta)$$

Теперь въ тождествѣ

$$\sum_{4m=2t^2+4s^2+\lambda^2+\mu^2+2d\delta} (-1)^t F(d+t) = \sum_{4m=2t^2+4s^2+\lambda^2+\mu^2;\ t>0} (-1)^{t-1} t F(t),$$

гдѣ

$$s \equiv m - 1;\quad \lambda \equiv \mu \equiv 1 \text{ (Mod. 2)} \quad \text{и} \quad \lambda > 0,\ \mu > 0,$$

положимъ $F(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$; полученный результатъ можетъ быть представленъ такъ

$$P_1 - P_2 = \sum_{4m=2s^2+4t^2+\lambda^2+\mu^2;\ s>0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s \qquad (\delta)$$

Сравненіе (δ) съ (δ') даетъ равенство

$$2 \sum_{4m=2s^2+4t^2+\lambda^2+\mu^2;\ s>0, \mu>0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{m=s^2+2t^2} (s^2 - 2t^2) \qquad (3)$$

изъ котораго получается еще одна теорема Stieltjes'a

$$2 \sum_{s=1,3,5,\ldots} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s F(4m - 2s^2) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{m=s^2+2t^2} (s^2 - 2t^2) \qquad (3^*)$$

§ 6. Въ дальнѣйшемъ намъ придется пользоваться одной теоремой, выведенной Якоби изъ теоріи эллиптическихъ функцій; но мы предложимъ здѣсь новое ея доказательство, вытекающее изъ тѣхъ же началъ, какъ и все предыдущее. Теорема эта читается такъ: если m нечетное число вида $8h + 1$, то разность между числомъ рѣшеній уравненія

$$m = \alpha^2 + 16\beta^2,$$

гдѣ β четное и гдѣ β нечетное, равна разности между числомъ рѣшеній уравненія

$$m = \gamma^2 + 8\delta^2 ,$$

гдѣ $\gamma \equiv \pm 1$ и гдѣ $\gamma \equiv \pm 3$ (Mod 8).

При принятыхъ нами обозначеніяхъ эту теорему можно представить такъ: если черезъ $g(m)$ и $G(m)$ обозначить числовыя функціи

$$g(m) = \sum_{m=\alpha^2+16\beta^2} (-1)^{\beta}$$

$$G(m) = \sum_{m=\gamma^2+8\delta^2} (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}}$$

то всегда

$$g(m) = G(m).$$

Въ § 3 мы доказали слѣдующую теорему: разность между числомъ рѣшеній уравненія

$$m = \gamma^2 + 4\delta^2 + 4\varepsilon^2 ,$$

гдѣ δ четное, и числомъ рѣшеній, гдѣ δ нечетное, вообще равна 0; она отлична отъ нуля только тогда, когда m есть квадратъ ($= s^2$), и въ этомъ случаѣ равна

$$2(-1)^{\frac{s-1}{2}}.$$

Мы считаемъ $m \equiv 1$ (Mod 8); поэтому числа δ и ε или четныя, или нечетныя. Число δ будетъ четнымъ, если $\gamma^2 \equiv m$ (Mod 16), и нечетнымъ, если $\gamma^2 \equiv m + 8$ (Mod 16); слѣдовательно при четномъ δ

$$(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{m-1}{8}}$$

а при нечетномъ δ

$$(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} = -(-1)^{\frac{m-1}{8}} ;$$

изъ чего легко усмотрѣть (принявъ еще во вниманіе, что сумму $4\delta^2 + 4\varepsilon^2$ можно представить въ формѣ $8u^2 + 8v^2$), что предыдущая теорема равносильна такой: сумма

$$\sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}},$$

распространенная на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = \gamma^2 + 8u^2 + 8v^2,$$

вообще равна нулю и только въ томъ случаѣ равна

$$2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}},$$

когда $m=s^2$. Предыдущую сумму можно представить подъ видомъ:

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\dots} G(m-8v^2);$$

слѣдовательно

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2\dots;8v^2<m} G(m-8v^2)=\left\{\begin{matrix} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}, \text{ если } m=s^2 \end{matrix}\right\} \qquad (A)$$

Положимъ въ тождествѣ

$$\sum_{m=s^2+d\delta}(-1)^s F(d+s)=\begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{s-1} s F(s), \text{ если } m=s^2 \end{cases}$$

функцію $F(x)$ равной

$$F(x)=\sin\frac{\pi x}{4};$$

тогда послѣ должныхъ упрощеній и принявъ во вниманіе, что

$$\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{8}}$$

при x нечетномъ, получимъ

$$2\sum_{m=16g^2+d\delta}(-1)^g\left(\frac{-2}{d}\right)=\begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}, \text{ если } m=s^2 \end{cases}$$

Изъ послѣдняго равенства, взвѣсивъ, что сумма

$$2\sum_{d\delta=k}\left(\frac{-2}{d}\right)$$

распространенная по дѣлителямъ нечетнаго числа k, равна числу представленій k въ формѣ

$$k=x^2+2y^2,$$

найдемъ:

$$\sum_{m=16g^2+u^2+8v^2}(-1)^g=\begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}, \text{ если } m=s^2 \end{cases}$$

или

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} g(m-8v^2)=\begin{cases}0\,,\ \text{если } m \text{ не квадратъ}\\ 2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}\,,\ \text{если } m=s^2\end{cases} \tag{B}$$

Сравненіе равенствъ (A) и (B) показываетъ, что при всякомъ $m\equiv 1$ (Mod 8)

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} G(m-8v^2)=\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} g(m-8v^2)$$

Но $G(1)=g(1)$; поэтому изъ послѣдняго равенства при $m=9$ найдемъ $G(9)=g(9)$, затѣмъ $G(17)=g(17)$ и т. д., вообще

$$G(m)=g(m)\,,\quad \text{если}\quad m\equiv 1 \ (\text{Mod } 8).$$

Изъ теоремы, выражаемой послѣднимъ равенствомъ, выведемъ одно слѣдствіе. Будемъ разсматривать уравненіе

$$2m=s^2+t^2\,,$$

предполагая по прежнему $m\equiv 1$ (Mod 8). Обозначимъ черезъ R_1 число рѣшеній, гдѣ

$$s \text{ и } t\equiv\pm 1 \ (\text{Mod } 8);$$

и черезъ R_2 число рѣшеній, гдѣ

$$s \text{ и } t\equiv\pm 3 \ (\text{Mod } 8).$$

Всякое рѣшеніе уравненія

$$2m=s^2+t^2$$

можетъ быть получено изъ рѣшеній уравненія

$$m=\xi^2+16\eta^2$$

съ помощью равенствъ

$$s=\xi+4\eta\,;\quad t=\pm(\xi-4\eta)\,;$$

откуда легко усматриваемъ, что

$$\text{при } m\equiv 1 \ (\text{Mod } 16) \ \text{ и } \begin{cases}\eta \text{ четномъ} & s \text{ и } t\equiv\pm 1 \ (\text{Mod } 8)\\ \eta \text{ нечетномъ} & s \text{ и } t\equiv\pm 3 \ (\text{Mod } 8)\end{cases}$$

$$\text{при } m\equiv 9 \ (\text{Mod } 16) \ \text{ и } \begin{cases}\eta \text{ четномъ} & s \text{ и } t\equiv\pm 3 \ (\text{Mod } 8)\\ \eta \text{ нечетномъ} & s \text{ и } t\equiv\pm 1 \ (\text{Mod } 8)\end{cases}$$

Слѣдовательно

$$R_1-R_2=2(-1)^{\frac{m-1}{8}}g(m).$$

Съ другой стороны легко убѣдиться изъ разсмотрѣнія уравненія

$$m = \sigma^2 + 8h^2,$$

что

$$\text{при } m \equiv 1 \text{ (Mod 16) и } \begin{cases} \sigma \equiv \pm 1 \text{ (Mod 8) } h \text{ четное} \\ \sigma \equiv \pm 3 \text{ (Mod 8) } h \text{ нечетное} \end{cases}$$

$$\text{при } m \equiv 9 \text{ (Mod 16) и } \begin{cases} \sigma \equiv \pm 1 \text{ (Mod 8) } h \text{ нечетное} \\ \sigma \equiv \pm 3 \text{ (Mod 8) } h \text{ четное} \end{cases}$$

