О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремахъ.

Я. Успенскаго.

§ 1. Въ настоящей замѣткѣ я имѣю въ виду вывести изъ одного общаго источника рядъ классическихъ теоремъ ариѳметики, которыя въ разное время и различными пріемами были выведены изъ теоріи эллиптическихъ функцій. Часть этихъ теоремъ была доказана изъ соображеній ариѳметическихъ [1]), совершенно отличныхъ отъ тѣхъ, которыми мы пользуемся; притомъ извѣстныя ариѳметическія доказательства, на нашъ взглядъ, сложны и мало изящны.

Почти всѣ результаты, о которыхъ мы говоримъ, а равно много другихъ болѣе сложныхъ и потому менѣе интересныхъ, могутъ быть получены изъ одного общаго ариѳметическаго тождества, похожаго на тождества, опубликованныя безъ доказательства Ліувиллемъ [2]).

Пусть $F(x, y, z)$ произвольная функція, нечетная по каждому изъ перемѣнныхъ, т. е. такая, которая для разсматриваемыхъ значеній x, y, z удовлетворяетъ условіямъ:

$$F(-x, y, z) = F(x, -y, z) = F(x, y, -z) = -F(x, y, z).$$

Обозначивъ черезъ n нечетное число $\equiv 1$ (Mod 8), будемъ разсматривать всѣ представленія этого числа въ видѣ

$$n = \lambda^2 + 8d\delta,$$

гдѣ λ нечетное число ($\gtrless 0$), а d и δ числа положительныя цѣлыя; на всѣ такія представленія распространимъ сумму

$$S = \Sigma F(\lambda - 2\delta, \lambda + 2d, 2d - 2\delta + \lambda);$$

тогда будемъ имѣть

$$S = 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ}$$

---

[1]) K. Th. Vahlen. Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. Crelle's Journal, Bd. 112.

[2]) Liouville. Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres. Douzième article, Journal de Mathématiques 1860.

и

$$S=\sum_{j=1,\,3,\,5,\ldots\sqrt{n}-2}\{F(\sqrt{n},\,j,\,j)-F(j,\,\sqrt{n},\,j)\},\ \text{если } n \text{ квадратъ.}$$

Подробнѣе этотъ результатъ можно представить такъ:

$$\sum_{n=\lambda^2+8d\delta}F(\lambda-2\delta,\lambda+2d,2d-2\delta+\lambda)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ \sum\limits_{j=1,\,3,\ldots s-2}\{F(s,j,j)-F(j,s,j)\},\ \text{если } n=s^2\end{array}\right\}\quad (\mathrm{A})$$

Доказательство этого равенства очень просто. Въ суммѣ слѣва взаимно уничтожаются всѣ члены, соотвѣтствующіе такимъ рѣшеніямъ уравненія

$$n=\lambda^2+8d\delta$$

для которыхъ $\lambda+d-2\delta\neq 0$ и $\lambda+2d-\delta\neq 0$. Всякому рѣшенію, гдѣ $\lambda+d-2\delta>0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе: $\lambda'=-\lambda+4\delta$, $d'=\lambda+d-2\delta$, $\delta'=\delta$, при чемъ

$$\lambda'-2\delta'=-\lambda+2\delta;\ \lambda'+2d'=\lambda+2d;\ \lambda'+2d'-2\delta'=\lambda+2d-2\delta.$$

Члены суммы S, соотвѣтствующіе такимъ двумъ рѣшеніямъ, поглощаются. Рѣшенію, гдѣ $\lambda+d-2\delta<0$ и $\lambda+2d-\delta>0$ соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\lambda'=3\lambda+4d-4\delta;\ d'=-\lambda-d+2\delta;\ \delta'=\lambda+2d-\delta,$$

при чемъ

$$\lambda'-2\delta'=\lambda-2\delta;\ \lambda'+2d'=\lambda+2d;\ \lambda'+2d'-2\delta'=-\lambda-2d+2\delta.$$

