О нѣкоторыхъ полиномахъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ.

А. Пшеборскаго.

1. Будемъ разсматривать полиномы

$$h(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n, \tag{1}$$

степени не выше n, коэффиціенты которыхъ связаны соотношеніями

$$\begin{aligned} \omega(h) &= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n = \alpha \\ \omega_1(h) &= \beta_0 p_0 + \beta_1 p_1 + \ldots + \beta_n p_n = \beta, \end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ числа

$$\alpha_0, \ \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ \alpha, \ \beta_0, \ \beta_1 \ldots \beta_n, \ \beta$$

вещественны точно такъ же, какъ и коэффиціенты

$$p_0, \ p_1, \ \ldots \ p_n.$$

Будемъ при этомъ предполагать, что по крайней мѣрѣ два опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_k \\ \beta & \beta_k \end{vmatrix}$$

отличны отъ нуля.

Подобные полиномы для краткости назовемъ *полиномами (Z)*.

Частнымъ случаемъ подобныхъ полиномовъ являются полиномы вида

$$x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n \tag{3}$$

гдѣ σ данное число.

Вопросъ о наименьшемъ уклоненіи отъ нуля въ данномъ промежуткѣ этихъ послѣднихъ полиномовъ былъ разсмотрѣнъ впервые П. Л. Чебышевымъ для случая

$$\sigma = 0$$

въ мемуарѣ «Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes» [1]).

Изученію въ томъ же направленіи полиномовъ вида (3) при какомъугодно данномъ значеніи σ Е. И. Золотаревъ посвятилъ свой замѣчательный мемуаръ «Приложеніе эллиптическихъ функцій къ вопросамъ о функціяхъ, наименѣе и наиболѣе отклоняющихся отъ нуля» [2]).

Въ нашемъ изслѣдованіи полиномовъ (Z) мы попытаемся обобщить методъ, данный для рѣшенія аналогичныхъ вопросовъ, относящихся къ полиномамъ (1), коэффиціенты которыхъ связаны только *однимъ* изъ соотношеній (2), покойнымъ В. А. Марковымъ въ его прекрасномъ, но, къ сожалѣнію, мало извѣстномъ сочиненіи «О функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ» СПБ. 1892 г.

Настоящая статья посвящена обобщенію результатовъ 1-ой главы указаннаго сочиненія В. А. Маркова.

2. Наибольшимъ уклоненіемъ отъ нуля въ данномъ замкнутомъ промежуткѣ (a, b) *даннаго* полинома $h(x)$ назовемъ положительное число L_h удовлетворяющее условію, что для всѣхъ точекъ этого промежутка

$$h^2(x) \leqq L_h^2,$$

при чемъ хоть для одного изъ разсматриваемыхъ значеній x имѣетъ мѣсто знакъ равенства.

Предположимъ, что $h(x)$ принадлежитъ къ полиномамъ (Z), и обозначимъ черезъ L нижнюю границу всѣхъ чиселъ L_h для всѣхъ подобныхъ полиномовъ, коэффиціенты которыхъ связаны соотношеніями (2).

Это число L назовемъ *наименьшимъ отклоненіемъ полиномовъ (Z) отъ нуля въ данномъ промежуткѣ.*

Прежде всего покажемъ, что существуетъ по крайней мѣрѣ одинъ полиномъ $h(x)$, для котораго

$$L_h = L.$$

Всѣ полиномы, для которыхъ имѣетъ мѣсто послѣднее равенство, назовемъ *полиномами (Z) наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ данномъ промежуткѣ* или короче, *наименѣе уклоняющимися полиномами.*

3. Какъ нетрудно видѣть, числа L_h представляютъ непрерывныя функціи отъ

$$p_0, \; p_1, \; \cdots \; p_n,$$

---

[1]) Сочиненія т. I стр. 111—143.

[2]) Приложеніе къ XXX тому Записокъ Академіи Наукъ за 1877 годъ.

а потому, если намъ удастся показать, что существуютъ такія положительныя числа

$$k_0, k_1, \ldots k_n,$$

что нижняя граница чиселъ L_h, соотвѣтствующихъ полиномамъ $h(x)$, у которыхъ

$$|p_0| < k_0, |p_1| < k_1, \ldots |p_h| < k_h,$$

тоже равна L, то тѣмъ самымъ мы докажемъ существованіе полинома $h(x)$, для котораго

$$L_h = L.$$

Разсмотримъ полиномъ $h_1(x)$, для котораго

$$p_0 = p_1 = \ldots = p_{i-1} = p_{i+1} = \ldots = p_{k-1} = p_{k+1} = \ldots = p_n = 0;$$

для него

$$p_i = \frac{\alpha\beta_k - \beta\alpha_k}{\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i}, \quad p_k = \frac{\alpha_i\beta - \beta_i\alpha}{\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i},$$

и слѣдовательно при сдѣланныхъ нами въ самомъ началѣ предположеніяхъ, существуютъ положительныя числа δ, γ, ε такія, что

$$\delta < |p_i| < \gamma, \quad |p_k| < \varepsilon.$$

Обозначая черезъ η положительное число, удовлетворяющее условіямъ

$$\eta > |a|, \quad \eta > |b|,$$

найдемъ, что для промежутка (a, b)

$$|h_1(x)| < \gamma\eta^{n-i} + \varepsilon\eta^{n-k} = P,$$

гдѣ P конечное число. По свойству нижней границы имѣемъ:

$$L \leqq L_{h_1} < P,$$

а потому при отысканіи нижней границы L_h мы можемъ ограничиться такими полиномами, для которыхъ

$$|h(x)| < P$$

во всемъ промежуткѣ (a, b).

Какъ показалъ Borel [1]), коэффиціенты подобныхъ полиномовъ ограничены и сверху и снизу, т. е. подчиняются условіямъ

$$|p_0| < k_0, \quad |p_1| < k_1, \ldots |p_n| < k_n,$$

гдѣ $k_0, k_1, \ldots k_n$ положительныя числа.

---

[1]) Leçons sur les fonctions des variables réelles p.p. 83—84.

Отсюда и слѣдуетъ существованіе полиномовъ (Z), наименѣе отклоняющихся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b).

4. Изъ элементарныхъ соображеній вытекаетъ, что всѣ значенія, для которыхъ въ промежуткѣ (a, b)

$$L_h^2 - h^2(x) = 0, \tag{4}$$

представляютъ рѣшенія уравненія

$$(x-a)(x-b)\,h'(x) = 0. \tag{5}$$

Поэтому въ промежуткѣ (a, b) уравненія (4) и (5) имѣютъ maximum $n+1$ различныхъ общихъ рѣшеній. Пусть эти различныя рѣшенія, лежащія въ разсматриваемомъ замкнутомъ промежуткѣ и расположенныя въ возрастающемъ порядкѣ, будутъ

$$x_1, x_2, \ldots x_p,$$

гдѣ

$$p \leqq n+1.$$

Если x_k отлично отъ a и b, то, какъ нетрудно видѣть, оно будетъ кратнымъ корнемъ уравненія (4).

Слѣдуя В. А. Маркову, легко доказать слѣдующую теорему:

Теорема I. *Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ для того, чтобы полиномъ $h(x)$ наименѣе отклонялся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ, является несуществованіе полинома $g(x)$ степени не выше n, для котораго*

$$\omega(g) = \omega_1(g) = 0$$

и всѣ числа

$$\tau_i = h(x_i)\,g(x_i)$$
$$i=1, 2, \ldots p$$

одного и того-же знака.

Покажемъ сперва, что несуществованіе полиномовъ $g(x)$ представляетъ необходимое условіе для того, чтобы $h(x)$ наименѣе отклонялся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b).

Для этого положимъ, что полиномъ $g(x)$, для котораго всѣ τ_i положительны и

$$\omega(g) = \omega_1(g) = 0,$$

существуетъ.

Замѣтимъ, что условіе $\tau_i > 0$ можетъ быть замѣнено условіемъ $\tau_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots p)$, что не измѣняетъ существенно доказательства.

Разсмотримъ полиномъ

$$m(x) = h(x) + \varrho g(x).$$

Каково-бы ни было число ϱ, полиномъ $m(x)$ принадлежитъ къ числу полиномовъ (Z), ибо

$$\omega(m) = \omega(h) + \varrho\omega(g) = \omega(h) = \alpha,$$

$$\omega_1(m) = \omega_1(h) + \varrho\omega_1(g) = \omega_1(h) = \beta.$$

Покажемъ, что можно такъ подобрать *отрицательное* число ϱ, чтобы имѣло мѣсто неравенство

$$L_m < L_h,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что $h(x)$ не есть наименѣе уклоняющійся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) полиномъ (Z). Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ замкнутомъ промежуткѣ (a, b) имѣется p различныхъ корней уравненія

$$L_h^2 - h^2(x) = 0,$$

именно

$$x_1, x_2, \ldots x_p.$$

Мы можемъ всегда выбрать такое число ε, чтобы для всѣхъ значеній x, удовлетворяющихъ условіямъ

$$x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \quad {\scriptstyle i=1,2,\ldots p} \tag{6}$$

имѣло мѣсто неравенство

$$h(x)\,g(x) > 0.$$

Назовемъ всю совокупность интерваловъ (6) черезъ J. Внѣ интерваловъ J, но въ замкнутомъ промежуткѣ (a, b) имѣемъ,

$$|h(x)| < L_1,$$

гдѣ $L_1 < L$. Пусть кромѣ того G положительное число такое, что для замкнутаго промежутка (a, b)

$$|g(x)| < G.$$

Наконецъ выберемъ отрицательное число ϱ такъ, чтобы

$$-\varrho < \frac{L - L_1}{G}.$$

При этихъ условіяхъ, для всѣхъ точекъ замкнутаго промежутка (a, b), лежащаго внѣ J, имѣемъ

$$|m(x)| = |h(x) + \varrho g(x)| \leqq |h(x)| - \varrho\,|g(x)| < L,$$

а для точекъ промежутковъ (J), въ которыхъ $g(x)h(x) > 0$,

$$|m(x)| = |h(x) + \varrho g(x)| < L,$$

ибо $h(x)$ и $\varrho g(x)$ въ (J) различныхъ знаковъ и при томъ

$$|h(x)| \leqq L, \quad -\varrho |g(x)| < L - L_1 < L.$$

Такимъ образомъ *необходимость* условія В. А. Маркова доказана.

Покажемъ теперь, что несуществованіе полиномовъ типа $g(x)$ *достаточно* для того, чтобы $h(x)$ наименѣе уклонялся отъ нуля.

Дѣйствительно пусть $H(x)$ какой либо другой полиномъ (Z), тогда

$$\omega(H) = \alpha$$

$$\omega_1(H) = \beta,$$

а потому полиномъ

$$g(x) = h(x) - H(x)$$

будетъ удовлетворять условіямъ

$$\omega(g) = \omega_1(g) = 0.$$

По только что сдѣланному предположенію, хотя бы для одного x_i имѣемъ,

$$h(x_i)\, g(x_i) \leqq 0,$$

а потому

$$|H(x_i)| = |h(x_i) - g(x_i)| \geqq L_h,$$

ибо $h(x_i)$ и $-g(x_i)$ одного и того же знака и при томъ

$$|h(x_i)| = L_h.$$

5. Такимъ образомъ нами найденъ критерій, дающій возможность судить о томъ, будетъ-ли данный полиномъ $h(x)$ наименѣе уклоняющимся.

Но, очевидно, на практикѣ этотъ критерій совершенно не годится, такъ какъ въ той формулировкѣ, въ которой онъ данъ, не указаны условія, при которыхъ полиномъ $g(x)$ существуетъ или не существуетъ.

Для вывода послѣднихъ условій мы опять прибѣгнемъ къ тому пріему, который былъ указанъ В. А. Марковымъ въ упомянутомъ выше мемуарѣ.

Прежде однако, чѣмъ приступить къ выводу этого критерія, займемся рѣшеніемъ одного алгебраическаго вопроса.

6. *Даны два линейныхъ однородныхъ уравненія*

$$\begin{aligned} a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + \ldots + a_n\tau_n &= 0 \\ b_1\tau_1 + b_2\tau_2 + \ldots + b_n\tau_n &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

съ $n>2$ перемѣнными и съ дѣйствительными коэффиціентами. Найти необходимыя и достаточныя условія, при которыхъ разсматриваемая система не имѣетъ рѣшеній одного и того же знака.

Такъ какъ уравненія (7) различны, то рангъ матрицы

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

равенъ 2.

Обозначимъ черезъ A_{ik} опредѣлитель $a_i b_k - a_k b_i$.

Нетрудно видѣть, что *достаточнымъ* условіемъ будетъ одно изъ условій: 1) всѣ a_i одного и того-же знака, 2) всѣ b_k одного знака, 3) для нѣкотораго опредѣленнаго i всѣ A_{ik} $(k=1, 2, \dots i-1, i+1, \dots n)$ отличные отъ нуля, одного и того же знака.

Покажемъ, что выполненіе одного изъ этихъ трехъ условій является и условіемъ *необходимымъ*.

Пусть не всѣ a_i и не всѣ b_k одного и того-же знака.

Не нарушая общности, положимъ, что

$$A_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0.$$

Систему уравненій (7) можемъ замѣнить эквивалентной съ ней системой

$$\begin{aligned} &A_{12}\tau_1 + A_{32}\tau_3 + \dots + A_{k2}\tau_k + A_{k+1,2}\,\tau_{k+1} + \dots + A_{n2}\tau_n = 0 \\ &A_{12}\tau_2 + A_{13}\tau_3 + \dots + A_{1k}\tau_k + A_{1k+1}\tau_{k+1} + \dots + A_{1n}\tau_n = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Если-бы всѣ числа A_{k2} или A_{1k} были одного и того же знака, то уравненія (8), а слѣдовательно и уравненія (7), не допускали бы рѣшеній одного и того же знака относительно τ_k. Для опредѣленности будемъ разсматривать положительныя рѣшенія.

Итакъ положимъ, что

$$A_{12} > 0,\ A_{32} \geqq 0, \dots A_{k2} \geqq 0;\ A_{k+12} < 0, \dots A_{n2} < 0$$

Нетрудно видѣть, что всякому отрицательному коэффипіенту A_{i2} долженъ соотвѣтствовать положительный коэффиціентъ A_{1i}. Дѣйствительно пусть имѣемъ одновременно

$$A_{i2} < 0 \quad A_{1i} < 0,$$

тогда давая въ уравненіяхъ (8) всѣмъ перемѣннымъ $\tau_3, \tau_4, \dots \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots \tau_n$

какія угодно положительныя значенія, мы сможемъ дать τ_i настолько большое положительное значеніе, чтобы суммы

$$A_{32}\tau_3 + A_{42}\tau_4 + \ldots + A_{n2}\tau_n$$

$$A_{13}\tau_3 + A_{14}\tau_4 + \ldots + A_{1n}\tau_n$$

стали отрицательны, а тогда изъ уравненій (8) найдемъ для τ_1 и τ_2 положительныя значенія.

Точно также отрицательному значенію A_{i2} не можетъ соотвѣтствовать значеніе $A_{1i} = 0$. Дѣйствительно, такъ какъ мы предположили, что не всѣ A_{1h} положительны, то найдемъ хоть одно значеніе h для котораго $A_{1h} < 0$, а слѣдовательно выбравъ положительныя значенія для $\tau_3, \tau_4, \ldots \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \ldots \tau_h, \ldots \tau_n$, при чемъ для τ_h достаточно большое, сможемъ найти положительное значеніе для τ_2, далѣе выбравъ τ_i достаточно большимъ и положительнымъ, найдемъ положительное значеніе для τ_1.

Итакъ, каждому отрицательному коэффиціенту въ одномъ изъ уравненій (8) необходимо соотвѣтствуетъ положительный коэффиціентъ въ другомъ уравненіи, если только эти уравненія не допускаютъ положительныхъ рѣшеній.

Отсюда заключаемъ, что второе изъ разсматриваемыхъ уравненій, имѣетъ maximum $k-1$ отрицательныхъ коэффиціентовъ, а слѣдовательно уравненіе, которое получимъ изъ него, измѣняя знаки у всѣхъ членовъ на обратные, т. е. уравненіе

$$A_{31}\tau_{13} + A_{21}\tau_2 + \ldots + A_{k1}\tau_k + A_{k+11}\tau_{k+1} + \ldots + A_{n1}\tau_n = 0\,,$$

имѣетъ maximum $k-1$ положительныхъ коэффиціентовъ. Полагая, что $A_{31} > 0$, подобнымъ же образомъ покажемъ, что уравненіе

$$A_{13}\tau_3 + A_{23}\tau_2 + A_{43}\tau_4 + \ldots + A_{n3}\tau_n = 0$$

будетъ имѣть maximum $k-2$ положительныхъ коэффиціентовъ. Разсуждая далѣе подобнымъ же образомъ, мы необходимо придемъ къ уравненію вида

$$A_{h1}\tau_1 + A_{h2}\tau_2 + \ldots + A_{hh-1}\tau_{h-1} + A_{hh+1}\tau_{h\ 1} + \ldots + A_{hn}\tau_n = 0\,,$$

у котораго всѣ коэффиціенты, отличные отъ нуля, имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ.

7. Послѣ этихъ предварительныхъ изслѣдованій перейдемъ къ доказательству ряда теоремъ, являющихся обобщеніемъ соотвѣтствующихъ теоремъ В. А. Маркова.

Обозначимъ черезъ

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_p$$

всѣ различныя рѣшенія уравненія

$$L_h^2 - h^2(x) = 0,$$

лежащія въ промежуткѣ (a, b).

Замѣтимъ, что и здѣсь, и вездѣ въ дальнѣйшемъ будемъ предполагать промежутокъ (a, b) замкнутымъ.

Какъ мы уже знаемъ, $p \leqq n+1$.

Обозначимъ черезъ $F(x)$ многочленъ

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p),$$

а черезъ $F_i(x)$ многочленъ

$$F_i(x) = \frac{F(x)}{x-x_i}.$$

Всякій полиномъ степени, не превышающей n, можетъ быть представленъ въ видѣ

$$g(x) = AF(x)R(x) + \sum_{i=1}^{p} \frac{g(x_i)}{F'(x_i)} F_i(x),$$

гдѣ въ случаѣ, когда $p = n+1$, постоянная A равна нулю, а въ случаѣ, когда $p \leqq n$, многочленъ $R(x)$ представляетъ многочленъ степени не выше $n-p$.

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ нельзя будетъ подобрать постоянныя

$$A,\ g(x_1),\ g(x_2), \ldots\ g(x_p),$$

и полиномъ $R(x)$ такъ, чтобы имѣли мѣсто соотношенія

$$\omega(g) = \omega_1(g) = 0$$

и при томъ, чтобы всѣ числа

$$g(x_1)\,h(x_1),\quad g(x_2)\,h(x_2), \ldots\ g(x_p)\,h(x_p)$$

были одного знака.

На основанiи предыдущей теоремы, эти условiя будутъ необходимыми и достаточными для того, чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z).

8. Разсмотримъ сперва случай, когда $p=n+1$; тогда $A=0$ и условiя

$$\omega(g)=\omega_1(g)=0$$

напишутся такъ

$$\begin{aligned} \omega(g) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{g(x_i)}{F'(x_i)}\,\omega(F_i)=0 \\ \omega_1(g) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{g(x_i)}{F'(x_i)}\,\omega_1(F_i)=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Замѣтимъ, что знакъ $F'(x_i)$ тождественъ со знакомъ $(-1)^{p+i}$, а потому можетъ положить

$$F'(x_i)=\frac{(-1)^{p+i}}{q_i},$$

гдѣ $q_i>0$.

Вводя теперь обозначенiя

$$q_i\,g(x_i)=\tau_i\,h(x_i),$$

видимъ, что τ_i имѣетъ знакъ $g(x_i)\,h(x_i)$.

При нашихъ обозначенiяхъ уравненiя (9) напишутся въ видѣ

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\,\omega(F_i)\,h(x_i)\,\tau_i=0 \\ &\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\,\omega_1(F_i)\,h(x_i)\,\tau_i=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Въ случаѣ, когда полиномъ $h(x)$ наименѣе уклоняющiйся отъ нуля, числа $g(x_i)\,h(x_i)$, а слѣдовательно и τ_i не могутъ быть всѣ положительны, а потому, на основанiи предыдущаго, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема II. *Для того, чтобы полиномъ $h(x)$ степени n былъ бы полиномомъ (Z) наименѣе уклоняющимся въ интервалѣ $(a,\,b)$ при условiи, что $p=n+1$, необходимо и достаточно выполненiе одного изъ трехъ условiй: 1) всѣ числа*

$$(-1)\,\omega(F_1)\,h(x_1),\ (-1)^2\,\omega(F_2)\,h(x_2),\ldots\,(-1)^{n+1}\omega(F_{n+1})\,h(x_{n+1})$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; 2) всѣ числа

$$(-1)\,\omega_1(F)\,h(x_1),\ (-1)^2\,\omega_1(F_2)\,h(x_2),\ldots(-1)^{n+1}\omega_1(F_{n+1})\,h(x_{n+1})$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ и 3) существуетъ цѣлое положительное число $0 < j \leqq n+1$, *для котораго всѣ числа*

$$(-1)^i \left[\omega(F_i)\, \omega_1(F_j) - \omega(F_j)\, \omega_1(F_i)\right] h(x_i)$$
$$i=1,2,\dots j-1, j+1,\dots n+1$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ.

9. Переходимъ къ случаю, когда $p \leqq n$. Въ этомъ случаѣ условія

$$\omega(g) = \omega_1(g) = 0$$

примутъ видъ

$$\begin{aligned} &A\omega(FR) + (-1)^p \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \omega(F_i)\, h(x_i)\, \tau_i = 0 \\ &A\omega_1(FR) + (-1)^p \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \omega_1(F_i) h(x_i)\, \tau_i = 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$

гдѣ удержаны прежнія обозначенія и гдѣ $R(x)$ полиномъ степени не выше $n-p$.

Замѣчая, что символы ω и ω_1 обладаютъ свойствомъ:

$$\omega\left[\varphi.(\psi+\chi)\right] = \omega(\varphi\psi) + \omega(\varphi\chi)$$
$$\omega_1\left[\varphi.(\psi+\chi)\right] = \omega_1(\varphi\psi) + \omega_1(\varphi\chi)\,,$$

гдѣ φ, ψ, χ любые полиномы, мы можемъ положить

$$A\omega(FR) = \mu_0\omega(Fx^{n-p}) + \mu_1\omega(Fx^{n-p-1}) + \dots + \mu_{n-p}\omega(F)\,,$$
$$A\omega_1(FR) = \mu_0\omega_1(Fx^{n-p}) + \mu_1\omega_1(Fx^{n-p-1}) + \dots + \mu_{n-p}\omega_1(F)\,,$$

и весь вопросъ сводится къ слѣдующему: при какихъ условіяхъ нельзя подобрать положительныя числа

$$\tau_1\,,\ \tau_2\,,\ \dots\ \tau_p\,,$$

и какія угодно конечныя числа

$$\mu_0\,,\ \mu_1\,,\ \dots\ \mu_{n-p}\,,$$

такъ, чтобы удовлетворялись уравненія:

$$\begin{aligned} &\mu_0\omega(Fx^{n-p}) + \mu_1\omega(Fx^{n-p-1}) + \dots + \mu_{n-p}\omega(F) + \\ &\qquad + (-1)^p \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \omega(F_i)\, h(x_i)\, \tau_i = 0 \\ &\mu_0\omega_1(Fx^{n-p}) + \mu_1\omega(Fx^{n-p-1}) + \dots + \mu_{n-p}\omega_1(F) + \\ &\qquad + (-1)^p \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \omega_1(F_i) h(x_i)\tau_i = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Прежде всего замѣтимъ, что, если рангъ матрицы

$$\left| \begin{matrix} \omega(Fx^{n-p}), & \omega(Fx^{n-p-1}), \ldots \omega(F) \\ \omega_1(Fx^{n-p}), & \omega_1(Fx^{n-p-1}), \ldots \omega_1(F) \end{matrix} \right| \tag{13}$$

будетъ равенъ двумъ, мы всегда сможемъ удовлетворить уравненіямъ (12), давши всѣмъ τ_i положительныя значенія; такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема III. *Для того чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z) въ промежуткѣ (a, b) при условіи $p \leqq n$, необходимо, чтобы рангъ матрицы (13) былъ равенъ нулю или единицѣ.*

Разсмотримъ оба эти предположенія отдѣльно.

10. Пусть рангъ матрицы (13) равенъ нулю, т. е. пусть всѣ числа $\omega(Fx^{n-i})$ и $\omega_1(Fx^{n-i})$ равны нулю. Тогда уравненія (12) напишутся такъ:

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^i \omega(F_i) h(x_i) \tau_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^i \omega_1(F_i) h(x_i) \tau_i = 0,$$

и мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема IV. *Для того, чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z) въ промежуткѣ (a, b) при условіи $p \leqq n$ и при предположеніи, что рангъ матрицы (13) равенъ нулю, необходимо и достаточно выполненіе одного изъ трехъ условій: 1) всѣ числа*

$$(-1)\omega(F_1)h(x_1), \; (-1)^2\omega(F_2)h(x_2), \ldots (-1)^p\omega(F_p)h(x_p)$$

имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ; 2) всѣ числа

$$(-1)\omega_1(F_1)h(x_1), \; (-1)^2\omega_1(F_2)h(x_2), \ldots (-1)^p\omega_1(F_p)h(x_p)$$

имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ и 3) существуетъ цѣлое положительное число $0 < j \leqq p$, для котораго всѣ числа

$$\underset{i=1,2,\ldots j-1,\, j+1,\ldots p}{(-1)^i[\omega(F_i)\omega_1(F_j) - \omega(F_j)\omega_1(F_i)]\,h(x_i)}$$

имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ.

11. Переходимъ къ разсмотрѣнію случая, когда рангъ матрицы (13) равенъ единицѣ.

Здѣсь мы можемъ сдѣлать два предположенія: во-первыхъ, можетъ случиться, что всѣ числа

$$\omega_1(Fx^{n-p})\,,\ \omega_1(Fx^{n-p-1}),\ldots\omega_1(F)$$

равны нулю, и тогда хоть одно изъ чиселъ $\omega(Fx^{n-i})$ отлично отъ нуля; во-вторыхъ, можетъ случиться, что для одного и того-же значенія k одновременно

$$\omega\,(Fx^{n-k}) \neq 0, \quad \omega_1(Fx^{n-k}) \neq 0\,.$$

Въ первомъ случаѣ уравненія (12) примутъ видъ:

$$\mu_0\omega\,(Fx^{n-p}) + \ldots + \mu_{i-p}\omega\,(Fx^{n-i}) + \ldots + \mu_{n-p}\omega\,(F) +$$
$$+ (-1)^p \sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,\omega\,(F_i)\,h\,(x_i)\,\tau_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,\omega_1(F_i)\,h\,(xi)\,\tau_i = 0\,,$$

откуда заключаемъ, что имѣетъ мѣсто теорема:

Теорема V. *Для того, чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z) въ промежуткѣ $(a,\ b)$ при условіи $p \leqq n$ и при выполненіи условій*

$$\omega_1(Fx^{n-p}) = \omega_1'(Fx^{n-p-1}) = \ldots = \omega_1(F) = 0$$

и $\omega\,(Fx^{n-i}) \neq 0$ хоть для одного значенія $0 \leqq i \leqq p$, необходимо и достаточно, чтобы всѣ числа $(-1)^i h\,(x_i)\,\omega_1(F_i)$ были одного и того-же знака.

Наконецъ, при второмъ предположеніи, такъ какъ для любого значенія i

$$\frac{\omega\,(Fx^{n-i})}{\omega_1(Fx^{n-i})} = \frac{\omega\,(Fx^{n-k})}{\omega_1(Fx^{n-k})}\,,$$

то изъ уравненій (12) видимъ, что числа τ_i должны удовлетворять уравненію

$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,[\omega\,(F_i)\,\omega_1(Fx^{n-k}) - \omega_1(F_i)\,\omega\,(Fx^{n-k})]\,h(x_i)\,\tau_i = 0\,,$$

а потому справедлива слѣдующая теорема:

Теорема VI. *Для того, чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z) въ промежуткѣ $(a,\ b)$ при условіяхъ: 1) что $p \leqq n$ 2), что рангъ матрицы (13) равенъ единицѣ и 3) что* *для нѣкотораго* $0 \leqq k \leqq p$ *числа* $\omega(Fx^{n-k})$, $\omega_1(Fx^{n-k})$, *отличны отъ нуля, необходимо и достаточно, чтобы всѣ числа*

$$(-1)^i\,[\omega(F_i)\,\omega_1(Fx^{n-k}) - \omega_1(F_i)\,\omega\,(Fx^{n-k})]\,h\,(x_i)$$
$$i=1,\ 2,\ldots p$$

имѣли одинъ и тотъ-же знакъ.

12. Займемся теперь, разсмотрѣніемъ вопроса о числѣ наименѣе уклоняющихся полиномовъ (Z) данной степени n въ данномъ промежуткѣ $(a,\ b)$. Пусть $y(x)$ одинъ изъ подобныхъ полиномовъ, L его наибольшее уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ $(a,\ b)$ и

$$x_1\,,\ x_2\,,\ldots\ x_p \tag{14}$$

всѣ различные между собою корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0\,,$$

лежащіе въ этомъ промежуткѣ.

Пусть $\eta(x)$ другой такой же полиномъ (Z) въ промежуткѣ $(a,\ b)$ той-же степени n.

Нетрудно видѣть, что уравненіе

$$v(x) = \eta(x) - y(x) = 0 \tag{15}$$

въ промежуткѣ $(a,\ b)$ можетъ имѣть корни только совпадающіе съ числами ряда (14).

Дѣйствительно, если корни уравненія (15), лежащіе въ промежуткѣ $(a,\ b)$, не совпадаютъ съ числами (14), то, построивши полиномъ

$$w(x) = y(x) + \varrho v(x)\,,$$

гдѣ ϱ любая правильная положительная дробь, получимъ для значеній равныхъ корнямъ уравненія (15), неравенство

$$|\,w\,(x)\,| = |\,y\,(x)\,| < L\,,$$

а для значеній x, въ которыхъ $v(x)$ не равно нулю, замѣчая, что

$$w(x) = (1-\varrho)\,y(x) + \varrho\eta(x)\,,$$

при выполненіи условія $|\,\eta(x)\,| > |\,y(x)\,|$, имѣемъ

$$|\,w(x)\,| \leqq (1-\varrho)\,|\,y(x)\,| + \varrho\,|\,\eta(x)\,| < |\,\eta(x)\,| \leqq L\,,$$

для значеній же x, для которыхъ $|\,y(x)\,| > |\,\eta(x)\,|$,

$$|\,w(x)\,| \leqq (1-\varrho)\,|\,y(x)\,| + \varrho\,|\,\eta(x)\,| < |\,y(x)\,| \leqq L.$$

Такимъ образомъ полиномъ $w(x)$ во всемъ промежуткѣ удовлетворяетъ условію

$$|w(x)| < L,$$

а слѣдовательно полиномы $y(x)$ и $\eta(x)$ не будутъ наименѣе уклоняющимися полиномами (Z) въ промежуткѣ (a, b).

Послѣ этого предварительнаго замѣчанія переходимъ къ интересующему насъ вопросу.

Итакъ уравненіе (15) въ промежуткѣ (a, b) можетъ имѣть корни только совпадающіе съ числами ряда (14). Если ξ одно изъ этихъ чиселъ, отличныхъ отъ a и b, то оно непремѣнно удовлетворяетъ условіямъ

$$y'(\xi) = \eta'(\xi) = 0,$$

а слѣдовательно и условію

$$v'(\xi) = 0,$$

т. е. представляетъ кратный корень уравненія (15). Обозначая поэтому черезъ μ' число кратныхъ корней уравненія (15) въ промежуткѣ (a, b), имѣемъ ,что

$$\mu' \leqq E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Разсмотримъ случай, когда $n = 2q + 1$, т. е. нечетно; тогда

$$\mu' \leqq E\left(\frac{2q+1}{2}\right) = q,$$

а потому, если $\mu' = q$, то въ промежуткѣ (a, b) уравненіе (15) можетъ имѣть еще только одинъ простой корень, который необходимо долженъ совпадать либо съ a, либо съ b. Такимъ образомъ maximum различныхъ корней уравненія (15) въ промежуткѣ (a, b) при нечетномъ n равно

$$\mu = \frac{n+1}{2},$$

при чемъ въ числѣ этихъ корней, въ случаѣ достиженія maximum'а, непремѣнно должно заключаться одно изъ чиселъ a или b.

Положимъ теперь $n = 2q$, т. е. четнымъ; тогда, сохраняя прежнія обозначенія, найдемъ, что

$$\mu' \leqq q,$$

а потому, если $\mu' = q$, то простыхъ корней въ промежуткѣ (a, b) уравненіе (15) имѣть уже не будетъ.

Если же

$$\mu' = q - j,$$

то уравненіе (15) можетъ допускать въ этомъ промежуткѣ два простыхъ корня a и b, т. е. число различныхъ корней уравненія (15) въ разсматриваемомъ промежуткѣ будетъ

$$q-j+2,$$

при чемъ наибольшее возможное число этихъ корней получимъ при $j=1$, когда оно будетъ

$$\mu=q-1+2=\frac{n+2}{2}.$$

Если теперь опять составимъ полиномъ

$$w(x)=y(x)+\varrho v(x),$$

гдѣ $0<\varrho<1$, то увидимъ, что для всѣхъ значеній ряда (14), для которыхъ $v(x)$ обращается въ нуль,

$$|w(x)|=|y(x)|=L,$$

для всѣхъ же остальныхъ значеній, лежащихъ въ промежуткѣ (a, b), по предыдущему $|w(x)|<L$.

Отсюда заключаемъ, что наибольшее уклоненіе $w(x)$ отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) равно L; а такъ какъ

$$\omega(v)=\omega_1(v)=0$$

и слѣдовательно

$$\omega(w)=\alpha, \quad \omega_1(w)=\beta,$$

то слѣдовательно $w(x)$ тоже наименѣе уклоняющійся полиномъ (Z) для промежутка (a, b).

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, доказанной впервые В. А. Марковымъ для полиномовъ, коэффиціенты которыхъ связаны одной линейной зависимостью:

Теорема VII. *Если существуетъ болѣе одного полинома (Z) наименѣе уклоняющагося отъ нуля въ промежуткѣ (a, b), то между подобными полиномами найдется такой, численное значеніе котораго достигаетъ своей наибольшей величины не болѣе чѣмъ для μ значеній x, гдѣ*

$$\mu=\frac{n+1}{2} \quad \textit{при } n \textit{ нечетномъ}$$

$$\mu=\frac{n+2}{2} \quad \textit{при } n \textit{ четномъ},$$

и если число этихъ значеній x равно μ, то при n нечетномъ между ними заключается по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ a, b, а при n четномъ между ними заключаются оба эти числа.