Обозначая поэтому черезъ P_1 и P_2 числа рѣшеній, гдѣ h четное и гдѣ h нечетное, будемъ имѣть

$$P_1 - P_2 = (-1)^{\frac{m-1}{8}} G(m)$$

Слѣдовательно

$$R_1 - R_2 = 2(P_1 - P_2) \qquad \text{(C)}$$

§ 7. Пусть $F(x)$ нечетная функція и $m \equiv 5$ (Mod 8). Будемъ разсматривать всѣ представленія $2m$ въ формѣ

$$2m = t^2 + s^2 + 8d\delta,$$

гдѣ t и s нечетныя числа ($\gtrless 0$), причемъ послѣднее можетъ подлежать произвольнымъ ограниченіямъ, а d и δ положительныя цѣлыя числа. Тогда имѣетъ мѣсто тождество

$$\sum_{2m=t^2+s^2+8d\delta} (-1)^d F(2d+t) =$$

$$= \sum_{2m=t^2+s^2;\ t>0} \left\{ (-1)^{\frac{t-1}{2}} (F(1) - F(3) + \ldots + (-1)^{\frac{t-3}{2}} F(t-2)) - \frac{t-1}{2} F(t) \right\}, \qquad \text{(V)}$$

которое доказывается подобно тождеству (I) § 1.—Въ этомъ тождествѣ положимъ

$$F(x) = x$$

и будемъ считать одинъ разъ $s^2 \equiv 1$ (Mod 16), а другой разъ $s^2 \equiv 9$ (Mod 16); тогда получимъ

$$\sum_{t^2\equiv 1,\ s^2\equiv 1} d - \sum_{t^2\equiv 9,\ s^2\equiv 1} d = +\frac{1}{2} \sum_{2m=t^2+s^2;\ s^2\equiv 1 \text{ (Mod 16)};\ t>0,\ s>0} (t^2-1) \qquad \text{(a)}$$

$$\sum_{t^2\equiv 1,\ s^2\equiv 9} d - \sum_{t^2\equiv 9,\ s^2\equiv 9} d = -\frac{1}{2} \sum_{2m=t^2+s^2;\ s^2\equiv 9 \text{ (Mod 16)};\ t>0,\ s>0} (t^2-1) \qquad \text{(b)}$$

Отсюда уже легко найти, что

$$\sum_{t^2\equiv 1,\ s^2\equiv 1} d \ - \sum_{t^2\equiv 9,\ s^2\equiv 9} d \ = \frac{1}{2}\sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi \text{ и } \eta>0} (\xi^2-\eta^2) \tag{c}$$

Лѣвая часть этого равенства можетъ быть истолкована такъ. Будемъ разсматривать уравненіе

$$2m = t^2 + s^2 + 2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2),$$

гдѣ λ, μ, ν, ϱ нечетныя и положительныя числа, и обозначимъ черезъ

S_1 число рѣшеній, гдѣ $t^2 \equiv s^2 \equiv 1$ (Mod 16)

S_2 число рѣшеній, гдѣ $t^2 \equiv s^2 \equiv 9$ (Mod 16).

Тогда равенство (c) дастъ

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi \text{ и } \eta>0} (\xi^2-\eta^2) \tag{d}$$

Примемъ теперь во вниманіе теорему, выражаемую равенствомъ (c) предыдущаго §; по этой теоремѣ оказывается, что положивъ Q_1 и Q_2 равными числамъ рѣшеній уравненія

$$m = 8h^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2;\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varrho \text{ неч. } >0$$

гдѣ соотвѣтственно h четное и нечетное, будемъ имѣть

$$S_1 - S_2 = 2(Q_1 - Q_2)$$

или

$$Q_1 - Q_2 = \frac{1}{4}\sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \eta>0,\ \xi>0} (\xi^2-\eta^2) \tag{e}$$

Положимъ теперь въ тождествѣ

$$\sum_{m=2s^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2+2d\delta} (-1)^s F(d+s) = \sum_{m=2s^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2,\ s>0} (-1)^{s-1} s F(s),$$

гдѣ въ обѣихъ частяхъ σ, λ, μ нечетныя числа и $\lambda>0$, $\mu>0$, функцію $F(x)$ равной $\sin\dfrac{\pi x}{2}$; въ результатѣ найдемъ

$$Q_1 - Q_2 = 2\sum_{m=2s^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2,\ s,\ \sigma,\ \lambda,\ \mu \text{ неч. } >0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s \tag{f}$$