Соотвѣтствующіе такимъ рѣшеніямъ члены суммы S поглощаются. Рѣшенію, гдѣ $\lambda+d-2\delta<0$ и $\lambda+2d-\delta<0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\lambda'=-\lambda-4d;\ d'=d;\ \delta'=-\lambda-2d+\delta;$$

соотвѣтствующіе члены суммы S опять поглощаются. Остаются, слѣдовательно, въ суммѣ S только такіе члены, которые получаются изъ рѣшеній, удовлетворяющихъ условію

$$\lambda+2d-\delta=0 \text{ и } \lambda+d-2\delta<0$$

или

$$\lambda+d-2\delta=0 \text{ и } \lambda+2d-\delta<0.$$

Но легко убѣдиться, что такія рѣшенія возможны только при n равномъ квадрату, и что тогда сумма S приводится къ суммѣ правой части равенства (А).

Изъ этого равенства мы выведемъ очень полезную для насъ формулу, если положимъ

$$F(x,y,z)=(-1)^{\frac{x+y+z-1}{2}}\,\phi(x,\ y),$$

гдѣ функція $\phi(x,y)$ *четная* по обоимъ перемѣннымъ; тогда получимъ слѣдующее изящное тождество:

$$\sum_{n=\lambda^2+8d\delta}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\phi(\lambda-2\delta,\lambda+2d)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{\frac{s-1}{2}}\sum\limits_{j=1,\,3,\,5,\ldots s-2}\{\phi(s,j)-\phi(j,s)\},\ \text{если } n=s^2\end{array}\right\}\ \text{(B)}$$

§ 2. Положимъ въ тождествѣ (B)

$$\phi(x,\ y)=(-1)^{\frac{y-1}{2}}y;$$

послѣ небольшого вычисленія получимъ

$$\sum_{n=\lambda^2+8d\delta}(-1)^d d=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ -\dfrac{n-1}{4},\ \text{если } n \text{ квадратъ.}\end{array}\right\}$$

Если обозначить вообще черезъ $\Delta(m)$ разность между суммой четныхъ дѣлителей m и суммой нечетныхъ, то предыдущій результатъ можно представить такъ:

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\ldots}\Delta\left(\frac{n-\lambda^2}{8}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ -\dfrac{n-1}{8},\ \text{если } n \text{ квадратъ}\end{array}\right\}\qquad \text{(I)}$$

Здѣсь сумма распространяется на всѣ нечетныя числа 1, 3, 5,... меньшія $\sqrt{n}$. Полагая $n=8h+1$, $\lambda=2k+1$, вмѣсто равенства (I) получимъ:

$$\sum_{k=0,\,1,\,2,\ldots}\Delta\left(h-\frac{k(k+1)}{2}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } h \text{ не тригональное число}\\ -h,\ \text{если } h \text{ тригональное число}\end{array}\right\}\qquad \text{(I*)}$$

Положимъ затѣмъ въ тождествѣ (8)

$$\phi(x,\ y)=y^2;$$

получимъ результатъ:

$$4\sum_{n=\lambda^2+8d\delta}(-1^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda.d=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{\frac{s-3}{2}}\dfrac{s(s^2-1)}{3},\ \text{если } n=s^2\end{array}\right.$$

который можемъ представить такъ

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5\ldots;\ \lambda^2<n}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\zeta_1\left(\frac{n-\lambda^2}{8}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ -(-1)^{\frac{\sqrt{n}-1}{2}}\dfrac{\sqrt{n}(n-1)}{24},\ \text{если } n \text{ квадратъ}\end{array}\right\}\quad\text{(II)}$$

обозначая вмѣстѣ съ Ліувиллемъ черезъ

$$\zeta_1(m)$$

сумму всѣхъ дѣлителей m. Полагая $n=8h+1$ и $\lambda=2k+1$, вмѣсто равенства (II) получимъ

$$\sum_{k=0,\,1,\,2,\ldots}(-1)^k(2k+1)\zeta_1\left(h-\frac{k(k+1)}{2}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } h \text{ не тригональное число}\\ (-1)^{m-1}\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6},\ \text{если } h=\dfrac{m(m+1)}{2}\end{array}\right\}\text{(II*)}$$

Равенства (I*) и (II*) даны Гальфеномъ [1]). Принимая $\phi(x,y)=y^{2s}$ получимъ болѣе сложныя соотношенія Глешера [2]). Полагая, наконецъ,

$$\phi(x,\ y)=\cos\frac{\pi}{4}x$$

и обозначая черезъ $\varrho(m)$ разность между числомъ дѣлителей m формы $4k+1$ и числомъ дѣлителей формы $4k-1$, получимъ результатъ Stieltjes'a [3]):

$$4\sum_{\lambda=\pm1,\,\pm3,\ldots}(-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8}}\varrho\left(\frac{n-\lambda^2}{8}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}s-(-1)^{\frac{s^2-1}{8}},\ \text{если } n=s^2\end{array}\right\}\quad\text{(III)}$$

изъ котораго можно вывести интересныя слѣдствія относительно представленія квадратнаго числа суммою трехъ квадратовъ.

§ 3. Возвращаясь вновь къ тождеству (B) § 2, положимъ

$$\phi(x,\ y)=x\sin\frac{2\pi x}{3}\left(2+\cos\frac{2\pi y}{3}\right)$$

и будемъ считать $n=24h+1$. Послѣ небольшого вычисленія и сокращенія очевидно уничтожающихся членовъ можно представить лѣвую часть въ упомянутомъ тождествѣ въ видѣ суммы двухъ суммъ:

---

1) Halphen. Bull. de la Soc. math. de France 5 (1876/7) p. 158.
2) Glaisher. Quart. j. of pure and appl. math. 19 (1883) p. 220.
3) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. t. I, lettre 45.

$$S=\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\left(2\cos\frac{2\pi\lambda}{3}+\cos\frac{2\pi d}{3}\right)\sin\frac{2\pi\delta}{3}$$

$$T=\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\sin\frac{2\pi\lambda}{3}.\delta\cos\frac{2\pi\delta}{3}\left(\cos\frac{2\pi d}{3}-4\right),$$

распространенныхъ на всѣ рѣшенія уравненія

$$n=24h+1=\lambda^2+8d\delta$$

съ положительными d и δ. Въ суммѣ S исчезнутъ всѣ члены, гдѣ $\lambda\equiv\pm 1(\text{Mod }3)$; ибо въ этомъ случаѣ навѣрно одно изъ чиселъ d или δ дѣлится на 3; если $\delta\equiv 0$ (Mod 3), то $\sin\frac{2\pi\delta}{3}=0$, если же $d\equiv 0$, то $2\cos\frac{2\pi\lambda}{3}+\cos\frac{2\pi d}{3}=0$. Въ случаѣ $\lambda\equiv 0$ ни одно изъ чиселъ d и δ не дѣлится на 3 и потому $2\cos\frac{2\pi\lambda}{3}+\cos\frac{2\pi d}{3}=\frac{3}{2}$, такъ что S будетъ равна суммѣ

$$S=\frac{3}{2}\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\sin\frac{2\pi\delta}{3},$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія $n=\lambda^2+8d\delta$, гдѣ λ дѣлится на 3. Собирая въ послѣдней суммѣ члены, отвѣчающіе одному и тому же значенію λ, найдемъ совокупность этихъ членовъ равной

$$\frac{3}{2}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\sum\sin\frac{2\pi\delta}{3},$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители δ числа $\frac{n-\lambda^2}{8}$. Если наивысшая степень 2, дѣлящая это число, четная, то нетрудно видѣть, что сумма

$$\sum\sin\frac{2\pi\delta}{3}$$

равна разности между числомъ дѣлителей $\frac{n-\lambda^2}{8}$ формы $6k+1$ и числомъ дѣлителей формы $6k-1$. Если же наивысшая степень 2, дѣлящая $\frac{n-\lambda^2}{8}$, нечетная, то разсматриваемая сумма равна 0. Отсюда на основаніи извѣстныхъ результатовъ изъ теоріи квадратичныхъ формъ легко вывести, что сумма S равна суммѣ

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda,$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$24h + 1 = \lambda^2 + 2u^2 + 6v^2,$$

