О вѣроятности a posteriori.

(Вторая замѣтка).

А. Маркова.

Въ первой замѣткѣ съ тѣмъ же заглавіемъ, помѣщенной въ Сообщ. Харьк. Мат. Общ. за 1900 г. (2 сер. т. VII n° 1, с. 23), изъ общепринятаго выраженія вѣроятности, что въ n испытаній событіе появится k разъ, если въ n_0 испытаній оно появилось k_0 разъ,

$$P_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} \frac{\int_0^1 x^{k_0+k}(1-x)^{n_0+n-k_0-k}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}$$

я вывелъ очень простое неравенство

$$\sum P_k\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2 < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right);$$

откуда тотчасъ слѣдуетъ, что вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}} < \frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0} < \frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}},$$

при любомъ положительномъ t, больше $1-\frac{1}{t^2}$. Интересно отмѣтить, что подобный же выводъ можно сдѣлать относительно разности

$$\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0},$$

когда обѣ дроби $\frac{k}{n}$ и $\frac{k_0}{n_0}$ остаются неопредѣленными, и разсматривается вѣроятность a priori при любой постоянной вѣроятности событія; ибо въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\text{м. о.}\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2=\text{м. о.}\left(\frac{k}{n}-p-\frac{k_0}{n_0}+p\right)^2=\text{м. о.}\left(\frac{k}{n}-p\right)^2+\text{м. о.}\left(\frac{k_0}{n_0}-p\right)^2=$$
$$=p\,(1-p)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right)<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right),$$

гдѣ p означаетъ вѣроятность событія при всѣхъ испытаніяхъ.

Между нашими выводами существуетъ, конечно, нѣкоторая связь; но необходимо отличать ихъ другъ отъ друга и помнить, что первый изъ нихъ, относящійся къ вѣроятности a posteriori, установленъ только при общепринятомъ предположеніи, что до наблюденія всѣ значенія вѣроятности событія равновозможны.

Впрочемъ, если въ общей формулѣ

$$P_k=\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}\,\frac{\int_0^1 x^{k_0+k}\,(1-x)^{n_0+n-k_0-k}\,f(x)\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}\,(1-x)^{n_0-k_0}\,f(x)\,dx}$$

предположить [1]), что $f(x)$ заключается между двумя постоянными положительными числами

$$0<D\leqq f(x)\leqq C,$$

то на основаніи уже доказаннаго нами не трудно установить неравенство

$$\sum P_k\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2<\frac{C}{4D}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right);$$

откуда также слѣдуетъ, что при достаточно большихъ n и n_0 вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon<\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}<\varepsilon$$

сколь угодно близка къ единицѣ, какъ бы ни было мало неизмѣнное положительное число ε.

Остановимся теперь на вопросѣ о замѣнѣ вышеприведеннаго выраженія P_k, при $f(x)=1$ [2]), извѣстнымъ другимъ выраженіемъ, при

---

[1]) Подобное же предположеніе принялъ П. А. Некрасовъ въ своихъ лекціяхъ по „Теоріи вѣроятностей“ (1896 года) при доказательствѣ теоремы обратной теоремѣ Я. Бернулли.

[2]) Возможность распространенія тѣхъ же заключеній на случаи, когда $f(x)$ не сохраняетъ постоянной величины, остается подъ вопросомъ.

большихъ величинахъ, k_0, n_0-k_0, k, $n-k$. Я имѣю въ виду дополнить обычный выводъ этого приближеннаго выраженія, который можно найти, напримѣръ, въ «Теоріи вѣроятностей» (1898 г.) М. А. Тихомандрицкаго и въ «Ученіи о вѣроятностяхъ» (1912 г.) М. Волкова (у послѣдняго, впрочемъ, допущена крупная обмолвка), чтобы получилась предѣльная теорема при разнообразныхъ предположеніяхъ о порядкѣ возрастанія k_0, n_0-k_0, $\frac{nk_0}{n_0}$, $\frac{n(n_0-k_0)}{n_0}$.

Напомню вкратцѣ этотъ выводъ, принаровленный къ случаю, когда n, n_0, k_0, n_0-k_0 безконечно большія числа одного порядка. Во-первыхъ, оба интеграла

$$\int_0^1 x^{k_0+k}(1-x)^{n_0+n-k_0-k}dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}dx$$

и множитель $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$, передъ ихъ отношеніемъ выражаемъ черезъ произведенія вида $1.2.3\ldots N$, гдѣ N получаетъ значенія

$$k,\ n-k=l,\ n,\ k_0,\ n_0-k_0=l_0,\ n_0+1,\ k_0+k,\ l_0+l,\ n+n_0+1.$$

Примѣняя къ полученнымъ произведеніямъ формулу Стирлинга и отбрасывая единицу въ множителяхъ n_0+1 и $n+n_0+1$, получаемъ вмѣсто P_k выраженіе

$$P'_k=\sqrt{\frac{nn_0^3(k+k_0)(l+l_0)}{2\pi klk_0l_0(n+n_0)^3}}\,W_k$$

при

$$W_k=\left(\frac{n_0k}{nk_0}\right)^{-k}\left(\frac{n_0l}{nl_0}\right)^{-l}\left(\frac{n_0(k+k_0)}{(n_0+n)k_0}\right)^{k+k_0}\left(\frac{n_0(l+l_0)}{(n_0+n)l_0}\right)^{l+l_0}.$$

Затѣмъ полагаемъ

$$k=n\frac{k_0}{n_0}+z=n\frac{k_0}{n_0}+t\sqrt{\frac{2k_0l_0n(n+n_0)}{n_0^3}}$$

и ограничиваемъ t неравенствами

$$t_1<t<t_2,$$

гдѣ t_1 и t_2 какія-нибудь опредѣленныя числа и $t_2>t_1$.

Если теперь числа

$$k_0,\ l_0,\ \frac{nk_0}{n_0} \text{ и } \frac{nl_0}{n_0}$$

возрастаютъ безпредѣльно, то отношенія

$$\frac{n_0 k}{n k_0},\ \frac{n_0 l}{n l_0},\ \frac{n_0(k_0+k)}{(n_0+n)k_0},\ \frac{n_0(l_0+l)}{(n_0+n)l_0},$$

равныя

$$1+\frac{n_0 z}{n k_0},\ 1-\frac{n_0 z}{n l_0},\ 1+\frac{n_0 z}{(n_0+n)k_0},\ 1-\frac{n_0 z}{(n_0+n)l_0},$$

стремятся къ единицѣ; ибо

$$\left(\frac{n_0 z}{n k_0}\right)^2=\frac{2l_0(n+n_0)t^2}{n n_0 k_0},\quad \left(\frac{n_0 z}{n l_0}\right)^2=\frac{2k_0(n+n_0)t^2}{n n_0 l_0},$$

$$\left(\frac{n_0 z}{(n+n_0)k_0}\right)^2=\frac{2l_0 n t^2}{(n+n_0)n_0 k_0},\quad \left(\frac{n_0 z}{(n+n_0)l_0}\right)^2=\frac{2k_0 n t^2}{(n+n_0)n_0 l_0},$$

$$\frac{l_0 n}{(n+n_0)n_0 k_0}<\frac{l_0(n+n_0)}{n n_0 k_0}<\frac{n+n_0}{n k_0}=\frac{1}{k_0}+\frac{n_0}{n k_0},$$

$$\frac{k_0 n}{(n+n_0)n_0 l_0}<\frac{k_0(n+n_0)}{n n_0 l_0}<\frac{n+n_0}{n l_0}=\frac{1}{l_0}+\frac{n_0}{n l_0}.$$

Отсюда нетрудно заключить, что вмѣсто P_k' можно взять выраженіе

$$P_k''=\sqrt{\frac{n^3_0}{2\pi k_0 l_0 n(n+n_0)}}\,W_k$$

и отношеніе

$$P_k'' : P_k,$$

при сдѣланномъ нами предположеніи о безпредѣльномъ возрастаніи чиселъ k_0, l_0, $\frac{nk_0}{n_0}$ и $\frac{nl_0}{n_0}$, должно стремиться къ единицѣ.

Установивъ это, переходимъ къ разсмотрѣнію $\log W_k$, для чего разлагаемъ логарифмы вышеприведенныхъ выраженій

$$1+\frac{n_0 z}{n k_0},\ 1-\frac{n_0 z}{n l_0},\ 1+\frac{n_0 z}{(n+n_0)k_0},\ 1-\frac{n_0 z}{(n+n_0)l_0}$$

въ ряды по возрастающимъ степенямъ дробей

$$\frac{n_0 z}{n k_0},\ \frac{n_0 z}{n l_0},\ \frac{n_0 z}{(n+n_0)k_0},\ \frac{n_0 z}{(n+n_0)l_0},$$

которыя, какъ только-что было выяснено, становятся у насъ безконечно малыми.

Въ основномъ случаѣ, когда всѣ числа

$$n_0, \quad k_0, \quad l_0, \quad n$$

безконечно большія одного и того же порядка, можно признать достаточнымъ тѣхъ разсужденій, которыя приведены въ книгѣ М. А. Тихомандрицкаго и согласуются съ лекціями П. Л. Чебышева; такъ какъ въ разложеніяхъ всѣхъ четырехъ логарифмовъ

$$-k\log\frac{n_0 k}{nk_0}, \quad -l\log\frac{n_0 l}{nl_0}, \; (k_0+k)\log\frac{n_0(k_0+k)}{(n_0+n)k_0}, \; (l_0+l)\log\frac{n_0(l_0+l)}{(n_0+n)l_0},$$

члены съ третьими и высшими степенями z будутъ тогда безконечно малыми величинами. Въ другихъ же случаяхъ, которые мы имѣемъ въ виду, члены со степенями z выше второй въ отдѣльныхъ рядахъ могутъ не быть безконечно малыми и становятся таковыми только въ общей суммѣ четырехъ рядовъ, равной логарифму W_k.

Первая степень z въ логарифмѣ W_k исчезаетъ совершенно; вторая даетъ $-t^2$. Общій же членъ, гдѣ z входитъ въ степени выше второй, разбивается на такія двѣ части:

$$\frac{(-1)^{i-1}z^i n_0{}^{i-1}}{k_0{}^{i-1}}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)\left(\frac{1}{n^{i-1}}-\frac{1}{(n+n_0)^{i-1}}\right)$$
$$-\frac{z^i n_0{}^{i-1}}{l_0{}^{i-1}}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)\left(\frac{1}{n^{i-1}}-\frac{1}{(n+n_0)^{i-1}}\right).$$

Здѣсь разность

$$\frac{1}{n^{i-1}}-\frac{1}{(n+n_0)^{i-1}}$$

число положительное и меньше обѣихъ дробей

$$\frac{1}{n^{i-1}} \quad \text{и} \quad \frac{(i-1)\,n_0}{n^i},$$

а разность $\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}$ равна $\frac{1}{i(i-1)}$; наконецъ, что касается z, то его числовая величина меньше числа

$$a=\tau\sqrt{\frac{2k_0 l_0 n(n+n_0)}{n_0{}^3}},$$

гдѣ τ означаетъ наибольшее изъ чиселъ $-t_1$, t_2.

На этомъ основаніи мы можемъ утверждать, что числовая величина разности

$$\log W_k - t^2$$

меньше обѣихъ суммъ

$$\sum \frac{a^i}{i(i-1)n^{i-1}} \left\{ \frac{n_0{}^{i-1}}{k_0{}^{i-1}} + \frac{n_0{}^{i-1}}{l_0{}^{i-1}} \right\} \quad \text{и} \quad \sum \frac{a^i}{in^i} \left\{ \frac{n_0 i}{k_0{}^{i-1}} + \frac{n_0{}^i}{l_0{}^{i-1}} \right\},$$

гдѣ $i = 3, 4, 5, \ldots$ Суммы же эти соотвѣтственно меньше

$$\frac{\frac{a^3 n_0{}^2}{6n^2 k_0{}^2}}{1 - \frac{an_0}{nk_0}} + \frac{\frac{a^3 n_0{}^2}{6n^2 l_0{}^2}}{1 - \frac{an_0}{nl_0}} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{a^3 n_0{}^3}{3n^3 k_0{}^2}}{1 - \frac{an_0}{nk_0}} + \frac{\frac{a^3 n_0{}^3}{3n^3 l_0{}^2}}{1 - \frac{an_0}{nl_0}}.$$

Наконецъ надо вспомнить, что дроби $\frac{an_0}{nk_0}$ и $\frac{an_0}{nl_0}$ стремятся къ нулю, когда k_0, l_0, $\frac{nk_0}{n_0}$ и $\frac{nl_0}{n_0}$ возрастаютъ безпредѣльно, и убѣдиться въ томъ же относительно дробей

$$\frac{a^3 n_0{}^2}{n^2 k_0{}^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3 n_0{}^2}{n^2 l_0{}^2}$$

или относительно дробей

$$\frac{a^3 n_0{}^3}{n^3 k_0{}^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3 n_0{}^3}{n^3 l_0{}^2}.$$

Для указанной цѣли различаемъ два случая

$$n \leqq n_0 \quad \text{и} \quad n > n_0$$

При $n \leqq n_0$ разсматриваемъ дроби

$$\frac{a^3 n_0{}^2}{n^2 k_0{}^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3 n^2{}_0}{n^2 l_0{}^2}$$

и для ихъ квадратовъ легко получаемъ слѣдующія неравенства

$$\left(\frac{a^3 n_0{}^2}{n^2 k_0{}^2}\right)^2 \leqq \frac{8\tau^6 k_0{}^3 l_0{}^3 n^3 8 n_0{}^3 n_0{}^4}{n_0{}^9 n^4 k_0{}^4} < \frac{64\tau^6 n_0}{nk_0}, \left(\frac{a^3 n_0{}^2}{n^2 l_0{}^2}\right)^2 < \frac{64\tau^6 n_0}{nl_0}.$$

А при $n > n_0$ разсматриваемъ дроби

$$\frac{a^3 n_0{}^3}{n^3 k_0{}^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3 n_0{}^3}{n^3 l_0{}^2}$$

и устанавливаемъ неравенства

$$\left(\frac{a^3 n_0{}^3}{n^3 k_0{}^2}\right)^2 < \frac{8\tau^6 k_0{}^3 l_0{}^3 n^3 8 n^3 n_0{}^6}{n_0{}^9 n^6 k_0{}^4} < \frac{64\tau^6}{k_0}, \left(\frac{a^3 n_0{}^3}{n^3 l_0{}^2}\right)^2 < \frac{64\tau^6}{l_0}.$$

Можно и сразу разсматривать оба случая $n \leqq n_0$ и $n > n_0$ Для этого нужно только принять во вниманіе неравенство

$$\frac{1}{n^{i-1}} - \frac{1}{(n+n_0)^{i-1}} < \frac{(i-1)n_0}{(n+n_0)n^{i-1}},$$

на основаніи котораго находимъ, что числовая величина разности

$$\log W_k - t^2$$

меньше суммы

$$\sum \frac{a^i}{i(n+n_0)n^{i-1}} \left\{ \frac{n_0 i}{k_0{}^{i-1}} + \frac{n_0 i}{l_0{}^{i-1}} \right\},$$

гдѣ i по прежнему получаетъ значенія 3, 4, 5,...

Послѣдняя же сумма, очевидно, меньше

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{\dfrac{a^3 n_0{}^3}{(n+n_0)n^2 k_0{}^2}}{1 - \dfrac{a n_0}{n k_0}} + \frac{\dfrac{a^3 n_0{}^3}{(n+n_0)n^2 l_0{}^2}}{1 - \dfrac{a n_0}{n l_0}} \right\}.$$

Съ другой стороны находимъ

$$\left\{ \frac{a^3 n_0{}^3}{(n+n_0)n^2 k_0{}^2} \right\}^2 < \frac{8\tau^6(n+n_0)}{n k_0} = \frac{8\tau^6}{k_0} + \frac{8\tau^6 n_0}{n k_0},$$

$$\left\{ \frac{a^3 n_0{}^3}{(n+n_0)n^2 l_0{}^2} \right\}^2 < \frac{8\tau^6(n+n_0)}{n l_0} = \frac{8\tau^6}{l_0} + \frac{8\tau^6 n_0}{n l_0}.$$

Такимъ образомъ мы доказываемъ, что отношеніе

$$P_k : \sqrt{\frac{n_0{}^3}{2\pi k_0 l_0 n(n+n_0)}}\, e^{-t^2},$$

при всѣхъ разсматриваемыхъ нами значеніяхъ

$$k = n\frac{k_0}{n_0} + t\sqrt{\frac{2k_0 l_0 n(n+n_0)}{n_0{}^3}},$$

будетъ сколь угодно близко къ единицѣ, когда всѣ числа

$$k_0,\ l_0,\ n\frac{k_0}{n_0} \text{ и } n\frac{l_0}{n_0}$$

будутъ достаточно велики. А отсюда уже непосредственно вытекаетъ для вѣроятности неравенствъ

$$t_1\sqrt{\frac{2k_0 l_0 n(n+n_0)}{n_0{}^3}} < k - n\frac{k_0}{n_0} < t_2\sqrt{\frac{2k_0 l_0 n(n+n_0)}{n_0{}^3}}$$

извѣстное предѣльное выраженіе

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt$$

и вытекаетъ оно, какъ видно, для всѣхъ возможныхъ случаевъ, когда числа

$$k_0,\ n_0,\ n\frac{k_0}{n_0},\ \ n\,\frac{l_0}{n_0}$$

возрастаютъ безпредѣльно. Къ другимъ же случаямъ нашъ выводъ, конечно, не относится.

Подобное же вычисленіе можно провести и при рѣшеніи другой задачи Лапласа, въ которой число появленій событія дано, а неопредѣленнымъ остается число испытаній [1]), при чемъ вѣроятность каждаго значенія n, при условіяхъ Лапласа, выражается такъ

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}\,\frac{\int_0^1 x^{k_0+k}(1-x)^{n_0+n-k_0-k}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0-1}(1-x)^{n_0-k_0}dx},$$

гдѣ k_0, k, n_0, n сохраняютъ вышеуказанный смыслъ, только k разсматривается какъ данное число, а n можетъ получать значенія k, $k+1$, $k+2$, $k+3, \ldots$

Относительно послѣдней задачи слѣдуетъ замѣтить, что рѣшеніе ея по необходимости соединено съ невозможнымъ предположеніемъ равенства первоначальныхъ (до наблюденія) вