Новый способъ интегрированія уравненій движенія планеты около солнца.

В. Ермаковъ.

Уравненія движенія точки подъ дѣйствіемъ силы обратно пропорціональной квадрату разстоянія суть:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mx}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{my}{r^3}, \qquad (1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Введу новое перемѣнное s и прибавлю новое уравненіе:

$$dt = rds. \qquad (2)$$

Интегралы этихъ уравненій суть:

$$\begin{aligned} x &= (a \operatorname{Cos} \alpha s + b \operatorname{Sin} \alpha s)^2 - (c \operatorname{Cos} \alpha s + \partial \operatorname{Sin} \alpha s)^2, \\ y &= 2\,(a \operatorname{Cos} \alpha s + b \operatorname{Sin} \alpha s)\quad (c \operatorname{Cos} \alpha s + \partial \operatorname{Sin} \alpha s), \\ r &= (a \operatorname{Cos} \alpha s + b \operatorname{Sin} \alpha s)^2 + (c \operatorname{Cos} \alpha s + \partial \operatorname{Sin} \alpha s)^2, \\ t &= \int rds. \end{aligned} \qquad (3)$$

Между пятью постоянными существуетъ слѣдующая зависимость:

$$m = 2\alpha^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + \partial^2). \qquad (4)$$

Въ случаѣ гиперболическаго движенія тригонометрическіе косинусъ и синусъ должны быть замѣнены гиперболическими. Въ такомъ случаѣ зависимость между постоянными будетъ:

$$m = 2\alpha^2\,(b^2 + \partial^2 - a^2 - c^2).$$

Подставивъ въ уравненіяхъ (3) $\frac{b}{\alpha}, \frac{\partial}{\alpha}$ вмѣсто b и ∂ и положивъ $\alpha = 0$, получимъ интегралы для параболическаго движенія:

$$x = (a + bs)^2 - (c + \partial s)^2,$$
$$y = 2(a + bs)(c + \partial s),$$
$$r = (a + bs)^2 + (c + \partial s)^2,$$
$$t = \int r ds.$$

Между постоянными будетъ зависимость:

$$m = 2(b^2 + \partial^2).$$

Мнѣ кажется, что къ сказанному нечего добавить. Желающіе могутъ провѣрить, дѣйствительно ли написанные интегралы удовлетворяютъ уравненіямъ (1) и (2).

Но если такая повѣрка кому нибудь покажется затруднительною, то я покажу, какъ это сдѣлать.

Изъ уравненій (1) и (2) можно получить такое уравненіе:

$$r\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dr}{ds}\frac{dx}{ds} = -mx. \qquad (5)$$

Подставимъ сюда вмѣсто x и r ихъ выраженія (3). Чтобы не затруднять себя большими выкладками, въ результатѣ положимъ $s = 0$. При такомъ ограниченіи легко можно найти результатъ; получимъ равенство (4).

Въ формулахъ (3) измѣнимъ s въ $s + h$, гдѣ h произвольное постоянное. Тогда измѣнятся коэффиціенты a, b, c и ∂, но $a^2 + b^2$ и $c^2 + \partial^2$ не измѣнятъ своей величины. Отсюда вытекаетъ, что уравненіе (5) удовлетворяется не только при $s = 0$, но и при всякомъ значеніи s.

1913 года 24 Ноября.