Remarques sur l'inégalité de Wladimir Markoff.

Serge Bernstein.

1. Dans son Mémoire [1]) «Sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro» W. Markoff démontre l'inégalité suivante: *Si $P(x)$ est un polynome de degré n qui sur le segment (a, b) ne dépasse pas L, en valeur absolue, on a*

$$|P^{(k)}(x)| \leqq \frac{n^2(n^2-1)\dots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\dots 2k-1}\left(\frac{2}{b-a}\right)^k . L = M, \qquad (1)$$

quel que soit x sur le segment (a, b).

De plus, on a effectivement,

$$|P^{(k)}(a)| = |P^{(k)}(b)| = M,$$

si [2])

$$P(x) = L \cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}.$$

[1]) Publié par l'Université St.-Petersbourg. 1892. Il serait utile de traduire ce travail important qu'il est difficile de se procurer même en russe. (Voir la note de la page 48 de mon mémoire de l'Académie Royale de Belgique). Pour $k=1$, l'inégalité (1) a été démontrée dans l'article de M. A. Markoff «Sur une question de Mendeleieff» présenté le 24 Octobre 1889 à l'Académie de St.-Pétersbourg (voir la page 11 de mon mémoire cité).

[2]) Pour vérifier ceci, il suffit d'envisager le cas, oú le segment (a, b) se reduit à $(-1, +1)$. Or, $T_n(x) = L \cos n \arccos x$ satisfait à l'équation

$$(x^2-1)\,T''_n + xT'_n - n^2 T_n = 0.$$

Donc, en différentiant successivement, et en posant $x=1$, on a

$$T'_n(1) = n^2 T_n(1),\quad 3T''_n(1) = (n^2-1)\,T'_n(1), \dots, (2k-1)T_n^{(k)}(1) = [n^2-(k-1)^2]\,T_n^{(k-1)}(1).$$

D'où

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\dots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\dots(2k-1)}\,T_n(1) = M.$$

La démonstration, qui présente un réel intérêt, est longue et compliquée, et il ne semble pas facile de la simplifier considérablement. C'est pour ça que j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de remarquer qu'on peut obtenir très simplement l'inégalité suivante qui est asymptotique à inégalité de W. Markoff

$$|P^{(k)}(x)| < M(1+\varepsilon_n), \tag{1bis}$$

où ε_n tend vers 0, comme $\frac{1}{n^2}$.

D'abord, on reconnait immédiatement que

$$|P^{(k)}(a)| \leqq M, \quad |P^{(k)}(b)| \leqq M. \tag{2}$$

En effet, il suffit de remarquer que parmi les polynomes tels que $P^{(k)}(b)=M$, aucun ne peut rester dans l'intervalle (a, b) infériur à L, si

$$M = \frac{d^k}{dx^k}\left(L\cos n \arccos\frac{2x-a-b}{b-a}\right)_{x=b} = \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)}\left(\frac{2}{b-a}\right)^k.L,$$

car autrement l'équation

$$P(x) - L\cos n \arccos\frac{2x-a-b}{b-a} = 0$$

aurait toutes ses n racines à l'intérieur de l'intervalle (a, b), tandis que sa dérivée d'ordre k s'annullerait au bord b, ce qui est manifestement impossible.

Ainsi, en appliquant l'inégalité (2) au segment (a, x), où $a<x<b$, on a

$$|P^{(k)}(x)| \leqq \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)}\cdot\left(\frac{2}{x-a}\right)^k.L, \tag{3}$$

ou bien, en réduisant, pour fixer les idées, le segment (a, b) au segment $(-1, +1)$, on aura

$$|P^{(k)}(x)| \leqq \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)}\cdot\left(\frac{2}{1+x}\right)^k.L. \tag{4}$$

Pour tirer de là (on peut supposer $x>0$) la conclusion voulue, nous n'avons qu'à comparer cette inégalité à celle que j'ai obtenue par des considérations également élémentaires dans le premier chapitre [1]) de mon Mémoire «Sur l'ordre de la meilleure approximation etc»:

$$|P^{(k)}(x)| < \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} n(n-1)\ldots[n-(k-1)]\,L. \qquad (5)$$

Puisque la fonction qui se trouve dans le second membre de (5) est croissante, tandisque celle du second membre de (4) est décroissante, pour $0<x<1$, on aura une limite supérieure générale de $|P^{(k)}(x)|$, en attribuant à x la valeur, pour laquelle ces deux fonctions sont égales, c'est à dire, x satisfaisant à l'équation

