Одна задача на огибающія.

Д. Синцова.

За исключеніемъ поверхностей развертывающихся довольно трудно получить въ достаточно наглядной формѣ ребро возврата семьи поверхностей, зависящихъ отъ одного параметра. Поэтому представляетъ, можетъ быть, извѣстный интересъ разысканіе огибающей одного частнаго случая системы шаровъ, зависящихъ отъ одного параметра, именно — *системы соприкасающихся шаровъ* кривой двоякой кривизны. Если послѣдняя задана уравненіями

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) \tag{1}$$

и означимъ ξ, η, ζ, R — координаты центра и радіусъ соприкасающагося шара, а черезъ α, β, γ; l, m, n и λ, μ, ν — косинусы угловъ съ осями координатъ касательной, главной нормали и бинормали, то ξ, η, ζ и R опредѣляются, какъ извѣстно, уравненіями

$$\left.\begin{aligned}
&(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 - R^2 = 0,\\
&\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta) = 0,\\
&l(x-\xi) + m(y-\eta) + n(z-\zeta) + r = 0,\\
&\lambda(x-\xi) + \mu(y-\eta) + \nu(z-\zeta) - \varrho r' = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

откуда

$$\xi - x = lr - \lambda\varrho r', \quad \eta - y = mr - \mu\varrho r', \quad \zeta - z = nr - \nu\varrho r' \tag{3}$$

Слѣд.

$$\left.\begin{aligned}
&\xi' = -\lambda\left[\frac{r}{\varrho} + (\varrho r')'\right], \quad \eta' = -\mu\left[\frac{r}{\varrho} + (\varrho r')'\right], \quad \zeta' = -\nu\left[\frac{r}{\varrho} + (\varrho r')'\right]\\
&\qquad\qquad (R^2)' = 2(\varrho r')\left[\frac{r}{\varrho} + (\varrho r')'\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Будемъ искать огибающую семьи шаровъ

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2-R^2=0 \tag{5}$$

гдѣ ξ, η, ζ имѣютъ эти значенія.

Производная по параметру s, приравненная нулю, даетъ

$$-\xi'(X-\xi)-\eta'(Y-\eta)-\zeta'(Z-\zeta)-(R^2)'=0$$

или съ помощью (4) $\left[\left(\frac{r}{\varrho}+(\varrho r')'\right)\neq 0\right]$

$$\lambda(X-\xi)+\mu(Y-\eta)+\nu(Z-z)-\varrho r'=0$$

или еще съ помощью (2_4)

$$\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)=0 \tag{6}$$

т. е. *характеристиками являются круги кривизны кривой.*

Дифференцируя (6) еще разъ по s, получаемъ для опредѣленія ребра возврата:

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0 \tag{7}$$

т. е. *уравненіе выпрямляющей плоскости.*

Она пересѣкается съ соприкасающеюся плоскостью и шаромъ въ точкѣ прикосновенія.

Итакъ, *периферическая* [1]) *поверхность—огибающая соприкасающихся шаровъ нѣкоторой кривой двоякой кривизны имѣетъ эту кривую ребромъ возврата, а ея круги кривизны—характеристиками.*

Если беремъ косые круги, то получается каналообразная поверхность.

Задача невозможна, если $\frac{r}{\varrho}+(\varrho r')'=0$, — т. е. когда кривая сферическая.

Такимъ образомъ каждая кривая двоякой кривизны связывается, кромѣ развертывающейся, огибаемой соприкасающимися плоскостями и

---

[1]) См. напр., *G. Demartres.* Cours de géométrie infinitésimale, p. 302. *G. Scheffers.* Geometrische Anwendungen d. Diff. u. Integralrechnung, B. 2—придаетъ имъ названіе Canalflächen, даваемое обычно поверхностямъ, огибаемымъ сферами *постояннаго* радіуса.

линейчатой поверхности, образуемой бинормалями еще и съ периферической поверхностью, огибаемой соприкасающимися шарами.

Но въ отличіе отъ связи кривой двоякой кривизны съ развертывающейся обратно не всякую периферическую поверхность можно разсматривать, какъ огибающую соприкасающихся шаровъ нѣкоторой кривой двоякой кривизны. Дѣйствительно, хотя характеристики будутъ и въ общемъ случаѣ круги, которые по общему свойству огибающихъ касаются ребра возврата, но это будетъ прикосновеніе перваго, а не втораго порядка.

Д. Синцовъ.