гдѣ $\lambda \equiv 0$ (Mod 3); но, очевидно, такихъ рѣшеній нѣтъ, слѣдовательно $S = 0$. Въ суммѣ T исчезаютъ всѣ члены, гдѣ $\lambda \equiv 0$ (Mod 3); совокупность же остальныхъ послѣ простого изслѣдованія находится равной суммѣ

$$T = -12 \sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \sin \frac{2\pi\lambda}{3} \zeta_1\left(\frac{n-\lambda^2}{24}\right),$$

распространенной на всѣ числа $\lambda \equiv \pm 1$ (Mod 3), квадраты которыхъ $< n$. Изъ двухъ же чиселъ: λ и $-\lambda$ всегда одно вида $6\tau - 1$; откуда нетрудно заключить, что

$$\frac{2}{\sqrt{3}} T = -24 \sum (-1)^\tau \zeta_1\left(\frac{n-(6\tau-1)^2}{24}\right),$$

при чемъ суммированіе распространяется на всѣ числа вида $6\tau - 1$, квадраты которыхъ $< n$. Правая часть тождества (B) равна 0, если n не квадратъ; если же $n = s^2$, гдѣ $s = 6\sigma - 1$, то она послѣ небольшого вычисленія находится равной

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(-1)^\sigma\{(6\sigma-1)^2 - 1\}.$$

Такимъ образомъ получается

$$\sum_{(6\tau-1)^2<n} (-1)^\tau \zeta_1\left(\frac{n-(6\tau-1)^2}{24}\right) = \left\{\begin{matrix} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\sigma-1}\dfrac{(6\sigma-1)^2-1}{24}, \text{ если } n=(6\sigma-1)^2 \end{matrix}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Полагая здѣсь $n = 24h + 1$, найдемъ знаменитое соотношеніе Эйлера

$$\sum_{\frac{3\tau^2-\tau}{2}<h} (-1)^\tau \zeta_1\left(h - \frac{3\tau^2-\tau}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} 0, \text{ если } h \text{ не пентагональное число} \\ (-1)^{\sigma-1}\dfrac{3\sigma^2-\sigma}{2}, \text{ если } h = \dfrac{3\sigma^2-\sigma}{2} \end{matrix}\right\} \quad \text{(IV*)}$$

Vahlen въ упомянутой выше работѣ показалъ, какъ можно вывести это равенство Эйлера, если исходить изъ другой замѣчательной теоремы Эйлера-Лежандра: число представленій цѣлаго числа суммой четнаго числа различныхъ между собою положительныхъ слагаемыхъ равно числу представленій суммой нечетнаго числа такихъ же слагаемыхъ, если разсматриваемое число не пентагональное; если же это число пентагональное $\frac{3\sigma^2-\sigma}{2}$, то первое число превосходитъ второе на $(-1)^\sigma$.

Получивъ равенство (IV*), мы можемъ наоборотъ изъ него вывести эту теорему. Обозначимъ черезъ $g(p)$ разность между числомъ представленій p въ видѣ суммы различныхъ слагаемыхъ съ четнымъ числомъ слагаемыхъ и числомъ представленій съ нечетнымъ числомъ слагаемыхъ и будемъ считать $g(0)=1$. Тогда разсужденіемъ Vahlen'а устанавливаемъ равенство

$$\sum_{p=0}^{h-1} g(p)\,\zeta_1(h-p) = -hg(h) \tag{A}$$

Съ другой стороны, положивъ

$$\chi(p)=0\,,\ \text{если } p \text{ не пентагональное число}$$
$$\chi(p)=(-1)^\sigma,\ \text{если } p=\frac{3\sigma^2-\sigma}{2}\,,$$

будемъ имѣть въ силу равенства (IV*)

$$\sum_{p=0}^{h-1} \chi(p)\,\zeta_1(h-p) = -h\chi(h) \tag{B}$$

Сличеніе равенствъ (A) и (B) позволяетъ заключить, что изъ условій

$$\chi(0)=g(0)\,;\ \chi(1)=g(1);\ldots\chi(h-1)=g(h-1)$$

вытекаетъ равенство $\chi(h)=g(h)$. Слѣдовательно, убѣдившись непосредственно въ томъ, что $\chi(0)=g(0)$; $\chi(1)=g(1)$, можемъ по индукціи вывести общее равенство

$$g(h)=\chi(h)=\left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{если } h \text{ не пентагональное число} \\ (-1)^\sigma,\ \ \text{если } h=\dfrac{3\sigma^2-\sigma}{2} \end{array}\right\} \tag{V}$$