и изъ сравненія (e) съ (f) выведемъ сначала равенство

$$8 \sum_{m=2s^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2;\ s,\ \sigma,\ \lambda,\ \mu\ \text{неч.} >0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s \quad = \quad \sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi,\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2) \tag{IV}$$

а изъ него новое соотношеніе Stieltjes'а

$$m\equiv 5\ (\mathrm{Mod}\ 8);\ 8\sum_{s=1,\ 3,\ 5\ldots}(-1)^{\frac{s-1}{2}} sF(m-2s^2)=\sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi,\ \eta>0}(\xi^2-\eta^2). \tag{IV}$$

§ 8. Еще одна теорема Stieltjes'а можетъ быть легко получена изъ предыдущаго.

Пусть опять $m\equiv 5$ (Mod 8). Положимъ

$$F(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$$

въ тождествѣ

$$\sum_{2m=s^2+t^2+4u^2+4v^2+d\delta;\ t\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 2)}(-1)^s F(d+s) \quad = \quad \sum_{2m=s^2+4u^2+4v^2;\ s>0;\ t\ \text{неч.}}(-1)^{s-1} sF(s)$$

Послѣ простого изслѣдованія придемъ къ слѣдующему результату. Если обозначимъ черезъ V_1 и V_2 числа рѣшеній уравненія

$$2m=16g^2+t^2+4u^2+4v^2+w^2+8z^2;\ t\ \text{неч.}, \tag{A}$$

гдѣ соотвѣтственно g четное и g нечетное, то

$$V_1-V_2=2\sum_{2m=s^2+t^2+4u^2+4v^2;\ s>0,\ t\ \text{неч.}}(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s \tag{a}$$

Въ уравненіи (A) числа t и w нечетныя, а числа u и v одинаковой четности; отсюда легко вывести, что число рѣшеній уравненія

$$2m=16g^2+2p^2+8q^2+8r^2+8s^2+8z^2,\ \text{гдѣ}\ p\ \text{нечетное},$$

или, что все равно, уравненія

$$m=8g^2+p^2+4q^2+4r^2+4s^2+4z^2,$$

гдѣ $g\equiv 0$, равно $\frac{1}{2}V_1$ и число рѣшеній, гдѣ $g\equiv 1$, равно $\frac{1}{2}V_2$. Но въ свою очередь ясно, что

$$\frac{1}{2}V_1=8Q_1;\ \frac{1}{2}V_2=8Q_2,$$

слѣдовательно равенство (a) этого § и равенство (e) § 7 дадутъ результатъ:

$$\sum_{2m=s^2+t^2+4u^2+4v^2;\, s \text{ и } t>0} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s = \sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi,\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2) \tag{V}$$

откуда, вводя функцію Кронекера $F(n)$, получимъ

$$2\sum_{s=1,\,3,\,5,\ldots} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} F(2m-s^2) = \sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi,\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2). \tag{V*}$$

§ 9. Пусть m нечетное число $\equiv 1$ (Mod 8). Обозначимъ черезъ R число рѣшеній уравненія

$$m = 8g^2 + \sigma^2 + 4\lambda^2 + 4\mu^2 + 4\nu^2 + 4\varrho^2;\ \sigma \text{ неч.},$$

гдѣ g четное, и черезъ R_2—число рѣшеній, гдѣ g нечетное. Совершенно такимъ же образомъ, какъ въ предыдущемъ § для случая $m\equiv 5$ (Mod 8), убѣждаемся въ справедливости равенства

$$R_1 - R_2 = \sum_{s^2+t^2+4u^2+4v^2=2m;\ s>0,\ t \text{ неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s. \tag{a}$$

Чтобы найти другое выраженіе для разности R_1-R_2, мы будемъ исходить изъ представленій m въ видѣ

$$m = x^2 + 8y^2 + d\delta;\ \delta \text{ неч.}$$

Въ тождествѣ

$$\sum_{m=x^2+8y^2+d\delta} (-1)^{x+y} F(d+x) = \sum_{x^2+8y^2=m;\ x>0} (-1)^{x+y-1} x F(x)$$

положимъ

$$F(x) = x;$$

тогда найдемъ

$$\sum_{x\equiv 0} (-1)^y d - \sum_{x\equiv 1} (-1)^y d = \frac{1}{2} \sum_{x^2+8y^2=m} (-1)^y x^2. \tag{b}$$

