О представленіи чиселъ суммами квадратовъ.

Я. Успенскаго.

§ 1. Въ настоящей статьѣ я имѣю въ виду, главнымъ образомъ, дать ариѳметическое доказательство результатовъ Ліувилля, относящихся до числа представленій чиселъ суммами 10 и 12 квадратовъ. Эти результаты, опубликованные въ 1864 и 1866 годахъ [1]), оставались долгое время недоказанными. Общая теорія квадратичныхъ формъ со многими перемѣнными, развитая въ работахъ Эйзенштейна, Смита и Минковскаго, не могла дать рѣшенія вопросовъ о представленіи чиселъ суммою квадратовъ, число которыхъ превышаетъ 8, хотя, повидимому, именно эта теорія должна была бы дать надежныя средства для рѣшенія подобныхъ вопросовъ. Результаты Ліувилля были полностью доказаны только въ 1907 г. Петромъ [2]) съ помощью теоріи эллиптическихъ функцій. Несомнѣнно однако, что самъ Ліувилль пользовался ариѳметическими методами, основанными на примѣненіи нѣкоторыхъ весьма общихъ числовыхъ тождествъ. Занимаясь съ своей стороны этимъ вопросомъ я нашелъ ариѳметическія доказательства утвержденій Ліувилля и вѣроятно тѣ самыя, которыя составляли его секретъ. Въ моихъ доказательствахъ мнѣ необходимо опираться на хорошо уже извѣстные результаты относительно числа представленій чиселъ суммами 2, 4, 6 и 8 квадратовъ. Поэтому я бы могъ для краткости просто ссылаться на эти результаты; но замѣчательно, что и они получаются изъ тѣхъ же методовъ, которыя я примѣняю къ изслѣдованію случаевъ 10 и 12 квадратовъ. Вслѣдствіе этого я нашелъ наиболѣе удобнымъ извлечь всѣ извѣстные результаты изъ одного общаго источника, каковымъ являются общія числовыя тождества Ліувилля и нѣкоторыя другія, имъ подобныя. Случаи 2, 4, 6 и 8 квадратовъ будутъ изучены двумя различными способами, изъ которыхъ первый весьма простой и безъискусственный.

---

[1]) Liouville, Journ. de Math. T. IX p. 296 и T. XI p. 1, 2-e série.

[2]) K. Petr, Archiv für Math. u. Phys. Bd. II. 1907. Ср. также: Назимовъ «О приложеніяхъ эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ». Москва 1884.

§ 2. Мы будемъ въ дальнѣйшемъ знакомъ $N_p(m)$ обозначать число всѣхъ представленій m суммою p квадратовъ, т. е. число всевозможныхъ рѣшеній уравненія

$$m = \lambda^2 + \mu^2 + \ldots + \tau^2,$$

гдѣ λ, $\mu, \ldots \tau$ (число этихъ величинъ $= p$) цѣлыя числа, не подлежащія никакимъ ограниченіямъ. Число всѣхъ представленій m суммою квадратовъ p нечетныхъ положительныхъ чиселъ (или просто суммою p нечетныхъ и положительныхъ квадратовъ) мы будемъ обозначать знакомъ $R_p(m)$. Изъ самаго понятія о представленіи числа суммою квадратовъ вытекаетъ слѣдующая весьма простая лемма.

Лемма I. Сумма

$$\Sigma(m - (p + 1)\lambda^2)N_p(m - \lambda^2) = 0,$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ цѣлыя числа λ ($\gtreqless 0$), *квадраты коихъ не превышаютъ* m, *равна нулю.* Или короче:

$$\sum_{\lambda=0,\,+1,\,+2,\ldots}(m - (p + 1)\lambda^2)N_p(m - \lambda^2) = 0. \qquad \text{(A)}$$

Доказательство этой леммы чрезвычайно просто. Будемъ разсматривать всѣ представленія m суммою $p + 1$ квадратовъ и выпишемъ ихъ въ таблицу:

$$\left.\begin{aligned} m &= \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \ldots + \tau_1^2 + v_1^2 \\ m &= \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \ldots + \tau_2^2 + v_2^2 \\ m &= \lambda_k^2 + \mu_k^2 + \ldots + \tau_k^2 + v_k^2 \end{aligned}\right\} k = N_{p+1}(m).$$

Въ этой табличкѣ число строкъ очевидно равно $N_{p+1}(m)$. Сложимъ теперь всѣ предыдущія равенства; сумма лѣвыхъ частей будетъ

$$mN_{p+1}(m)$$

или, что очевидно,

$$m\sum_{\lambda=0,\,+1,\,+2,\ldots} N_p(m - \lambda^2), \quad \lambda^2 \leqq m.$$

Сумма правыхъ частей представится такъ

$$\Sigma\lambda_i^2 + \Sigma\mu_i^2 + \ldots + \Sigma\tau_i^2 + \Sigma v_i^2.$$

Но съ одной стороны очевидно, что

$$\Sigma\lambda_i^2 = \Sigma\mu_i^2 = \ldots = \Sigma\tau_i^2 = \Sigma v_i^2,$$

а съ другой не менѣе ясно, что

$$\sum \lambda_i^2 = \sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots} \lambda^2 N_p(m-\lambda^2); \quad \lambda^2 \leqq m.$$

Слѣдовательно сумма правыхъ частей равенствъ нашей таблички будетъ

$$(p+1) \sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots} \lambda^2 N_p(m-\lambda^2)$$

и потому

$$m \sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots} N_p(m-\lambda^2) = \sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots} (p+1)\lambda^2 N_p(m-\lambda^2).$$

Совершенно такимъ же образомъ доказывается другая лемма

Лемма II. *Сумма*

$$\sum (m-(p+1)\lambda^2) R_p(m-\lambda^2),$$

распространенная на всѣ нечетныя и положительныя числа λ, *коихъ квадраты не превышаютъ* m, *равна нулю*, т. е.

$$\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} (m-(p+1)\lambda^2) R_p(m-\lambda^2) = 0 \tag{B}$$

Слѣдуетъ добавить, что въ этомъ равенствѣ должно считать $m \equiv p+1$ (Mod 8) и полагать $R_p(0)=0$.

Выведенныя двѣ простыя леммы позволятъ намъ опредѣлить число представленій чиселъ суммою 2, 4, 6, 8 квадратовъ. Положимъ, что мы какимъ-нибудь образомъ нашли числовую функцію $\chi(m)$, опредѣленную при $m \geqq 0$, и притомъ такую, что

$$\chi(0) = 1$$

$$\sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots} (m-(p+1)\lambda^2)\chi(m-\lambda^2) = 0,$$

при чемъ послѣдняя сумма распространяется на всѣ числа λ, коихъ квадраты $\leqq m$. Тогда, въ силу леммы I, можно утверждать, что

$$N_p(m) = \chi(m).$$

Въ самомъ дѣлѣ при всякомъ m имѣемъ

$$\sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots} (m-(p+1)\lambda^2) N_p(m-\lambda^2) = \sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots} (m-(p+1)\lambda^2)\chi(m-\lambda^2).$$

Полагая здѣсь $m=1$ и принимая во вниманіе, что

$$\chi(0)=N_p(0)=1,$$

найдемъ $\chi(1)=N_p(1)$; полагая затѣмъ $m=2, 3, 4, \ldots$ послѣдовательно найдемъ

$$\chi(2)=N_p(2); \quad \chi(3)=N_p(3); \quad \chi(4)=N_p(4); \text{ и т. д.}$$

Подобное же замѣчаніе можно сдѣлать и относительно леммы (B). Весь вопросъ, какъ видно, приводится къ надлежащему выбору функціи $\chi(m)$. Мы рѣшимъ этотъ вопросъ для случаевъ $p=2, 4, 6, 8$, опираясь на нѣкоторыя тождества Ліувилля и имъ подобныя. Доказательствъ этихъ тождествъ мы приводить не будемъ, такъ какъ они общеизвѣстны и къ тому же очень просты [1].

§ 3. Мы сначала разсмотримъ случаи двухъ и шести квадратовъ. Пусть $F(x, y, z)$ нечетная функція по отношенію къ каждому изъ перемѣнныхъ и обращается въ нуль вмѣстѣ съ x; т. е.

$$F(-x, y, z)=-F(x, y, z); \quad F(x, -y, z)=-F(x, y, z);$$
$$F(x, y, -z)=-F(x, y, z); \quad F(0, y, z)=0.$$

Будемъ разсматривать всѣ представленія какого либо числа m въ видѣ

$$m=\lambda^2+d\delta,$$

гдѣ λ произвольное цѣлое число, числа же d и δ положительныя и притомъ δ *нечетное*; на всѣ таковыя представленія распространимъ сумму

$$\Sigma F(d+\lambda, \ \delta-2\lambda, \ 2d+2\lambda-\delta);$$

тогда имѣемъ тождество

$$\left.\begin{array}{l} \sum F(d+\lambda, \delta-2\lambda, 2d+2\lambda-\delta)=0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ \sum F(d+\lambda, \delta-2\lambda, 2d+2\lambda-\delta)=\sum\limits_{s=1}^{\sqrt{m}} F(\sqrt{m}, 2s-1, 2s-1) \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{array}\right\} (C)$$

Изъ этого тождества сначала извлечемъ одно частное слѣдствіе, полагая (что̀ допустимо вслѣдствіе нечетности третьяго аргумента):

$$F(x, y, z)=(-1)^{\frac{z-1}{2}}\psi(x, y),$$

---

[1]) Piuma. Dimostrazione di alcune formule di sig. Liouville. Genova 1866.
Pepin. Sur quelques formules d'analyse qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres Journal de math. 1888.
Баскаковъ. Объ одномъ изъ способовъ полученія числовыхъ тожествъ. Математ. Сборникъ, т. 10.