§ 4. Положимъ теперь въ равенствѣ (B) § 2.

$$\phi(x,\ y)=\cos\frac{2\pi x}{3}\,;$$

получимъ результатъ вида

$$\sum_{n=\lambda^2+8d\delta}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\sin\frac{2\pi\lambda}{3}\sin\frac{2\pi\delta}{3}=\left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}}\left\{-\dfrac{s-1}{2}\cos\dfrac{2\pi s}{3}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi(s-1)}{3}}{2\sin\dfrac{2\pi}{3}}\right\},\ \text{если } n=s^2 \end{array}\right\} \tag{C}$$

Совершенно такъ же, какъ въ предыдущемъ §, найдемъ, что сумма лѣвой части этого равенства равна суммѣ

$$\frac{1}{8}\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{3}\right),$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$n=\lambda^2+2u^2+6v^2,$$

гдѣ $\lambda\equiv\pm 1$ (Mod 3), а u и v не равны нулю заразъ. Правая часть равенства (C) равна нулю, если n не квадратъ; если же $n=s^2$, то она будетъ

$$\frac{1}{4}\left\{(-1)^{\frac{s-1}{2}}s-(-1)^{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{s}{3}\right)\right\},\ \text{если } s\equiv\pm 1\,(\text{Mod } 3)$$

и

$$-\frac{1}{2}(-1)^{\frac{s-1}{2}}s,\ \text{если } s\equiv 0\ (\text{Mod } 3).$$

Отсюда нетрудно вывести такіе результаты

$$\sum_{n=\lambda^2+2u^2+6v^2}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{3}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ 2(-1)^{\frac{s-1}{2}}s,\ \text{если } n=s^2 \text{ и } s \text{ на 3 не дѣлится}\end{array}\right\} \quad \text{(D)}$$

$$\sum_{n=\lambda^2+2u^2+6v^2}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{3}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ -4(-1)^{\frac{s-1}{2}}s,\ \text{если } n=s^2 \text{ и } s \text{ дѣлится на 3}\end{array}\right\} \quad \text{(D*)}$$

Здѣсь обѣ суммы распространяются на *всѣ* рѣшенія уравненія

$$n=\lambda^2+2u^2+6v^2,$$

гдѣ $\lambda\equiv\pm 1$ (Mod 3).

Изъ полученныхъ равенствъ (D) и (D*) мы выведемъ одну теорему Якоби. Будемъ разсматривать всѣ рѣшенія уравненія

$$n=8\tau+1=\lambda^2+2u^2+6v^2, \quad \text{(a)}$$

удовлетворяющія условію

$$\lambda-u+1\equiv 0\ \ (\text{Mod } 3) \quad \text{(b)}$$

Обозначимъ число такихъ рѣшеній,

гдѣ $\lambda\equiv-1$ (Mod 4) черезъ P_1

гдѣ $\lambda\equiv+1$ (Mod 4) черезъ P_2

Если $n\equiv 2$ (Mod 3), то необходимо $\lambda\equiv 0$ (Mod 3); откуда легко видѣть, что въ этомъ случаѣ $P_1-P_2=0$. Если $n\equiv 1$ (Mod 3), то $u\equiv 0$ (Mod 3) и $\lambda\equiv-1$ (Mod 3). Поэтому P_1 равно числу рѣшеній уравненія (a), гдѣ $\lambda \equiv -1$ (Mod 12); a P_2 равно числу рѣшеній, гдѣ $\lambda \equiv 5$ (Mod 12). Принимая во вниманіе равенство (D), легко сообразить, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$P_1 - P_2 = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } n \text{ квадратъ } = s^2 \end{cases}$$

Если $n \equiv 0$ (Mod 3), то должно быть $\lambda \equiv +1$, $u \equiv -1$ (Mod 3); въ этомъ случаѣ изъ равенства (D*) можно вывести, что

$$P_1 - P_2 = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } n = s^2 \end{cases}$$

Разность $P_1 - P_2$ можно изобразить въ видѣ суммы

$$S = \sum (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}},$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$n = 8\tau + 1 = \lambda^2 + 2u^2 + 6v^2,$$

удовлетворяющія условію: $\lambda - u + 1 \equiv 0$ (Mod 3). Всѣ полученные результаты могутъ быть соединены въ одномъ равенствѣ

$$S = \sum (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } n = s^2 \end{array} \right\} \qquad \text{(VI)}$$

лѣвая часть котораго можетъ быть истолкована иначе. Будетъ разсматривать представленія числа $24\tau + 3 = 3n$ въ видѣ

$$24\tau + 3 = (6\alpha - 1)^2 + (6\beta - 1)^2 + (6\gamma - 1)^2. \qquad \text{(c)}$$

Равенство

$$8\tau + 1 = (2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 1)^2 + 2(2\alpha - \beta - \gamma)^2 + 6(\beta - \gamma)^2$$

показываетъ, что изъ каждаго представленія (c) получается рѣшеніе

$$\lambda = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 1; \quad \alpha = 2\alpha - \beta - \gamma; \quad v = \beta - \gamma$$

уравненія (a), удовлетворяющее условію

$$\lambda - u + 1 \equiv 0 \text{ (Mod 3)};$$

притомъ

если $\alpha + \beta + \gamma$ четное, то $\lambda \equiv -1$ (Mod 4)

если $\alpha + \beta + \gamma$ нечетное, то $\lambda \equiv 1$ (Mod 4)

Наоборотъ изъ каждаго рѣшенія уравненія (a), удовлетворяющаго условію (b), получается одно рѣшеніе (c); при чемъ

если $\lambda \equiv -1$ (Mod 4), то $\alpha+\beta+\gamma$ четное

если $\lambda \equiv +1$ (Mod 4), то $\alpha+\beta+\gamma$ нечетное

Отсюда ясно, что равенство (VI) можно представить въ видѣ

$$\sum_{4\tau+3=(6\alpha-1)^2+(6\beta-1)^2+(6\gamma-1)^2} (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } 8\tau+1 \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } 8\tau+1=s^2 \end{array} \right\} \qquad (\mathrm{VI}^*)$$

и тогда ясно, что оно выражаетъ извѣстную теорему Якоби [1]), изъ которой знаменитый геометръ вывелъ возможность представленія всякаго числа суммою четырехъ квадратовъ.

§ 5. Въ заключеніе мы предложимъ еще ариѳметическое доказательство замѣчательной теоремы Гаусса и Якоби [2]), вытекающее изъ тѣхъ же началъ, какъ все предыдущее. Теорема эта состоитъ въ слѣдующемъ: если m нечетное число вида $8h+1$, то разность между числами рѣшеній уравненія

$$m = \alpha^2 + 16\beta^2,$$

гдѣ β четное и гдѣ β нечетное, равна разности между числами рѣшеній уравненія

$$m = \gamma^2 + 8\delta^2,$$

гдѣ $\gamma \equiv \pm 1$ и гдѣ $\gamma \equiv \pm 3$ (Mod 8).

Если введемъ числовыя функціи

$$g(m) = \sum_{m=\alpha^2+16\beta^2} (-1)^\beta$$

$$G(m) = \sum_{m=\gamma^2+8\delta^2} (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}},$$

то содержаніе предыдущей теоремы можемъ выразить равенствомъ

$$g(m) = G(m).$$

---

[1]) Jacobi, Werke, Bd. 6, p. 281.

[2]) Gauss. Theoria residuorum biquadraticorum I Werke Bd. II, p. 67. Jacobi, Werke Bd. 2, p. 224—225.

При доказательствѣ мы будемъ исходить изъ слѣдующаго тождества Ліувилля: если $F(x)$ нечетная функція по отношенію къ x, то

$$\sum_{m=s^2+d\delta}(-1)^s F(d+s) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{s-1} s F(s), \text{ если } m = s^2 \end{cases} \tag{C}$$

Здѣсь сумма распространяется на всѣ представленія m въ видѣ

$$m = s^2 + d\delta,$$

гдѣ s произвольное цѣлое число, d и δ положительныя (т. е. >0) числа и притомъ δ нечетное [1]). Положимъ здѣсь $F(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$; тогда послѣ должныхъ упрощеній и принявъ во вниманіе, что

$$\sin\frac{\pi x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{8}}$$

при x нечетномъ, получимъ

$$2\sum_{m=16g^2+d\delta}(-1)^g\left(\frac{-2}{d}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2\left(\frac{-2}{s}\right)s, \text{ если } m = s^2 \end{cases} \tag{a}$$

Но извѣстно, что сумма

$$2\sum\left(\frac{-2}{d}\right),$$

распространенная по дѣлителямъ нечетнаго числа k, равна числу представленій k въ формѣ

$$k = x^2 + 2y^2;$$

поэтому изъ равенства (a) найдемъ

$$\sum_{m=16g^2+u^2+8v^2}(-1)^g = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2\left(\frac{-2}{s}\right)s, \text{ если } m = s^2 \end{cases}$$

или

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} g(m-8v^2) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2\left(\frac{-2}{s}\right)s, \text{ если } m = s^2 \end{cases} \tag{b}$$

Теперь положимъ въ равенствѣ (C) $F(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$; получимъ результатъ

$$\sum_{\delta=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ 4\delta^2<m}(-1)^\delta \varrho(m-4\delta^2) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } m = s^2 \end{cases},$$

---

[1]) Liouville. Journal de math. t. 5 (1860) p. 1.

согласившись полагать для нечетнаго n

$$\varrho(n) = \sum_{d\delta=n} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

При нечетномъ n число представленій n видѣ

$$n = \gamma^2 + 4\varepsilon^2$$

равно $2\varrho(n)$. Принявъ это во вниманіе, получимъ

$$\sum_{m=\gamma^2+4\delta^2+4\varepsilon^2} (-1)^\delta = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2(-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{array} \right\} \tag{c}$$

Мы считаемъ $m \equiv 1$ (Mod 8); поэтому числа δ и ε одинаковой четности. Если $\gamma^2 \equiv m$ (Mod 16), то $\delta \equiv 0$ (Mod 2); если же $\gamma^2 \equiv m + 8$ (Mod 16), то $\delta \equiv 1$ (Mod 2). Слѣдовательно

$$(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{m-1}{8}}, \text{ если } \delta \equiv 0 \text{ Mod } 2)$$

$$(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} = -(-1)^{\frac{m-1}{8}}, \text{ если } \delta \equiv 1 \text{ (Mod 2)}$$

изъ чего легко усмотрѣть (принявъ еще во вниманіе, что сумму $4\delta^2 + 4\varepsilon^2$ можно представить въ формѣ $8u^2 + 8v^2$), что равенство (c) можно замѣнить такимъ

$$\sum_{m=\gamma^2+8u^2+8v^2} (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2\left(\frac{-2}{s}\right) s. \text{ если } m = s^2 \end{array} \right.$$

или иначе

$$\sum_{v=0, \pm 1, \pm 2 \ldots} G(m - 8v^2) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2\left(\frac{-2}{s}\right) s, \text{ если } m = s^2 \end{array} \right\} \tag{d}$$

Сличеніе (a) и (d) показываетъ, что при всякомъ m:

$$\sum_{v=0, \pm 1, \pm 2, \ldots} G(m - 8v^2) = \sum_{v=0, \pm 1, \pm 2, \ldots} g(m - 8v^2)$$

Но $G(1) = g(1)$; поэтому изъ послѣдняго равенства при $m = 9$ найдемъ $G(9) = g(9)$, затѣмъ $G(17) = g(17)$ и т. д.; вообще

$$G(m) = g(m), \text{ если } m \equiv 1 \text{ (Mod 8)}.$$

25/I—1913.