Съ другой стороны, разсматривая представленія m въ видѣ

$$m = 8y^2 + x^2 + 8d'\delta';\ x \text{ неч.}$$

и полагая

$$F(x) = x$$

въ тождествѣ

$$\sum_{m=8y^2+x^2+8d'\delta';\ \delta'\ \text{неч.}} (-1)^{y+x} F(d'+y) = \sum_{m=8y^2+x^2;\ y>0} (-1)^{y+x-1} y F(y)$$

найдемъ

$$\sum_{m=8y^2+x^2+8d'\delta';\ \delta'\ \text{неч.}} (-1)^y d' = -\frac{1}{2} \sum_{m=8y^2+x^2} (-1)^y y^2. \qquad \text{(c)}$$

Но очевидно, что

$$8 \sum_{x\equiv 1} (-1)^y d' = \sum_{x\equiv 1} (-1)^y d,$$

слѣдовательно изъ (b) и (c) получимъ

$$\sum_{m=x^2+8y^2+d\delta;\ x\ \text{чет.}} (-1)^y d = \sum_{x^2+8y^2=m;\ x>0} (-1)^y (x^2-8y^2) \qquad \text{(d)}$$

Сумма въ правой части послѣдняго равенства равна половинѣ разности числа рѣшеній уравненія

$$m = 4\xi^2 + 8y^2 + 4\eta^2 + 4\zeta^2 + 4\vartheta^2 + \lambda^2,$$

гдѣ y четное, и числа рѣшеній, гдѣ y нечетное; слѣдовательно

$$R_1 - R_2 = 2 \sum_{x^2+8y^2=m;\ x>0} (-1)^y (x^2-8y^2),$$

откуда послѣ сравненія съ равенствомъ (a):

$$\sum_{2m=s^2+t^2+4u^2+4v^2,\ s>0,\ t\ \text{неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s = 2 \sum_{x^2+8y^2=m;\ v>0} (-1)^y (x^2-8y^2). \qquad \text{(VI)}$$

Принявъ во вниманіе, что число рѣшеній уравненія

$$2m - s^2 = t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

съ нечетнымъ t равно

$$4F(2m-s^2),$$

найдемъ окончательно

$$2 \sum_{s=1,\,3,\,5,\ldots} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s\, F(2m-s^2) = \sum_{x^2+8y^2=m;\ x>0} (-1)^y (x^2-8y^2). \qquad \text{(VI*)}$$

§ 10. Намъ остается доказать послѣднюю изъ теоремъ Stieltjes'а, ариѳметическое доказательство которой нѣсколько труднѣе, чѣмъ для другихъ теоремъ.

Пусть $f(x)$ какая угодно *четная* функція, т. е. такая, что

$$f(-x) = f(x).$$

Обозначимъ черезъ m нечетное вида $8k+3$ и будемъ разсматривать всѣ представленія m въ видѣ

$$m = s^2 + 2t^2 + 8d\delta,$$

гдѣ s и t нечетныя числа (послѣднее можетъ подлежать произвольнымъ ограниченіямъ), а d и δ какія-либо положительныя числа. Распространивъ на всѣ такія представленія сумму

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} f(s-2\delta)$$

разсужденіями, подобными изложеннымъ въ § 1, мы убѣдимся легко въ справедливости тождества

$$\sum_{m=s^2+2t^2+8d\delta} (-1)^{\frac{s-1}{2}} f(s-2\delta) = \sum_{m=s^2+2t^2;\ s>0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \left\{\frac{s-1}{2} f(s) - f(1) - f(3) - \ldots - f(s-2)\right\} \quad (A)$$

Въ этомъ тождествѣ мы положимъ

$$f(x) = x \sin\frac{\pi x}{4};$$

послѣ упрощенія получимъ

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s \sin\frac{\pi\delta}{2} + 2\sum (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} \delta \cos\frac{\pi\delta}{2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{m=s^2+2t^2;\ s>0} (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} \left(s^2 - 2 + s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\right) \quad (a)$$

гдѣ первыя двѣ суммы распространяются на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = s^2 + 2t^2 + 8d\delta$$

указаннаго выше вида. Въ суммѣ

$$S = \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s \sin\frac{\pi\delta}{2}$$

обращаются въ нуль всѣ члены, соотвѣтствующіе четному δ; сумма остающихся членовъ будетъ равна одной четверти суммы

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s,$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = s^2 + 2t^2 + u^2 + v^2; \quad s \text{ и } t \text{ неч.}$$

гдѣ u и v не равны нулю заразъ. Поэтому можно написать

$$S = \frac{1}{4} \sum_{m=s^2+2t^2+u^2+v^2;\, s \text{ и } t \text{ неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s - \frac{1}{4} \sum_{m=s^2+2t^2} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s$$

и благодаря этому упростить равенство (a) слѣдующимъ образомъ:

$$\sum_{m=s^2+2t^2+u^2+v^2;\, s \text{ и } t \text{ неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s = -8 \sum_{m=s^2+8t^2+8d\delta} (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} \delta \cos \frac{\pi\delta}{2} - \sum_{m=s^2+2t^2} (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} (s^2-2). \quad \text{(b)}$$

Въ суммѣ

$$T = \sum_{m=s^2+2t^2+8d\delta} (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} \delta \cos \frac{\pi\delta}{2}$$

исчезаютъ члены, соотвѣтствующіе нечетному δ; эта сумма можетъ быть поэтому представлена такъ

$$T = 2 \sum (-1)^{\frac{s^2-1}{8}+\Delta} \Delta,$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ представленія m въ формѣ

$$m = s^2 + 2t^2 + 16d\Delta.$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ

$$\frac{s^2-1}{8} \equiv \frac{m-3}{8} \pmod 2,$$

что даетъ возможность написать

$$T = 2(-1)^{\frac{m-3}{8}} \sum_{m=s^2+2t^2+16d\Delta} (-1)^{\Delta} \Delta$$

Теперь возьмемъ тождество (ср. тождество (V) § 7)

$$\sum_{m=2t^2+s^2+16d\Delta}(-1)^{\Delta}F(2\Delta+t)=$$

$$=\sum_{m=2t^2+s^2;\, t>0}(-1)^{\frac{t-1}{2}}\left[F(1)-F(3)+\ldots+(-1)^{\frac{t-3}{2}}F(t-2)-\frac{t-1}{2}F(t)\right\}$$

и положимъ въ немъ

$$F(x)=x;$$

тогда получимъ

$$2\sum_{m=2t^2+s^2+16d\Delta}(-1)^{\Delta}\Delta=-\frac{1}{4}\sum_{m=s^2+2t^2}(t^2-1)$$

и

$$T=\frac{(-1)^{\frac{m+5}{8}}}{4}\sum_{m=s^2+2t^2}(t^2-1)$$

Внося это значеніе въ равенство (b) и принимая во вниманіе что въ силу уравненія

$$m=s^2+2t^2$$

въ послѣдней суммѣ правой части равенства (b)

$$(-1)^{\frac{s^2-1}{8}}=-(-1)^{\frac{m+5}{8}}$$

получимъ окончательно

$$\sum_{m=s^2+2t^2+u^2+v^2;\, s \text{ и } t \text{ неч.}>0}(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}s=(-1)^{\frac{m+5}{8}}\sum_{s^2+2t^2=m;\, s \text{ и } t>0}(s^2-2t^2) \qquad \text{(VII)}$$

Послѣднее равенство Stieltjes сообщилъ въ формѣ:

$$2\sum_{s=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}sF\left(\frac{m-s^2}{2}\right)=(-1)^{\frac{m+5}{8}}\sum_{s^2+2t^2=m;\, s \text{ и } t>0}(s^2-2t^2); \qquad \text{(VII*)}$$

Настоящее изслѣдованіе имѣло совершенно спеціальную цѣль: ариѳметическое доказательство интересныхъ теоремъ Stieltjes'а; поэтому я не указывалъ на многочисленныя ариѳметическія слѣдствія, которыя могутъ быть выведены изъ указанныхъ здѣсь общихъ тождествъ. Эти тождества являются частными случаями другихъ, относящихся до числовыхъ функцій съ тремя перемѣнными; я надѣюсь опубликовать ихъ въ другой работѣ. Замѣчу, что они имѣютъ много общаго съ тождествами Ліувилля, изъ которыхъ знаменитый ученый извлекъ такое огромное количество интересныхъ ариѳметическихъ результатовъ.

14 августа 1912 г.