гдѣ $\psi(x, y)$ удовлетворяетъ при всѣхъ разсматриваемыхъ значеніяхъ аргументовъ условіямъ:

$$\psi(-x, y) = -\psi(x, y); \quad \psi(x, -y) = -\psi(x, y); \quad \psi(0, y) = 0;$$

послѣ упрощеній получимъ

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(d+\lambda, \delta-2\lambda) = 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ &\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(d+\lambda, \delta-2\lambda) = (-1)^{m-1} \sum_{s=1}^{\sqrt{m}} (-1)^{s-1} \psi(\sqrt{m}, 2s-1), \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{aligned}\right\} (C')$$

Положимъ теперь въ послѣднемъ тождествѣ

$$\psi(x, y) = xy;$$

послѣ упрощенія суммы лѣвой части получимъ

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (m-3\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ m, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{cases} \quad \text{(a)}$$

Вводя вмѣстѣ съ Ліувиллемъ въ разсмотрѣніе числовую функцію

$$\varrho(k) = \sum_{k=d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ представленія k въ видѣ

$$k = d\delta$$

съ нечетнымъ δ, можемъ равенство (a) представить такъ:

$$\sum_{\lambda^2<m} (m-3\lambda^2)\varrho(m-\lambda^2) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ m, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{cases}$$

или еще такъ

$$\sum_{\lambda^2 \leqq m} (m-3\lambda^2)\chi(m-\lambda^2) = 0,$$

положивъ

$$\chi(0) = 1, \quad \chi(m) = 4\varrho(m) \quad \text{при } m > 0.$$

Но съ другой стороны

$$\sum_{\lambda^2 \leqq m} (m-3\lambda^2) N_2(m-\lambda^2) = 0; \quad N_2(0) = 1,$$

слѣдовательно по замѣченному выше

$$N_2(m) = 4\varrho(m).$$

Такимъ образомъ очень просто получился всѣмъ извѣстный результатъ: число представленій какого угодно числа m суммою 2 квадратовъ равно учетверенной разности между числомъ его дѣлителей формы $4k+1$ и числомъ дѣлителей формы $4k-1$.

Очевидно, что только удвоенное нечетное число можетъ быть представлено суммою двухъ нечетныхъ квадратовъ. Путемъ простѣйшихъ ариѳметическихъ соображеній легко найти, что число рѣшеній уравненія

$$2m = \lambda^2 + \mu^2$$

гдѣ m, λ, μ нечетныя и положительныя числа, равно $\varrho(m)$; иначе говоря

$$R_2(2m) = \varrho(m)\,, \text{ если } m \text{ нечетное.}$$

§ 4. Въ тождествѣ (C′) § 3 положимъ одинъ разъ

$$\psi(x,\, y) = x^3 y\,,$$

другой разъ

$$\psi(x\,,\, y) = xy^3\,.$$

Послѣ должныхъ упрощеній получимъ

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (m-7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2 + \sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (3m\lambda^2 - 5\lambda^4)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ m^2, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (m-7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \delta^2 + 4\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (3m\lambda^2 - 5\lambda^4)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 4m^2 - 3m, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{cases} \qquad \text{(b*)}$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (m-7\lambda^2)(4d^2-\delta^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 3m, \text{ если } m \text{ квадратъ,} \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

каковое равенство можно представить еще подъ видомъ

$$\sum_{\lambda^2 \leqq m} (m-7\lambda^2)\, \chi(m-\lambda^2) = 0 \qquad \text{(c*)}$$

положивъ

$$\chi(m) = 4\sum_{m=d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (4d^2 - \delta^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \text{ при } m > 0$$

$$\chi(0) = 1.$$

Изъ (c^*) заключаемъ, что

$$N_6(m) = 4 \sum_{m=d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (4d^2 - \delta^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}$$

Введемъ вмѣстѣ съ Ліувиллемъ числовую функцію

$$\varrho_2(m) = \sum_{m=d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2;$$

тогда, положивъ $m = 2^\alpha n$, гдѣ n нечетное, легко найдемъ

$$N_6(2^\alpha n) = 4\,[2^{2\alpha+2} - (-1)^{\frac{n-1}{2}}]\,\varrho_2(n); \quad \alpha \geqq 0,\ n \text{ нечетное}.$$

Такою формулою опредѣляется число представленій всякаго числа суммою 6-ти квадратовъ. Этотъ результатъ содержится implicite въ формулахъ Fundamenta nova Якоби, но опредѣленно былъ впервые высказанъ Эйзенштейномъ.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію числа представленій m суммою квадратовъ шести нечетныхъ и положительныхъ чиселъ. Ясно, что для возможности таковыхъ представленій m должно быть вида $8n+6$, т. е. должно быть удвоеннымъ нечетнымъ числомъ вида $4n+3$. Подобно тому, какъ въ предыдущемъ изслѣдованіи мы опирались на тождество (C) Ліувилля, такъ точно въ новомъ изслѣдованіи мы будемъ опираться на другое тождество, котораго правда, нѣтъ у Ліувилля; однако оно вытекаетъ изъ тѣхъ же источниковъ, какъ и Ліувиллевы тождества. Пусть нечетное число n всѣми возможными способами представляется въ видѣ

$$n = \lambda^2 + 2d\delta,$$

гдѣ λ произвольное нечетное число, d и δ положительныя числа и притомъ δ нечетное. Обозначая черезъ $F(x, y, z)$ нечетную по каждому изъ перемѣнныхъ функцію и притомъ такую, что

$$F(0, y, z) = 0, \quad F(x, 0, z) = 0, \quad F(x, y, 0) = 0,$$

если только соотвѣтствующій аргументъ можетъ обращаться въ нуль, распространимъ на всѣ упомянутыя выше представленія сумму

$$\Sigma F(\lambda+d,\ \delta-\lambda,\ \lambda+d-\delta);$$

тогда имѣемъ тождество

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=\lambda^2+2d\delta;\ \delta \text{ неч.}} F(\lambda+d,\ \delta-\lambda,\ \lambda+d-\delta) = 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ &\sum_{n=\lambda^2+2d\delta;\ \delta \text{ неч.}} F(\lambda+d,\ \delta-\lambda,\ \lambda+d-\delta) = \sum_{s=1}^{\frac{\sqrt{n}-1}{2}} F(\sqrt{n}\ 2s,\ 2s), \text{ если } n \text{ квадратъ} \end{aligned}\right\} \quad \text{(D)}$$

Если $n \equiv 3 \,(\mathrm{Mod}\ 4)$, то $\lambda + d$, $\delta - \lambda$ четныя, а $\lambda + d - \delta$ нечетное; въ этомъ случаѣ условіе $F(x, y, 0) = 0$ излишне. Полагаемъ

$$F(x, y, z) = (-1)^{\frac{x-z-1}{2}} \psi(x, y),$$

причемъ

$$\psi(-x, y) = -\psi(x, y);\ \psi(x, -y) = -\psi(x, y)$$
$$\psi(0, y) = \psi(x, 0) = 0;$$

тогда имѣемъ тождество

$$\sum_{n=\lambda^2+2d\delta;\ n\equiv 3\,(\mathrm{Mod}\ 4)} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(\lambda + d, \delta - \lambda) = 0 \qquad (\mathrm{D}')$$

Взявъ здѣсь одинъ разъ

$$\psi(x, y) = x^3 y,$$

другой разъ

$$\psi(x, y) = xy^3,$$

послѣ должныхъ упрощеній получимъ:

$$\sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (n - 7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2 + \sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (3n\lambda^2 - 5\lambda^4)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (n - 7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \delta^2 + \sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (3n\lambda^2 - 5\lambda^4)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = 0$$

откуда

$$\sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (n - 7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} (d^2 - \delta^2) = 0 \qquad (\mathrm{d})$$

Здѣсь n обозначаетъ нечетное число $\equiv 3\,(\mathrm{Mod}\ 4)$. Возьмемъ $n = 8k + 7$; тогда изъ равенства

$$n = \lambda^2 + 2d\delta$$

увидимъ, что $d\delta \equiv 3\,(\mathrm{Mod}\ 4)$; а это позволитъ намъ написать равенство (d) въ такомъ видѣ

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\ldots} (n - 7\lambda^2)\, \varrho_2\left(\frac{n-\lambda^2}{2}\right) = 0 \qquad (\mathrm{d}^*)$$

или

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\ldots} (n - 7\lambda^2)\, \chi(n - \lambda^2) = 0 \qquad (\mathrm{d}^{**})$$

если положимъ

$$\chi(n) = \varrho_2\left(\frac{n}{2}\right).$$

Съ другой стороны имѣемъ для всякаго числа вида $n = 8k + 7$

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\ldots} (n - 7\lambda^2)\, R_6(n - \lambda^2) = 0 \qquad (\mathrm{e})$$

Вслѣдствіе равенствъ (e) и (d**) и принимая во вниманіе, что

$$R_6(6) = 1;\quad \varrho_2(3) = 8$$

находимъ окончательный результатъ

$$R_6(8k+6)=\frac{1}{8}\varrho_2(4k+3)$$

§ 5. Примѣнимъ тотъ же методъ къ случаю четырехъ и восьми квадратовъ. Приступая къ изслѣдованію перваго, положимъ въ тождествѣ (C) § 3

$$F(x,\ y,\ z)=xyz$$

Послѣ должныхъ упрощеній найдемъ:

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta,\ \delta\text{ неч.}}(m-5\lambda^2)(2d-\delta)=\left\{\begin{array}{l}0,\text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ \dfrac{m(4m-1)}{3},\text{ если } m \text{ квадратъ}\end{array}\right\} \qquad \text{(f)}$$

Легко усмотрѣть, что сумма

$$\sum_{m-\lambda^2=d\delta;\ \delta\text{ неч.}}(2d-\delta)$$

равна суммѣ всѣхъ дѣлителей $m-\lambda^2$, такъ что при знакоположеніяхъ Ліувилля

$$\sum_{m-\lambda^2=d\delta;\ \delta\text{ неч.}}(2d-\delta)=\zeta_1(m-\lambda^2)$$

Принявъ это во вниманіе, вмѣсто (f) получаемъ:

$$\sum(m-5\lambda^2)\,\zeta_1(m-\lambda^2)=\left\{\begin{array}{l}0,\text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ \dfrac{m(4m-1)}{3},\text{ если } m \text{ квадратъ}\end{array}\right\} \qquad \text{(f*)}$$

Тождество (D) предыдущаго § 4 остается въ силѣ и при n четномъ; только въ этомъ случаѣ должно, очевидно, считать λ четнымъ [1])

Полагая въ немъ

$$F(x,\ y,\ z)=xyz\,,$$

получимъ по замѣнѣ n на m и $2d$ на Δ:

$$\sum_{m=\lambda^2+\Delta\delta;\ \delta\text{ неч.},\ \lambda\equiv m(\mathrm{Mod}\ 2)}(m-5\lambda^2)(\Delta-2\delta)=\left\{\begin{array}{l}0,\text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ \dfrac{2m(m-1)}{3},\text{ если } m \text{ квадратъ}\end{array}\right\} \qquad \text{(g)}$$

Обозначивъ черезъ $\overline{\zeta_1}(m)$ сумму *нечетныхъ* дѣлителей m, послѣднее равенство можемъ представить такъ

$$\sum_{\lambda\equiv m(\mathrm{Mod}\ 2)}(m-5\lambda^2)\{\zeta_1(m-\lambda^2)-3\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2)\}=\left\{\begin{array}{l}0,\text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ \dfrac{4m(m-1)}{3},\text{ если } m \text{ квадр.}\end{array}\right\} \qquad \text{(g*)}$$

---

[1]) Сверхъ того правая часть при n четномъ и равномъ квадрату будетъ равна

$$\sum_{s-1}^{\frac{1}{2}\sqrt{n}} F(\sqrt{n},\ 2s-1,\ 2s-1).$$

Здѣсь суммированіе распространяется на всѣ числа λ, удовлетворяющія неравенству: $\lambda^2 < m$ и сравнимыя съ m по модулю 2. Сличеніе равенствъ (f*) и (g*) легко приводитъ къ слѣдующему результату:

$$\sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots}(m-5\lambda^2)(2+(-1)^{m-\lambda^2})\,\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ m, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{cases}$$

Положимъ

$$\chi(m) = 8\,(2+(-1)^m)\,\overline{\zeta_1}(m) \text{ при } m>0$$
$$\chi(0) = 1\,;$$

тогда предыдущее равенство можетъ быть представлено такъ

$$\sum_{\lambda^2 \leqq m}(m-5\lambda^2)\,\chi(m-\lambda^2) = 0,$$

откуда получаемъ

$$N_4(m) = 8(2+(-1)^m)\overline{\zeta_1}(m).$$

Это равенство выражаетъ знаменитую теорему Якоби (Fund. nova, § 40): число представленій числа суммою 4-хъ квáдратовъ равняется: для нечетнаго числа—восьмикратной суммѣ его дѣлителей, а для четнаго двадцатичетырехкратной суммѣ его *нечетныхъ* дѣлителей.

Въ равенствѣ (g) будемъ считать m нечетнымъ числомъ вида $8k+5$; тогда легко его представить въ формѣ

$$\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}(m-5\lambda^2)\,\zeta_1\left(\frac{m-\lambda^2}{4}\right) = 0$$

или еще въ формѣ

$$\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}(m-5\lambda^2)\,\chi(m-\lambda^2) = 0, \text{ положивъ } \chi(k) = \zeta_1\left(\frac{k}{4}\right) \text{ при } k \equiv 0 \,(\mathrm{Mod}\ 4)$$

Но съ другой стороны

$$\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}(m-5\lambda^2)\,R_4(m-\lambda^2) = 0$$

и

$$R_4(4) = 1\,; \quad \chi(4) = 1$$

Сличеніе обоихъ равенствъ позволитъ намъ заключить, что вообще

$$R_4(8k+4) = \chi(8k+4)$$

или въ другой формѣ

$$R_4(4m) = \zeta_1(m)$$

при m нечетномъ. Очевидно, что только учетверенныя нечетныя числа могутъ быть представлены въ видѣ суммы 4 нечетныхъ квадратовъ.

§ 6. Въ случаѣ 8 квадратовъ вопросъ о представленіи чиселъ можетъ быть рѣшенъ съ помощью тѣхъ же соображеній; только, къ сожалѣнію, относящіяся сюда вычисленія нѣсколько сложны. Въ тождествѣ (c) § 3 возьмемъ

$$F(x,\ y,\ z) = (-1)^{\frac{y-1}{2}+\frac{z-1}{2}}\,\psi(x,\ y),$$

гдѣ функція $\psi(x,\ y)$ нечетна по отношенію къ x и четна по отношенію къ y, т. е.

$$\psi(-x,\ y) = -\psi(x,\ y);\quad \psi(x, -y) = \psi(x,\ y);$$

получимъ слѣдующее тождество

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}} (-1)^{\lambda}\psi(d+\lambda,\ \delta-2\lambda) = \left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{m-1}\sum\limits_{s=1}^{\sqrt{m}}\psi(\sqrt{m},\ 2s-1),\ \text{если } m \text{ квадратъ} \end{array}\right\} \quad (c^{**})$$

Положимъ въ немъ, во-первыхъ, $\psi(x,\ y) = x$; обозначивъ черезъ 2^{σ} наивысшую степень двухъ, дѣлящую $m-\lambda^2$, получимъ слѣдующій результатъ

$$\sum_{\lambda=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots} (-1)^{\lambda}2^{\sigma}\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) = \left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{есть } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{m-1}\ m,\ \text{если } m \text{ квадратъ} \end{array}\right\} \quad (a)$$

Полагая, во-вторыхъ, $\psi(x,\ y) = xy^2$, найдемъ

$$m\sum(-1)^{\lambda}\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) + \sum_{\lambda=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots}(-1)^{\lambda}\lambda^2(2^{\sigma+2}-5)\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{m-1}\dfrac{m(4m-1)}{3},\ \text{если } m \text{ квадратъ} \end{array}\right\}. \quad (b)$$

Положимъ, наконецъ, въ томъ же тождествѣ

$$\psi(x,\ y) = 8mx^3 - 18x^3y^2 - 15xy^4;$$

послѣ довольно длиннаго вычисленія получимъ слѣдующій результатъ

$$\Sigma(-1)^{\lambda}(m-9\lambda^2)(2^{3\sigma+3}-15)\overline{\zeta_3}(m-\lambda^2) +$$
$$+138\{\Sigma(-1)^{\lambda}\lambda^4(7-5.2^{\sigma})\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) + m\Sigma(-1)^{\lambda}\lambda^2(2^{\sigma+1}-3)\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2)\} -$$
$$-18m^2\Sigma(-1)^{\lambda}2^{\sigma}\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) = 0 \text{ или } (-1)^{m-1}m(-64m^2+46m-7)$$

Здѣсь мы обозначили черезъ $\overline{\zeta_3}(m-\lambda^2)$ сумму кубовъ нечетныхъ дѣлителей $m-\lambda^2$. Послѣднее равенство упрощается, если принять во вниманіе равенство (a); получается окончательный результатъ вида

$$P + 138Q = \left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{m}(46m^2-46m+7) \end{array}\right\} \quad (c)$$

гдѣ положено

$$P = \Sigma (-1)^{\lambda} (m - 9\lambda^2)(2^{3\sigma+3} - 15)\, \bar{\zeta}_3(m - \lambda^2)$$

$$Q = \Sigma (-1)^{\lambda} \lambda^4 (7 - 5 \,.\, 2^{\sigma})\, \bar{\zeta}_1(m - \lambda^2) + m \Sigma (-1)^{\lambda} \lambda^2 (2^{\sigma+1} - 3)\, \bar{\zeta}_1(m - \lambda^2)$$

$$\lambda = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Для полученія второго соотношенія между P и Q обратимся къ тождеству

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta} F(d+\lambda,\ \delta - 2\lambda,\ 2d + 2\lambda - \delta) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{s=1}^{2\sqrt{m}-1} F(\sqrt{m}, s, s) - \sum\limits_{t=1}^{\sqrt{m}-1} F(t, 2\sqrt{m}, 2t), \text{ если } m \text{ квадратъ} \\ 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \end{array} \right\} \qquad \text{(E)}$$

въ которомъ $F(x, y, z)$ нечетная функція, обращающаяся въ нуль всякій разъ, какъ $x=0$, или $y=0$, или $z=0$; суммированіе въ лѣвой части распространяется на всѣ представленія m въ видѣ:

$$m = \lambda^2 + d\delta,$$

гдѣ λ произвольное цѣлое число, а d и δ положительныя числа (*δ не обязательно нечетное*). Полагая въ (E) функцію $F(x, y, z)$ равной

$$F(x, y, z) = (-1)^x x^3 y z$$

получимъ такое равенство

$$\Sigma (-1)^{\lambda} (m - 9\lambda^2)(2^{3\sigma+3} - 15)\bar{\zeta}_3(m - \lambda^2) + 49 \Sigma (-1)^{\lambda} \lambda^4 (7 - 5\,.\,2^{\sigma}) \bar{\zeta}_1(m - \lambda^2) +$$

$$+ \frac{7}{2} m\, \Sigma (-1)^{\lambda} \lambda^2 (40\,.\,2^{\sigma} - 57)\, \bar{\zeta}_1(m - \lambda^2) -$$

$$- \frac{7}{2} m^2 \Sigma (-1)^{\lambda} (2^{\sigma+1} - 3) \bar{\zeta}_1(m - \lambda^2) = 0 \text{ или } (-1)^m \frac{7m(8m^2 - 11m + 6)}{6}$$

которое съ помощью равенствъ (a) и (b) приводится къ виду

$$P + 49Q = \left\{ \begin{array}{c} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^m \dfrac{7m(14m^2 - 14m + 6)}{6}, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{array} \right\} \qquad \text{(d)}$$

Изъ (c) и (d) находимъ

$$P = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^m 7m, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{array} \right.$$

или иначе

$$\sum (-1)^{\lambda} (m - 9\lambda^2)(2^{3\sigma+3} - 15)\bar{\zeta}_1(m - \lambda^2) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^m 7m, \text{ если } m \text{ квадр.} \end{array} \right\} \qquad \text{(e)}$$

Вводя числовую функцію

$$\chi(m)=16(-1)^m\sum_{d\delta=m}(-1)^d d^3 \quad \text{при } m>0$$

$$\chi(0)=1\,,$$

вмѣсто (е) легко получимъ

$$\sum_{\lambda^2\leqq m}(m-9\lambda^2)\,\chi(m-\lambda^2)=0\,,$$

откуда уже заключимъ, что

$$N_8(m)=(-1)^m\,16\sum_{d\delta=m}(-1)^d d^3;$$

здѣсь сумма берется по всѣмъ дѣлителямъ m. Если m нечетное число и $\zeta_3(m)$ обозначаетъ сумму кубовъ его дѣлителей, то

$$N_8(m)=16\zeta_3(m)$$

Если же m четное число $=2^\sigma n$, гдѣ n нечетное, то

$$N_8(m)=16\,.\,\frac{2^{3\sigma+3}-15}{7}\,\zeta_3(n)$$

Эти результаты впервые формулированы Эйзенштейномъ, хотя они легко получаются изъ формулъ Fundamenta. Можно было бы такимъ же образомъ разсмотрѣть вопросъ о числѣ представленій числа кратнаго 8 суммою 8-и нечетныхъ квадратовъ; но вслѣдствіе сложности связанныхъ съ этимъ вычисленій мы предпочитаемъ пока отложить разсмотрѣніе этого вопроса. Во всякомъ случаѣ ясно, что по причинѣ возрастающей сложности вычисленій едва-ли возможно надѣяться на успѣхъ разсмотрѣннаго способа въ примѣненіи къ 10 и 12 квадратамъ. Поэтому мы избираемъ другой путь и разсмотримъ вновь уже разобранные случаи 4, 6 и 8 квадратовъ, а затѣмъ аналогичными пріемами изслѣдуемъ случаи 10 и 12 квадратовъ.

§ 7. Второй способъ для рѣшенія вопросовъ о представленіи чиселъ суммою квадратовъ основанъ на примѣненіи тождествъ Ліувилля другого характера. Намъ постоянно придется ссылаться на одни и тѣже тождества; для удобства мы соберемъ ихъ вмѣстѣ въ этомъ §. Во всѣ эти тождества входитъ четная функція $f(x)$, т. е. такая, которая при разсматриваемыхъ значеніяхъ аргумента удовлетворяетъ условію

$$f(-x)=f(x).$$

Пусть m нечетное число и $\alpha>0$. Четное число $2^\alpha m$ всѣми возможными способами представляется въ видѣ суммы

$$2^\alpha m=r+s$$

двухъ нечетныхъ положительныхъ слагаемыхъ r и s; каждое изъ этихъ слагаемыхъ всѣми возможными способами представляется въ видѣ произведенія двухъ множителей:

$$r=\lambda\mu\,;\ s=\nu\varrho$$

Такимъ образомъ получаются всѣ представленія $2^\alpha m$ въ формѣ

$$2^\alpha m=\lambda\mu+\nu\varrho$$

Распространивъ на всѣ такія представленія сумму

$$\Sigma[f(\lambda-\nu)-f(\lambda+\nu)]$$

получаемъ тождество

$$\sum_{2^\alpha m=\lambda\mu+\nu\rho}[f(\lambda-\nu)-f(\lambda+\nu)]=2^{\alpha-1}\sum_{m=d\delta}d\,[f(0)-f(2^\alpha d)] \qquad \text{(I)}$$

Обозначимъ по прежнему черезъ m нечетное число и положимъ $\alpha\geqq 0$. Число $2^\alpha m$ (четное или нечетное) всѣми возможными способами представимъ въ видѣ суммы

$$2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s$$

двухъ положительныхъ слагаемыхъ $2^\sigma r$ и $2^\tau s$, гдѣ r и s нечетныя числа, которыя всѣми возможными способами представляются въ видѣ произведенія двухъ множителей

$$r=\lambda\mu\,;\quad s=\nu\varrho$$

Такимъ образомъ получаются всѣ представленія $2^\alpha m$ въ формѣ

$$2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\varrho$$

Соотвѣтственно такимъ представленіямъ имѣемъ два тождества:

$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}[f(\lambda-\nu)-f(\lambda+\nu)]+\sum_{m=d\delta}[f(0)+2f(2)+\ldots+2f(d-1)]+S=2^\alpha f(0)\zeta_1(m), \quad \text{(II)}$$

гдѣ слѣдуетъ полагать $S=0$ въ случаѣ $\alpha=0$ и

$$S=\sum_{m=d\delta}d\,[f(2d)+2f(4d)+\ldots+2^{\alpha-1}f(2^\alpha d)]$$

въ случаѣ $\alpha>0$. Другое тождество будетъ такое:

$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}[f(2^\sigma\lambda-2^\tau\nu)+f(2^\sigma\lambda+2^\tau\nu)]=(3-2^\alpha)f(0)\zeta_1(m)+$$

$$+\sum_{m=d\delta}[2^\alpha d-(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}]f(2^\alpha d) \qquad \text{(III)}$$

Въ случѣ $\alpha=0$ одно изъ чиселъ σ, τ равно нулю, а другое больше нуля; не безполезно будетъ въ этомъ случаѣ тождество (II) представить такъ:

$$2\sum_{m=\lambda\mu+2\tau\nu\rho}[f(\lambda-v)-f(\lambda+v)]+\sum_{m=d\delta}[f(0)+2f(2)+\ldots+2f(d-1)]=f(0)\zeta_1(m) \quad \text{(IV)}$$

Наконецъ слѣдуетъ привести еще одно тождество, котораго Ліувилль не даетъ, но которое является очень важнымъ для дальнѣйшаго. Пусть M какое угодно число и $F(x)$ нечетная функція отъ x, равная 0 при $x=0$. Будемъ разсматривать всѣ представленія M въ видѣ

$$M=s^2+t^2+u^2+\ldots+w^2+d\delta \quad \text{(a)}$$

гдѣ s произвольное цѣлое число, $t, u, \ldots w$ (число этихъ чиселъ произвольно) по произволу четныя или нечетныя числа, d и δ числа положительныя и притомъ δ нечетное. Сумма

$$\Sigma(-1)^{s+t}F(d+s+\lambda t),$$

гдѣ λ произвольный параметръ, распространенная на всѣ представленія (a), будетъ всегда равна суммѣ

$$\Sigma(-1)^{s+t-1}sF(s+\lambda t),$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$M=s^2+t^2+u^2+\ldots+w^2 \quad \text{(b)}$$

гдѣ $t, u, \ldots w$ подлежатъ тѣмъ же ограниченіямъ, какъ въ равенствѣ (a) (напр., если въ (a) мы предполагаемъ t четнымъ, то и въ (b) должны будемъ предполагать t четнымъ). Такимъ образомъ имѣемъ тождество

$$\sum_{M=s^2+t^2+u^2+\ldots+w^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}}(-1)^{s+t}F(d+s+\lambda t)=\sum_{M=s^2+t^2+u^2+\ldots+w^2;\ s>0}(-1)^{s+t-1}sF(s+\lambda t) \quad \text{(V)}$$

Доказательство его не представляетъ никакихъ затрудненій и потому мы его опускаемъ. Наконецъ, условимся еще употреблять слѣдующія обозначенія. Если разсматриваются такія представленія числа m суммою p квадратовъ, въ коихъ q первыхъ квадратовъ нечетные съ положительными корнями, а остальные четные ($\gtreqless 0$), то число ихъ будемъ обозначать знакомъ

$$N_p(m, q)$$

При такомъ обозначеніи имѣемъ очевидно

$$N_p(m)=N_p(4m, 0)$$
$$R_p(m)=N_p(m, p),$$

гдѣ $N_p(m)$ и $R_p(m)$ имѣютъ прежній смыслъ.

§ 8. Въ тождествѣ (I) § 7 будемъ считать $\alpha=1$ и положимъ

$$f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}},$$

что возможно, такъ какъ всѣ аргументы подъ знакомъ функціи $f(x)$ въ этомъ тождествѣ четные.

Тогда послѣ простыхъ преобразованій получимъ

$$\sum_{2m=r+s}\varrho(r)\,\varrho(s)=\zeta_1(m)$$

Такъ какъ $\varrho(r)$ и $\varrho(s)$ равны числамъ представленій $2r$ и $2s$ суммами двухъ квадратовъ нечетныхъ положительныхъ чиселъ, то нетрудно сообразить, что предыдущее равенство рѣшаетъ вопросъ о представленіи числа $4m$ суммою четырехъ нечетныхъ квадратовъ съ положительными корнями; получается прежній результатъ:

$$R_4(4m)=\zeta_1(m).$$

Полагая $f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}$ въ тождествѣ (IV) § 7, очень просто получимъ такое равенство

$$4\sum_{m=r+2^\tau s}\varrho(r)\varrho(s)+\varrho(m)=\zeta_1(m)$$

или

$$\sum_{m=r+2^\tau s}4\varrho(r).4\varrho(s)+4\varrho(m)=4\zeta_1(m)$$

Принявъ во вниманіе, что $4\varrho(r)$ и $4\varrho(s)$ соотвѣтственно равны числамъ представленій r и $2^\tau s$ суммами двухъ квадратовъ, легко сообразимъ, что сумма $\Sigma 4\varrho(r).4\varrho(s)$ равна числу такихъ рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+t^2,$$

гдѣ $x+y$ нечетное число и z^2+t^2 не$=0$. Но $4\varrho(m)$ выражаетъ число рѣшеній того же уравненія, гдѣ $z=0$ и $t=0$. Слѣдовательно, число всѣхъ рѣшеній предыдущаго уравненія, гдѣ x и y разной четности, равно $4\zeta_1(m)$, но легко убѣдиться, что число такихъ рѣшеній равно половинѣ числа всѣхъ представленій m суммою 4-хъ квадратовъ. Поэтому

$$N_4(m)=8\zeta_1(m).$$

Наконецъ, въ тождествѣ (II) § 7 будемъ считать $\alpha>0$ и опять положимъ $f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}$; получимъ такое равенство

$$2\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}\varrho(r)\,\varrho(s)+\varrho(m)=3\zeta_1(m)$$

или
$$\sum_{2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s} 4\varrho(r).4\varrho(s) + 8\varrho(m) = 24\zeta_1(m)$$

Сумма въ лѣвой части этого равенства равна, очевидно, числу такихъ рѣшеній уравненія
$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$
гдѣ $x^2 + y^2$ не$=0$ и $z^2 + t^2$ не$=0$; но $8\varrho(m)$ равно числу всѣхъ остальныхъ. Слѣдовательно
$$N_4(2^\alpha m) = 24\zeta_1(m)\,,\ \text{если}\ \alpha > 0$$

§ 9. Перейдемъ къ случаю 8-и квадратовъ. Въ тождествѣ (I) § 7 положимъ $f(x) = x^2$; получимъ послѣ должныхъ упрощеній
$$4\sum_{2^\alpha m = r+s} \zeta_1(r)\,\zeta_1(s) = 2^{3\alpha-1}\zeta_3(m)$$

Это равенство можно истолковать двояко. Замѣчая, по предыдущему, что $\zeta_1(r)$ и $\zeta_1(s)$—числа представленій $4r$ и $4s$ суммами четырехъ нечетныхъ положительныхъ квадратовъ, легко убѣждаемся, что $\Sigma\zeta_1(r)\zeta_1(s)$ есть число представленій $2^{\alpha+2}m$ $(=4r+4s)$ суммою восьми квадратовъ нечетныхъ положительныхъ чиселъ; слѣдовательно
$$R_8(2^{\alpha+2}m) = 2^{3\alpha-3}\zeta_3(m)\,;\quad \alpha \geqq 1\,.$$

Представимъ себѣ теперь, что ищутся представленія $2^{\alpha+2}m$ суммою 8-и квадратовъ, изъ коихъ 4 первыхъ нечетны съ положительными корнями, а остальные четны ($\gtreqless 0$). Всѣ такія представленія могутъ быть найдены, если мы всѣми возможными способами положимъ
$$2^{\alpha+2}m = 4r + 4s\,,$$
гдѣ r неч. число >0 (а потому и s неч. при $\alpha>0$), но $<2^\alpha m$, и затѣмъ соотвѣтственно каждому такому представленію разложимъ $4r$ на сумму четырехъ нечетныхъ положительныхъ квадратовъ (число такихъ разложеній $=\zeta_1(r)$), а $4s$ на сумму четырехъ четныхъ квадратовъ (число такихъ разложеній $=8\zeta_1(s)$). Полное число искомыхъ представленій $N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)$ будетъ равно $\sum_{2^\alpha m = r+s} \zeta_1(r).8\zeta_1(s)$, такъ что, вслѣдствіе предыдущаго равенства,
$$N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4) = 2^{3\alpha}\zeta_3(m)$$

При выводѣ предполагалось $\alpha > 0$; но равенство, какъ видно изъ послѣдующаго, справедливо и при $\alpha = 0$. Теперь въ тождествѣ (IV) § 7 опять положимъ $f(x) = x^2$; получимъ
$$24\sum_{m = r + 2^\tau s} \zeta_1(r).\zeta_1(s) + \zeta_1(m) = \zeta_3(m)$$

Это равенство вновь можно истолковать двояко. Во-первыхъ, сумму $\Sigma\zeta_1(r).24\zeta_1(s)$ можно истолковать, какъ число представленій $4m$ суммою 8 квадратовъ, изъ коихъ первые 4 нечетны съ положительными корнями, а остальные четны, но не всѣ равны нулю; число же такихъ представленій, гдѣ всѣ четные квадраты равны 0, будетъ $\zeta_1(m)$. Отсюда и изъ выведеннаго равенства находимъ

$$N_8(4m,\ 4) = \zeta_3(m).$$

Во-вторыхъ, сумму $\Sigma 8\zeta_1(r).24\zeta_1(s) + 8\zeta_1(m)$ можно истолковать, какъ число представленій нечетнаго числа m суммою 8 квадратовъ, изъ которыхъ первые четыре имѣютъ нечетную сумму; а это число, очевидно, равно $\frac{1}{2} N_8(m)$. Слѣдовательно

$$N_8(m) = 16\zeta_3(m).$$

Положимъ, наконецъ, $f(x) = x^2$ въ равенствѣ (II) § 7, гдѣ мы предполагаемъ $\alpha > 0$, т. е. число $2^\alpha m$ четнымъ; получимъ въ результатѣ простыхъ вычисленій равенство

$$24 \sum_{2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s} \zeta_1(r)\zeta_1(s) = 2(\zeta_3(m) - \zeta_1(m)) + 24 . \frac{2^{3\alpha} - 1}{7} \zeta_1(m)$$

Лѣвую часть этого равенства можно истолковать такимъ образомъ. Обратимъ вниманіе на тѣ представленія $2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s$, гдѣ σ и τ равны 0; соотвѣтствующая такимъ представленіямъ часть суммы $24\Sigma\zeta_1(r)\zeta_1(s)$ равна $\frac{3}{8}$ числа P представленій $2^\alpha m$ суммою 8-и квадратовъ, гдѣ сумма четырехъ первыхъ квадратовъ нечетная. Часть же суммы $24\Sigma\zeta_1(r)\zeta_1(s)$, соотвѣтствующая представленіямъ $2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s$, гдѣ $\sigma > 0$, $\tau > 0$, равна $\frac{1}{24}$ числа представленій $2^\alpha m$ суммою 8-и квадратовъ, гдѣ сумма четырехъ первыхъ квадратовъ четная, равно какъ и сумма четырехъ послѣднихъ; при чемъ ни одна изъ этихъ суммъ не равна нулю. Число представленій, гдѣ одна изъ этихъ суммъ равна 0 будетъ по предыдущему $48\zeta_1(m)$. Обозначая черезъ Q число всѣхъ представленій $2^\alpha m$ суммою 8-и квадратовъ, гдѣ четыре первые имѣютъ четную сумму, получимъ на основаніи предыдущаго равенства

$$9P + Q = \left(48 + 24^2 . \frac{2^{3\alpha} - 1}{7}\right) \zeta_3(m).$$

Но очевидно, что

$$N_8(2^\alpha m)=P+Q;$$

съ другой же стороны легко убѣдиться въ справедливости равенства

$$P=8N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)=2^{3\alpha+3}\zeta_3(m).$$

Принявъ это во вниманіе, получимъ окончательно

$$N_8(2^\alpha m)=16.\frac{2^{3\alpha+3}-15}{7}\zeta_3(m) \text{ при } \alpha>0.$$

Отмѣтимъ еще простое слѣдствіе выведенныхъ равенствъ

$$\zeta_3(m)=\frac{8}{15}N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)-\frac{7}{16.15}N_8(2^{\alpha+2}m,\ 0) \text{ при } \alpha>0.$$

§ 10. Разсмотримъ теперь случай 6 квадратовъ. Въ равенствѣ (III) § 7, гдѣ мы считаемъ $\alpha\geqq 0$, не исключая знака равенства, положимъ $f(x)=x^2$; получается результатъ вида

$$2\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}2^{2\sigma}\lambda^2(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}+2\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}2^{2\tau}\nu^2(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}+\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}2^{2\alpha}d^2=2^{3\alpha}\zeta_3(m),$$

который можно очевидно проще представить такъ:

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}2^{2\sigma}\varrho_2(r)\varrho(s)+2^{2\alpha}\varrho_2(m)=2^{3\alpha}\zeta_3(m) \qquad \text{(a)}$$

Будемъ разсматривать теперь представленія числа $2^{\alpha+2}m$ суммою 8-и квадратовъ, изъ которыхъ первые 4 нечетны съ положительными корнями, а остальные четны ($\gtreqless 0$).

Всѣ эти представленія можно представить происшедшими такимъ образомъ. Число $2^{\alpha+2}m$ всѣми способами представляется въ видѣ суммы

$$2^{\alpha+2}m=4m'+4m'',$$

гдѣ m' *положительное* цѣлое число, а $m''\geqq 0$; затѣмъ при каждомъ изъ такихъ представленій $4m'$ всѣми возможными способами представляется въ видѣ суммы шести квадратовъ, изъ коихъ первые 4 нечетны съ положительными корнями, а остающіеся два четны; $4m''$ всѣми возможными способами представляется въ видѣ суммы двухъ четныхъ квадратовъ. Число представленій, соотвѣтствующихъ даннымъ m' и m'', будетъ $N_6(4m',\ 4).N_2(4m'',\ 0)$; слѣдовательно полное число изобразится въ видѣ суммы

$$\sum_{2^{\alpha+2}m=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0;}N_6(4m',\ 4)\,N_2(4m'',\ 0)=N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)$$

которую можно представить такъ

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s;\ r \text{ и } s \text{ неч.} >0} \varrho(s)\, N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)+N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)=N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4) \qquad (\mathfrak{b})$$

Принявъ во вниманіе, что

$$N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)=2^{3\alpha}\zeta_3(m)\,,$$

изъ сравненія равенствъ (a) и ($\mathfrak{b}$) выведемъ

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s} \varrho(s)\,.\,2^{2\sigma}\varrho_2(r)+2^{2\alpha}\varrho_2(m)=4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}\varrho(s)\,N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)+N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4) \qquad (c)$$

Это равенство приводитъ къ заключенію: если мы предположимъ, что для всѣхъ чиселъ вида $2^{\sigma+2}r$, гдѣ r нечетное, *меньшихъ* числа $2^{\alpha+2}m$ справедливо равенство

$$N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)=2^{2\sigma}\varrho_2(r)\,,$$

то будемъ имѣть и $N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)=2^{2\alpha}\varrho_2(m)$. Но для наименьшаго числа вида $2^{\alpha+2}m$, именно 4-хъ, непосредственная провѣрка даетъ результатъ $N_6(4,4)=2^0\varrho_2(1)$; слѣдовательно изъ (c) по индукціи выводимъ общее равенство

$$N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)=2^{2\alpha}\varrho_2(m) \qquad (A)$$

Положимъ теперь въ равенствѣ (II) § 7 функцію $f(x)$ равной

$$f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}x^2;$$

получается результатъ вида

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}.\lambda^2(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}+\sum_{m=d\delta}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2-\sum_{m=d\delta}(-1)^{\frac{d-1}{2}}+$$
$$+\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если}\ \alpha=0\\ \dfrac{2^{3\alpha+2}-60}{7}\zeta_3(m),\ \text{если}\ \alpha>0\end{array}\right\}=0. \qquad (d)$$

Полагая

$$\Omega=\frac{1}{4}N_8(2^{\alpha+2}m,\ 0)-4N_8(2^{\alpha+2},\ 4)$$

легко находимъ

$$\Omega=4.\frac{2^{3\alpha}-15}{7}\zeta_3(m)\ \text{при}\ \alpha>0$$

и

$$\Omega=0\ \text{при}\ \alpha=0$$

Слѣдовательно вмѣсто (d) можемъ написать

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}(-1)^{\frac{r-1}{2}}\varrho_2(r)\,.\,\varrho(s)+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\varrho_2(m)=4N_8(2^{\alpha+2}m,4)-\frac{1}{4}N(2^{\alpha+2}m,0)+\varrho(m)\qquad\text{(e)}$$

такъ какъ для всякаго нечетнаго числа k

$$\sum_{d\delta=k}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2=(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varrho_2(k)\,.\;\;.$$

Для удобства введемъ въ разсмотрѣніе слѣдующую числовую функцію. Разсматривая число $4a$ и называя черезъ 2^γ наивысшую степень 2, дѣлящую a, а частное отъ этого дѣленія черезъ b, положимъ

$$\chi(4a)=\sum_{d\delta=b}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2=(-1)^{\frac{b-1}{2}}\varrho_2(b)$$

при $a>0$; согласимся также считать $\chi(0)=-\frac{1}{4}$. Равнымъ образомъ будемъ считать $\varrho(0)=\frac{1}{4}$. Тогда равенство (e) можно написать такъ

$$4\sum_{4p=4m'+4m'';\;m'\geqq 0;\;m''\geqq 0}\chi(4m')\,\varrho(4m'')=4N_8(4p,4)-\frac{1}{4}N_8(4p,0)\,,\qquad\text{(e*)}$$

гдѣ мы положили

$$p=2^\alpha m.$$

Съ другой стороны по предыдущему имѣемъ

$$N_8(4p,\;4)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\;m'\geqq 0;\;m''\geqq 0}N_6(4m',\;4)\,\varrho(4m'')$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ, получаемъ

$$N_8(4p,\;0)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\;m'>0;\;m''\gtreqless 0}N_6(4m',\;0)\,\varrho(4m'')+N_6(4p,\;0)+4\varrho(4p).$$

Слѣдовательно можемъ написать

$$4N_8(4p,\;4)-\frac{1}{4}N_8(4p,\;0)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\;m'\geqq 0;\;m''\geqq 0}\left\{4N_6(4m',\;4)-\frac{1}{4}N_6(4m',\;0)\right\}\varrho(4m''),$$

согласившись полагать

$$4N_6(0,\;4)-\frac{1}{4}N_6(0,\;0)=-\frac{1}{4}\,;\;\varrho(0)=\frac{1}{4}$$

Если еще для краткости положимъ

$$\psi(4n)=4N_6(4n,\;4)-\frac{1}{4}N_6(4n,\;0)$$

то вмѣсто (e*) можемъ написать равенство

$$\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'\geqq 0;\ m''\geqq 0} \chi(4m')\,\varrho(4m'') = \sum \psi(4m')\,\varrho(4m'').$$

Изъ этого равенства, предварительно непосредственно провѣривъ, что

$$\psi(4) = \chi(4)\,;\quad \psi(0) = \chi(0)\,,$$

по индукціи выведемъ общій результатъ: $\chi(4p) = \psi(4p)$ или

$$4N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4) - \frac{1}{4}N_6(2^{\alpha}m) = (-1)^{\frac{m-1}{2}})\varrho_2(m). \tag{B}$$

Изъ равенствъ (A) и (B) получаемъ:

$$N_6(2^{\alpha}m) = 4(2^{2\alpha+2} - (-1)^{\frac{m-1}{2}})\,\varrho_2(m).$$

§ 11. Способъ, которымъ мы будемъ рѣшать вопросъ о представленіи чиселъ суммою 12-ти квадратовъ, аналогиченъ употребленному при разсмотрѣніи случая 8-и квадратовъ. Предполагая $\alpha > 0$, положимъ въ тождествѣ (I) § 7

$$f(x) = x^4\,;$$

получимъ результатъ

$$16\sum_{2^{\alpha}m=r+s} \zeta_1(r)\,\zeta_3(s) = 2^{5\alpha-1}\zeta_5(m),$$

гдѣ черезъ $\zeta_5(m)$ обозначена сумма пятыхъ степеней дѣлителей m. Этотъ результатъ можетъ быть истолкованъ двоякимъ способомъ. Будемъ разсматривать представленія числа $2^{\alpha+2}m$ суммой 12 квадратовъ, среди которыхъ первые 4 нечетны съ положительными корнями, а остальные 8 четны. Очевидно, что для числа такихъ представленій имѣемъ равенство

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) = \sum_{2^{\alpha}m=r+s;\ r \text{ и } s \text{ неч.}} N_4(4r,\ 4)\,N_8(4s,\ 0)\,;$$

но

$$N_4(4r,\ 4) = \zeta_1(r)\,;\quad N_8(4s,\ 0) = 16\zeta_3(s)\,,$$

слѣдовательно по предыдущему равенству

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) = 2^{5\alpha-1}\zeta_5(m).$$

Равнымъ образомъ для числа такихъ представленій, гдѣ первые 8 квадратовъ нечетны съ положительными корнями, а остальные 4 четны, имѣемъ выраженіе

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = \sum_{2^{\alpha}m=r+s;\ r \text{ и } s \text{ неч.} >0} N_4(4r,\ 4)\,N_8(4s,\ 4)\,;$$

но

$$N_4(4r,\ 4) = \zeta_1(r); \quad N_8(4s,\ 8) = \zeta_1(s),$$

слѣдовательно

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = 2^{5\alpha-5}\zeta_5(m).$$

Отмѣтимъ слѣдующія равенства, какъ слѣдствія выведенныхъ,

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) - 16N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = 0 \text{ при } \alpha > 0 \tag{a}$$

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) + 16N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = 2^{5\alpha}\zeta_5(m). \tag{b}$$

Послѣднее изъ этихъ равенствъ справедливо и при $\alpha=0$, какъ мы сейчасъ докажемъ. Въ равенствѣ (IV) § 7 положимъ $f(x) = x^4$; послѣ всѣхъ упрощеній получится слѣдующій результатъ

$$16\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} \zeta_3(r)\,\zeta_1(s) + 16\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} \zeta_1(r)\zeta_3(s) + \frac{2}{3}\zeta_3(m) - \frac{7}{15}\zeta_1(m) = \frac{1}{5}\zeta_5(m) \tag{c}$$

который мы можемъ истолковать двоякимъ образомъ. По доказанному выше имѣемъ равенства

$$\zeta_3(s) = \frac{8}{15}N_8(2^{\tau+2}s,\ 4) - \frac{7}{16.15}N_8(2^{\tau+2}s,\ 0);\ \zeta_1(r) = N_4(4r,\ 4) = \frac{1}{8}N_4(4r, 0);$$

$$\zeta_3(r) = N_8(4r,\ 4) = \frac{1}{16}N_8(4r,\ 0);$$

слѣдовательно согласно равенству (c) имѣемъ

$$\frac{2}{3}\sum N_8(4r,4)\,N_4(2^{\tau+2}s,0) + \frac{128}{15}\sum N_4(4r,\ 4)\,N_8(2^{\tau+2}s,\ 4) -$$
$$- \frac{7}{15}\sum N_4(4r,4)\,N_8(2^{\tau+2}s,0) + \frac{2}{3}\zeta_3(m) - \frac{7}{15}\zeta_1(m) = \frac{1}{5}\zeta_5(m); \tag{d}$$

$$\frac{1}{24}\sum N_8(4r,0)\,N_4(2^{\tau+2}s,0) - \frac{7}{15}\sum N_4(4r,4)\,N_8(2^{\tau+2}s,0) +$$
$$+ \frac{128}{15}\sum N_4(4r,4)\,N_8(2^{\tau+2}s,4) + \frac{2}{3}\zeta_3(m) - \frac{7}{15}\zeta_1(m) = \frac{1}{5}\zeta_5(m). \tag{d*}$$

Сумма

$$\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s \text{ неч.}>0} N_8(4r,\ 4)\,N_4(2^{\tau+2}s,\ 0) + \zeta_3(m),$$

какъ легко убѣдиться, равна

$$N_{12}(4m,\ 4) - 8N_{12}(4m,\ 8)$$

Равнымъ образомъ

$$\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} N_4(4r,4)\,N_8(2^{\tau+2}s,0) + \zeta_1(m) = N_{12}(4m,4)$$

и

$$\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} N_4(4r,\ 4)\, N_8(2^{\tau+2}s,\ 4) = N_{12}(4m,\ 8).$$

Подставляя эти значенія суммъ въ равенство (d), найдемъ послѣ упрощеній

$$N_{12}(4m,\ 4) + 16 N_{12}(4m,\ 8) = \zeta_5(m). \qquad (b^*)$$

Точно такъ же легко найти, что

$$\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} N_8(4r,\ 0)\, N_4(2^{\tau+2}s,\ 0) + 16\zeta_3(m) = N_{12}(m) - 8N_{12}(4m,\ 4);$$

вслѣдствіе этого изъ равенства (d*) получимъ

$$\frac{5}{24} N_{12}(m) - 4N_{12}(4m,\ 4) + \frac{128}{3} N_{12}(4m,\ 8) = \zeta_5(m)$$

и изъ сравненія этого равенства съ (b*) выведемъ еще, что

$$N_{12}(m) = 24 N_{12}(4m,\ 4) - 128 N_{12}(4m,\ 8). \qquad (e)$$

Положимъ, наконецъ, въ равенствѣ (II) § 7, предполагая $\alpha > 0$,

$$f(x) = x^4;$$

послѣ упрощеній получимъ

$$16 \sum_{2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s;\ r \text{ и } s \text{ неч.}>0} \zeta_1(r)\,\zeta_3(s) + \frac{2}{3}\zeta_3(m) - \frac{7}{15}\zeta_1(m) = \left\{ \frac{2^{5\alpha+4} - 2^4}{31} + \frac{1}{5} \right\} \zeta_5(m). \qquad (f)$$

Сумма

$$16 \sum \zeta_1(r)\,\zeta_3(s),$$

соотвѣтствующая такимъ представленіямъ $2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s$, гдѣ $\sigma = \tau = 0$, была выше найдена равной $N_{12}(2^{\alpha+2}m, 4) = 16 N_{12}(2^{\alpha+2}m, 8) = 2^{5\alpha-1}\zeta_5(m)$. Остается разсмотрѣть сумму

$$16 \sum{}' \zeta_1(r)\,\zeta_3(s),$$

соотвѣтствующую представленіямъ $2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s$, гдѣ σ и τ больше 0. Эту сумму можно представить въ видѣ:

$$\frac{16}{45} P - \frac{7}{45.8} Q,$$

гдѣ положено для краткости

$$P = \Sigma N_4(2^{\sigma+2}r,\ 0)\, N_8(2^{\tau+2}s,\ 4); \quad 2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s;\ \sigma \text{ и } \tau > 0;\ r \text{ и } s > 0$$

$$Q = \Sigma N_4(2^{\sigma+2}r,\ 0)\, N_8(2^{\tau+2}s,\ 0); \quad 2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s;\ \sigma \text{ и } \tau > 0;\ r \text{ и } s > 0$$

Но легко убѣдиться въ справедливости равенствъ

$$P = N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) - 8N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) - N_8(^{\alpha+2}m, 4),$$

$$Q = N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0) - 8N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) - N_8(2^{\alpha+2}m,\ 0) - N_4(2^{\alpha+2}m,\ 0).$$

Пользуясь найденными результатами, послѣ всѣхъ упрощеній представляемъ равенство (f) въ видѣ

$$\frac{7}{8}N_{12}(2^\alpha m) = 68N_{12}(2^{\alpha+2}m, 4) - 128N_{12}(2^{\alpha+2}m, 8) - 45\left\{\frac{2^{5\alpha+4}-16}{31}+\frac{1}{5}\right\}\zeta_5(m),$$

откуда уже окончательно находимъ

$$N_{12}\,(2^\alpha m) = \frac{24}{31}(21+5\,.\,2^{5\alpha+1})\,\zeta_5(m) \text{ при } \alpha>0.$$

Вопросъ объ опредѣленіи числа представленій *четнаго* числа суммой 12-ти квадратовъ рѣшается этой формулой. Случай нечетнаго числа разсмотримъ въ слѣдующемъ §.

§ 12. Въ выраженіе для числа представленій нечетнаго числа суммою 12-ти квадратовъ входитъ совершенно особенная числовая функція, происхожденіе которой выяснится изъ слѣдующихъ соображеній. Въ § 7 было указано тождество (V); для нашего случая мы перепишемъ это тождество такъ:

$$\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{s+t}F(d+s+\lambda t) = \sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s>0} (-1)^{s+t-1}sF(s+\lambda t). \qquad \text{(A)}$$

Здѣсь подъ m мы понимаемъ произвольное цѣлое число, четное или нечетное. Будемъ считать u и v четными числами. Положимъ сначала $\lambda=0$ и за нечетную функцію $F(x)$ возьмемъ

$$F(x) = x^3;$$

послѣ упрощеній получимъ

$$\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta} (-1)^{s+t}(d^3+3ds^2) = -\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s>0} s^4. \qquad (\alpha)$$

Положимъ затѣмъ $\lambda=1$, оставляя функцію $F(x)$ безъ измѣненія; получимъ

$$\sum_{4m^2=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta} (-1)^{s+t}(d^3+3ds^2+3dt^2) = -\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s>0} s\,(s^3+3st^2). \qquad (\beta)$$

Изъ (α) и (β) найдемъ

$$\sum(-1)^{s+t}(-d^3+3dt^2-3ds^2) = \sum(s^4-3s^2t^2)$$

или еще проще

$$\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}} (-1)^{s+t} d^3 = -\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s>0} (s^4-3s^2t^2). \tag{B}$$

Сообразимъ теперь, какое значенiе имѣетъ сумма

$$\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta} (-1)^{s+t} d^3$$

Собирая въ этой суммѣ члены, соотвѣтствующiе опредѣленной системѣ значенiй чиселъ s, t, u, v, получаемъ сумму этихъ членовъ равной

$$(-1)^{s+t} \sum_{4m-s^2-t^2-u^2-v^2=d\delta} d^3$$

при чемъ суммированiе распространяется на всѣ представленiя числа $4m^2 - s^2 - t^2 - u^2 - v^2$ въ видѣ

$$\Omega = 4m - s^2 - t^2 - u^2 - v^2 = d\delta$$

съ нечетнымъ δ. Если $s \equiv 0$, $t \equiv 0$ (Mod 2), то $d \equiv 0$ (Mod 4); въ этомъ случаѣ

$$\sum d^3 = 2^6 N_8(\Omega,\ 4).$$

Если $s \equiv 1$, $t \equiv 1$ (Mod 2), то $d \equiv 2$ (Mod 4) и Ω есть удвоенное нечетное число. При представленiи Ω суммой 8 квадратовъ мы можемъ получить или 2 нечетныхъ квадрата или 6 нечетныхъ квадратовъ; отсюда легко вывести, что въ настоящемъ случаѣ

$$\sum d^3 = 8\{N_8(\Omega,\ 2) + 16 N_8(\Omega,\ 6)\}.$$

Если $s + t \equiv 1$ (Mod 2), то $\Omega \equiv -1$ (Mod 4). Въ представленiяхъ Ω суммою 8 квадратовъ число нечетныхъ квадратовъ будетъ или 3 или 7; откуда легко вывести, что въ этомъ случаѣ

$$\sum d^3 = 28 N_8(\Omega,\ 3) + 64 N_8(\Omega,\ 7).$$

Принимая все это во вниманiе, безъ труда убѣждаемся, что лѣвую часть равенства (B) можно представить въ видѣ

$$2^6 N_{12}(4m,\ 4) + 32 N_{12}(4m,\ 4) + 512 N_{12}(4m,\ 8) -$$
$$- 112 N_{12}(4m,\ 4) - 256 N_{12}(4m,\ 8) = 256 N_{12}(4m,\ 8) - 16 N_{12}(4m,\ 4);$$

слѣдовательно

$$16\,(N_{12}(4m,\ 4) - 16 N_{12}(4m,\ 8)) = \frac{1}{2} \sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2} (s^4 - 3s^2t^2).$$

Но при u и v четныхъ числа s и t должны быть четными; полагая

$$s = 2\lambda,\ \ t = 2\mu;\ \ u = 2\nu;\ \ v = 2\varrho$$

получаемъ окончательно

$$N_{12}(4m,\ 4) - 16N_{12}(4m,\ 8) = \frac{1}{2}\sum(\lambda^4 - 3\lambda^2\mu^2)\,, \tag{C}$$

причемъ суммированіе распространяется на *всѣ* рѣшенія уравненія

$$m = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2.$$

Выписавъ всѣ подобныя уравненія, возвысивъ ихъ въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$4\sum\lambda^4 + 12\sum\lambda^2\mu^2 = m^2N_4(m),$$

откуда уже легко получимъ

$$\frac{1}{2}\sum(\lambda^4 - 3\lambda^2\mu^2) = \sum_{m=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2}\lambda^4 - \frac{1}{8}m^2N_4(m).$$

Слѣдовательно

$$N_{12}(4m,\ 4) - 16N_{12}(4m,\ 8) = -\frac{1}{8}m^2N_4(m) + \sum_{m=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2}\lambda^4. \tag{D}$$

Для четнаго m мы убѣдились непосредственно, что

$$N_{12}(4m,\ 4) = 16N_{12}(4m,\ 8),$$

слѣдовательно *для четнаго m* имѣемъ замѣчательный результатъ

$$\sum_{m=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2}\lambda^4 = \frac{1}{8}m^2N_4(m).$$

Этотъ результатъ высказанъ Ліувиллемъ [1]) и былъ впервые доказанъ Штерномъ элементарными, но очень сложными разсужденіями [2]). При *нечетномъ m* равенство (D) есть новое уравненіе, которое вмѣстѣ съ ранѣе доказанными:

$$N_{12}(4m,\ 4) + 16N_{12}(4m,\ 8) = \zeta_5(m)$$
$$N_{12}(m) = 24N_{12}(4m,\ 4) - 128N_{12}(4m,\ 8)$$

---

[1]) Journ. de Math. 1858 p. 357.

[2]) Stern. Journ. für Math. Bd. 105 (1889).

даетъ

$$\left.\begin{aligned} N_{12}(4m,\ 4) &= -\frac{1}{2}m^2\zeta_1(m) + \frac{1}{2}\zeta_5(m) + \frac{1}{2}\sum\lambda^4 \\ 16N_{12}(4m,\ 8) &= +\frac{1}{2}m^2\zeta_1(m) + \frac{1}{2}\zeta_5(m) - \frac{1}{2}\sum\lambda^4 \\ N_{12}(m) &= 8\zeta_5(m) - 16m^2\zeta_1(m) + 16\sum\lambda^4 \end{aligned}\right\}\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2=m.$$

Послѣднее равенство вполнѣ согласуется съ даннымъ Ліувиллемъ [1]. Суммой 12 нечетныхъ квадратовъ можетъ представляться только учетверенное нечетное число. Простыми ариѳметическими разсужденіями, основанными на результатахъ § 8, легко придти къ такому равенству

$$N_{12}(4m,\ 12) = \frac{1}{8}N_{12}(4m,\ 8),$$

правая часть котораго извѣстна на основаніи предыдущаго.

§ 13. Вопросъ о представленіи чиселъ суммою 10-ти квадратовъ мы разсмотримъ совершенно такъ же, какъ выше разсмотрѣли случай 6-ти квадратовъ. Въ тождествѣ (III) § 7 возьмемъ

$$f(x) = x^4;$$

полученный результатъ можно представить въ видѣ

$$4\sum(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}2^{4\sigma}\lambda^4(-1)^{\frac{\rho-1}{2}} + 12\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho} 2^{2\sigma}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\lambda^2.2^{2\tau}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}\nu^2 +$$

$$+\sum_{d\delta=m}2^{4\alpha}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^4 = 2^{5\alpha}\zeta_5(m). \tag{A}$$

Правая часть этого равенства равна, какъ мы убѣдились въ § 11,

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) + 16N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8);$$

кромѣ того сумма

$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho} 2^{2\sigma}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\lambda^2.2^{2\tau}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}\nu^2$$

равна суммѣ

$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s} 2^{2\sigma}\varrho_2(r).2^{2\tau}\varrho_2(s),$$

которая легко находится равной

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8).$$

---

[1]) Journ. de Math. 1861 p. 237.

Вслѣдствіе этого равенство (A) можетъ быть написано такъ

$$4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0,\ m''\geqq 0}\chi(4m')\,\varrho(4m'')=N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+4N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8),\qquad (A^*)$$

если мы введемъ числовую функцію

$$\chi(4a)=\sum_{d\delta=a,\ \delta\text{ неч.}}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^4,$$

положимъ $2^{\alpha}m=p$ и согласимся считать $\varrho(0)=\frac{1}{4}$. Но путемъ простыхъ ариѳметическихъ разсужденій легко убѣждаемся, что

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0}N_{10}(4m',\ 4)\,\varrho(4m'')$$

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0}N_{10}(4m',\ 8)\,\varrho(4m'')$$

Слѣдовательно, положивъ вообще

$$\psi(4n)=N_{10}(4n,\ 4)+4N_{10}(4n,\ 8),$$

будемъ имѣть

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+4N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0}\psi(4m')\,\varrho(4m'').\qquad (B)$$

Сравнивая (B) съ (A) получаемъ

$$\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0}\chi(4m')\,\varrho(4m'')=\sum\psi(4m')\,\varrho(4m''),$$

откуда, замѣчая что

$$\chi(4)=\psi(4),$$

разсужденіемъ по индукціи выведемъ общее равенство

$$N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+4N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=\chi(2^{\alpha+2}m);$$

это равенство перепишемъ такъ

$$N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+4N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=2^{4\alpha}\varrho_4(m),\qquad (P)$$

полагая

$$\varrho_4(m)=\sum_{m=d\delta}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^4.$$

Возьмемъ теперь въ равенствѣ (II) § 7 функцію $f(x)$ равной

$$f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}x^4;$$

послѣ небольшихъ вычисленій получимъ

$$4\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^4(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}+12\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^2(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu^2+\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^4-$$

$$-6\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2+5\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}+\left\{\begin{matrix}0, \text{ если } \alpha=0\\ \left(\frac{2^{5\alpha+4}-2^4}{31}-32\right)\zeta_5(m), \text{ если } \alpha>0\end{matrix}\right\}=0. \quad \text{(C)}$$

Положимъ

$$-\Omega=2N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0)-48N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+256N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8);$$

тогда на основаніи результатовъ, полученныхъ при изслѣдованіи случая 12-ти квадратовъ, будемъ имѣть при $\alpha>0$

$$\Omega=-\left(\frac{2^{5\alpha+4}-2^4}{31}-32\right)\zeta_5(m),$$

а при $\alpha=0$

$$\Omega=0.$$

Затѣмъ, припомнивъ равенство

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\varrho_2(m)=4N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)-\frac{1}{4}N_6(2^{\alpha+2}m,\ 0),$$

можемъ представить сумму

$$12\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^2.(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu^2-6\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2$$

въ такомъ видѣ

$$192\sum N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 4)-24\sum N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 0)+$$

$$+\frac{3}{4}\sum N_6(2^{\sigma+2}r,\ 0)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 0)-24N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)+\frac{3}{2}N_6(2^{\alpha+2}m,0).$$

Но легко видѣть, что

$$\begin{aligned}&\Sigma N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 4)=N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8)\\&\Sigma N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 0)=N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)-N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)\\&\Sigma N_6(2^{\sigma+2}r,\ 0)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 0)=N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0)-2N_6(2^{\alpha+2}m,\ 0),\end{aligned}$$

вслѣдствіе чего получимъ

$$12\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^2(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu^2-6\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2=$$

$$=192N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8)-24N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+\frac{3}{4}N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0)$$

Принимая во вниманіе этотъ результатъ и данное выше выраженіе для Ω, мы можемъ переписать равенство (C) проще въ такой формѣ:

$$4\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^4(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}+\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^4+5\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}=$$

$$=\frac{5}{4}N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0)-24N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+64N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8). \qquad (C^*)$$

Введемъ теперь въ разсмотрѣніе числовую функцію, опредѣляемую равенствомъ

$$\chi(n)=\sum_{n=d\delta;\ \delta\text{ неч.}}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\delta^4 \quad \text{при } n>0$$

и согласимся полагать

$$\chi(0)=\frac{5}{4}.$$

Принявъ для краткости обозначеніе: $2^\alpha m=p$, мы можемъ при сдѣланныхъ соглашеніяхъ переписать равенство (C*) такъ

$$4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'\geqq0;\ m''\geqq0}\chi(4m')\varrho(4m'')=\frac{5}{4}N_{12}(2^{\alpha+2}m,0)-24N_{12}(2^{\alpha+2}m,4)+64N_{12}(2^{\alpha+2}m,8) \quad (C^{**})$$

Если мы положимъ

$$\psi(4n)=\frac{5}{4}N_{10}(4n,0)-24N_{10}(4n,4)+64N_{10}(4n,8)$$

при всякомъ $n\geqq0$, то легко убѣдимся, что правая часть равенства (C**) равна

$$4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'\geqq0,\ m''\geqq0}\psi(4m')\varrho(4m'')$$

Слѣдовательно имѣемъ при всякомъ p равенство

$$\sum\chi(4m')\varrho(4m'')=\sum\psi(4m')\varrho(4m'');\ 4p=4m'+4m'';\ m'\geqq0,\ m''\geqq0,$$

откуда, принявъ во вниманіе, что

$$\chi(4)=\psi(4p),$$

выводимъ по индукціи общее равенство

$$\chi(4p)=\psi(4p)$$

или въ другой формѣ

$$5N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 0)-96N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+256N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=4(-1)^{\frac{m-1}{2}}\varrho_4(m). \quad (Q)$$

Между тремя неизвѣстными

$$N_{10}(2^{\alpha}m);\ N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4);\ N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)$$

мы имѣемъ два уравненія: (P) и (Q). Третье уравненіе мы получимъ совершенно такимъ же образомъ, какъ мы получили уравненіе (c) въ § 12. Достаточно будетъ, исходя изъ общаго тождества

$$\sum_{2^{\alpha+2}m=s^2+t^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}}(-1)^{s+t}F(d+s+\lambda t)=\sum_{2^{\alpha+2}m=s^2+t^2;\ s>0}(-1)^{s+t-1}sF(s+\lambda t)$$

вывести тождество

$$\sum_{2^{\alpha+2}m=s^2+t^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}}(-1)^{s+t}d^3=-\sum_{2^{\alpha+2}m=s^2+t^2;\ s>0}(s^4-3s^2t^2)$$

а затѣмъ, разсуждая буквально такъ же, какъ въ упомянутомъ §, получить равенство

$$N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)-16N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=\frac{1}{2}\sum_{2^{\alpha}m=s^2+t^2}(s^4-3s^2t^2) \qquad \text{(R)}$$

гдѣ сумма распространяется на *всѣ* рѣшенія уравненія:

$$2^{\alpha}m=s^2+t^2.$$

Изъ уравненій (P), (Q), (R) находимъ

$$\left.\begin{aligned}
N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)&=\frac{1}{20}\,2^{4\alpha}\varrho_4(m)-\frac{1}{40}\sum(s^4-3s^2t^2)\\
N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)&=\frac{4}{5}\,2^{4\alpha}\varrho_4(m)+\frac{1}{10}\sum(s^4-3s^2t^2)\\
N_{10}(2^{\alpha}m)&=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha+4}+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right)\varrho_4(m)+\frac{16}{5}\sum(s^4-3s^2t^2)
\end{aligned}\right\}\ 2^{\alpha}m=\gamma^2+t^2;\ \alpha\geqq 0.$$

Такимъ образомъ знаменитый результатъ Ліувилля доказанъ изъ соображеній ариѳметическаго характера. Для полноты изслѣдованія остается еще рѣшить вопросъ о числѣ представленій чиселъ суммою 10-ти квадратовъ нечетныхъ положительныхъ чиселъ. Очевидно, что только числа вида $2m$, гдѣ $m\equiv 1$ (Mod 4) могутъ допускать такія представленія. Обозначая пока черезъ m произвольное нечетное число, въ тождествѣ

$$\sum_{2m=d'\delta'+d''\delta'';\ d',\ \delta',\ d'',\ \delta'' \text{ неч.}>0}[f(d'-d'')-f(d'+d'')]=\sum_{m=d\delta}d(f(0)-f(2d))$$

положимъ

$$f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}x^4;$$

по упрощеніи получимъ:

$$\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} d'^4(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} + 3\sum_{2m=d'\delta'+d''\delta''}(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} d'^2.(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} d''^2 = 4\zeta_5(m),$$

который, принявъ во вниманіе, что

$$N_2(2m,\ 2) = \varrho(m);\ N_6(2m,\ 2) = \varrho_2(m)$$
$$\zeta_5(m) = N_{12}(4m,\ 4) + 16N_{12}(4m,\ 8),$$

можемъ представить иначе такимъ образомъ

$$\sum_{4m=2m'+2m'';\ m' \text{ и } m'' \text{ неч.}>0} \varrho_4(m')\varrho(m'') = \mathrm{N}_{12}(4m,\ 4) + 64N_{12}(4m,\ 8).$$

Но легко убѣдиться въ томъ, что положивъ

$$\psi(m) = N_{10}(2m,\ 2) + 64N_{10}(2m,\ 6)$$

будемъ имѣть

$$\sum_{4m=2m'+2m'';\ m' \text{ и } m'' \text{ неч.}>0} \psi(m')\varrho(m'') = N_{12}(4m,\ 4) + 64N_{12}(4m,\ 8),$$

такъ что

$$\sum\varrho_4(m')\varrho(m'') = \sum_{4m=2m'+2m''}\psi(m')\varrho(m'').$$

Отсюда вслѣдствіе равенства

$$\psi(1) = \varrho_4(1)$$

найдемъ вообще

$$N_{10}(2m,\ 2) + 64N_{10}(2m,\ 6) = \varrho_4(m);\ m \text{ нечетное.} \tag{S}$$

Здѣсь m обозначаетъ любое нечетное число. Будемъ теперь считать $m \equiv 1$ (Mod 4). Тогда представленія $2m$ суммами 10-ти квадратовъ будутъ заключать 2, 6 или 10 нечетныхъ квадратовъ. Отсюда нетрудно вывести равенство

$$N_{10}(2m) = 180N_{10}(2m,\ 2) + 210.2^6N_{10}(2m, 6) + 2^{10}N_{10}(2m, 10),$$

которое можно написать такъ

$$N_{10}(2m) = 180\,N_{10}(2m,\ 2) + 106.2^{10}N_{10}(2m,\ 10) \tag{T}$$

обративъ вниманіе на легко доказываемое равенство

$$N_{10}(2m,\ 6) = 8N_{10}(2m,\ 10). \tag{U}$$

Съ помощью равенствъ (S), (T), (U) можно выразить $N_{10}(2m,\ 10)$ черезъ $N_{10}(2m)$; получается окончательно слѣдующій результатъ

$$2^7N_{10}(2m,\ 10) = \frac{1}{5}\varrho_4(m) + \frac{1}{10}\sum_{2m=s^2+t^2;\ s \text{ и } t>0}(s^4 - 3s^2t^2)$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія $2m = s^2 + t^2$ *въ положительныхъ числахъ.*

§ 14. Сравнивая между собою два метода, изложенныхъ въ этой работѣ для полученія числа представленій чиселъ суммами 4, 6, 8 квадратовъ, мы, безъ сомнѣнія, должны будемъ отдать предпочтеніе второму методу. Въ самомъ дѣлѣ, удачное примѣненіе перваго метода связано со случайнымъ счастливымъ выборомъ надлежащихъ тождествъ и входящихъ въ нихъ функцій; между тѣмъ какъ второй методъ, исходя изъ небольшаго числа основныхъ тождествъ, рѣшаетъ всѣ вопросы совершенно однообразно. Второй методъ, который по справедливости слѣдуетъ назвать Ліувиллевскимъ, должно также предпочесть примѣненію эллиптическихъ функцій. Примѣненіе эллиптическихъ функцій къ интересующимъ насъ вопросамъ основано на разсмотрѣніи различныхъ степеней ряда

$$\Theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}$$

и на двоякомъ выраженіи получающихся коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ количества q. Но примѣняющіеся для этого пріемы, по нашему мнѣнію, носятъ случайный характеръ. Этимъ, вѣроятно, объясняется то обстоятельство, что послѣ Якоби, давшаго выраженія для

$$\Theta^2,\ \Theta^4,\ \Theta^6,\ \Theta^8$$

только въ 1907 году Петръ въ упомянутой выше работѣ вывелъ съ помощью различныхъ вычислительныхъ ухищреній выраженіе для Θ^{10}. Большимъ преимуществомъ второго метода является также и то, что онъ вполнѣ выясняетъ происхожденіе болѣе сложныхъ ариѳметическихъ функцій, входящихъ въ выраженія для чиселъ представленій суммами 10 и 12 квадратовъ. Замѣчательно, что общая теорія квадратичныхъ формъ со многими перемѣнными, располагающая вообще гораздо болѣе могущественными средствами для рѣшенія вопросовъ, подобныхъ разобраннымъ, не приводитъ къ упомянутымъ ариѳметическимъ функціямъ и не даетъ возможности рѣшить вопросъ о представленіи чиселъ суммами 10 и 12 квадратовъ. Повидимому эта теорія нуждается въ нѣкоторыхъ дополненіяхъ. Въ чемъ должны заключаться таковыя—вопросъ весьма интересный и трудный.

20 Іюля 1912.