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+k+1)}{1.3\ldots(2k-1)}\cdot\left(\frac{2}{1+x}\right)^k = \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}},$$

ou bien

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{4}{k}\left[\frac{n(n+1)\ldots(n+k+1)}{1.3\ldots(2k-1)}\right]^{\frac{2}{k}}.$$

Donc,

$$\frac{2}{1+x} = 1 + \frac{k}{4}\left[\frac{1.3\ldots(2k-1)}{n.(n+1)\ldots(n+k-1)}\right]^{\frac{2}{k}}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{2}{1+x}$ dans l'inégalifé (4) on obtient finalement

$$|P^{(k)}(x)| < (1+\varepsilon_n)\frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)}.L, \qquad (1^{\text{bis}})$$

où

$$1+\varepsilon_n = \left\{1+\frac{k}{4}\left[\frac{1.3\ldots(2k-1)}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}\right]^{\frac{2}{k}}\right\}^k,$$

de sorte que, k étant fixe, ε_n tend vers 0 comme $\frac{1}{n^2}$ c. q. f. d.

2. W. Markoff a également recherché le maximum exact que peut atteindre la dérivée $P^{(k)}(x)$ en un point déterminé x intérieur au segment. Sans résoudre la question qui, en général, se ramène à une équation algebrique non résoluble élémentairement, il en a fait une discussion approfondie qui avait pour but principal la démonstration de l'inégalité (1). Mais n'ayant pas tiré de cette discussion une inégalité analogue à l'inégalité (5), il n'a pas signalé la différence essentielle entre l'ordre de croissance du maximum de la dérivée en un point intérieur et au bord du segment— différence qui résulte de la comparaison des inégalités (1) et (5) et dont

[1]) C'est l'inégalité (12) de ce Mémoire.

les conséquences importantes sont mises en évidence par les théorèmes du second chapitre de mon Mémoire cité, qui ne sauraient être déduits de l'inégalité (1).

Je me propose ici de préciser l'inégalité (5), pour n très grand, et de donner la valeur *asymptotique du maximum* $M(x)$ *de la dérivée* $P^{(k)}(x)$ *en un point donné* x, intérieur au segment $(-1, +1)$.

Je vais établir l'égalité asymptotique suivante

$$M(x) \backsim \left(\frac{n^2}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} . L, \tag{6}$$

à laquelle d'ailleurs on pourrait aussi arriver en utilisant les résultats de W. Markoff.

En effet, en appliquant un raisonnement bien connu, on reconnait que le polynome $P(x)$ qui réalise le maximum de $P^{(k)}(x)$ au point considéré devra atteindre son écart maximum sur le segment $(-1, +1)$ au moins n fois en changeant successivement de signe. Donc, si nous formons tous les polynomes de la forme

$$P(x) = cx^n + \sigma x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} \tag{7}$$

qui s'écartent le moins possible de zéro sur notre segment, c et σ étant deux paramètres donnés, il ne faudra choisir qu'entre ces derniers polynomes celui qui réalise le maximum. E. Zolotareff [1]) a ramené la détermination des polynomes (7) aux fonctions elliptiques, mais nous n'allons pas utiliser ses formules qui sont très compliquées. Nous allons procéder autrement: au lieu de rechercher le polynome d'approximation

$$R(x) = -(p_1 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1})$$

de degré $n-2$ de la fonction $cx^n + \sigma x^{n-1}$, nous formerons le polynome d'approximation $R_1(x)$ d'une fonction de la forme

$$\varphi(x) = cx^n + \sigma x^{n-1} + \frac{A}{x-a},$$

où A sera assujetti seulement à tendre vers o avec $\frac{1}{n}$ infiniment plus rapidement que la meilleure approximation de $\varphi(x)$, a étant un nombre réel quelconque tel que $|a| > 1$.

---

[1]) Bull. de l'Académie de St. Petersbourg. 1877.

La détermination de $R_1(x)$, qui sera alors naturellement une expression asymptotique de $R(x)$, est immédiate. En effet, considérons la fonction

$$\lambda \cos(n\varphi - \delta) = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n(ax-1-\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)})}{x-a} + \right.$$
$$\left. + \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n(ax-1+\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)})}{x-a}\right] = \frac{Q(x)}{x-a},$$

où $\cos\varphi = x$, $\cos\delta = \dfrac{ax-1}{x-a}$; on voit facilement que $\dfrac{Q(x)}{x-a}$ atteint n fois son écart maximum $\pm\lambda$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. Or, on a d'autre part

$$\frac{Q(x)}{x-a} = cx^n + \sigma x^{n-1} + \frac{A}{x-a} - R_1(x),$$

où

$c = \lambda 2^{n-1}(a - \sqrt{a^2-1})$, $\sigma = \lambda 2^{n-1}[a^2-1-a\sqrt{a^2-1}]$ et $A = \lambda(a^2-1)(a-\sqrt{a^2-1})^n$, $R_1(x)$ étant un polynome de degré $n-2$. Donc,

$$\frac{\sigma}{c} = -\sqrt{a^2-1},$$

d'où

$$a = \sqrt{1+\frac{\sigma^2}{c^2}}, \quad \lambda = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2+c^2}}{2^{n-1}},$$

(a sera positif, si $\dfrac{\sigma}{c} < 0$, et négatif pour $\dfrac{\sigma}{c} > 0$; au numérateur de λ le radical aura le signe σ).

Ainsi $R_1(x)$ est bien le polynome d'approximation de $\varphi(x)$, et de plus, la meilleure approximation L de $cx^n + \sigma x^{n-1}$ satisfera aux inégalités

$$|\lambda| - \frac{|A|}{|a|-1} < L < |\lambda| + \frac{|A|}{|a|-1},$$

ou

$$\left|\frac{|\sigma| + \sqrt{\sigma^2+c^2}}{2^{n-1}}\right| \cdot \left[1 - \frac{\sigma^2.(\sqrt{\sigma^2+c^2}-|\sigma|)^n}{|c|^{n+1}(\sqrt{\sigma^2+c^2}-|c|)}\right] <$$

$$< L < \left|\frac{|\sigma| + \sqrt{\sigma^2+c^2}}{2^{n-1}}\right| \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2.(\sqrt{\sigma^2+c^2}-|\sigma|)^n}{|c|^{n+1}(\sqrt{\sigma^2+c^2}-|c|)}\right].$$

Supposons d'abord que le rapport $\frac{\sigma}{c}$ ne tend pas vers 0.

Donc

$$L \backsim \frac{|\sigma| + \sqrt{\sigma^2 + c^2}}{2^{n-1}} \tag{8}$$

et $R_1(x)$ est une expression asymptotique de $R(x)$, conformément à la définition que j'ai adoptée dans mes travaux antérieurs. Nous pouvons dire également que le polynome

$$P_1(x) = cx^n + \sigma x^{n-1} - R_1(x) = \frac{Q(x) - A}{x - a} = L\cos(n\varphi - \delta) - \frac{A}{x - a} \tag{7bis}$$

est asymptotique au polynome correspondant de Zolotareff

$$P(x) = cx^n + \sigma x^{n-1} - R(x) \tag{7}$$

que nous avons à considérer ici pour toutes les valeurs de c et σ qui satisfont à l'égalité (8).

Dans ce cas, en différentiant successivement $P_1(x)$, on a

$$P_1'(x) = \frac{nL\sin(n\varphi - \delta)}{\sqrt{1 - x^2}} + \varepsilon,$$

$$P_1''(x) = \frac{n^2 L\cos(n\varphi - \delta)}{1 - x^2} + \varepsilon',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

où les termes additifs $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ sont respectivement infiniment petits par rapport aux premiers termes, x étant un point fixe quelconque *intérieur* au segment. D'où on conclut que suivant que k est pair on impair, on déterminera δ par la condition que $\cos(n\varphi - \delta)$ ou $\sin(n\varphi - \delta)$ soit égal à ± 1 au point considéré. Donc le *maximum* de $|P_1^{(k)}(x)|$ au point x est *asymptotique* à

$$\frac{n^k L}{(1 - x^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

Par conséquent, cette quantité sera également asymptotique au maximum de $|P^{(k)}(x)|$.

Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'a considérer le cas, où $\frac{\sigma}{c}$ tend vers 0. Or, dans cette hypothèse, les polynomes $P(x)$ de

Zolotareff ont, évidemment, pour expression asymptotique le polynome de Tchebychef $\frac{c}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$, puisque la meilleure approximation de σx^{n-1} est alors infiniment petite par rapport à la meilleure approximation de cx^n, et l'égalité (8) subsiste. Par conséquent, la valeur asymptotique du maximum de $|P^{(k)}(x)|$ ne pourra pas dans ce cas également dépasser le nombre $\frac{n^k L}{(1-x^2)^{\frac{k}{2}}}$.

Donc,

$$\frac{n^k L}{(1-x^2)^{\frac{k}{2}}}$$

est précisément la valeur asymptotique du maximum de $|P^{(k)}(x)|$ *en un point fixe intérieur au segment* $(-1, +1)$, *si sur tout ce segment on a* $|P(x)| \leq L$, *où* $P(x)$ *est un polynome quelconque de degré* n.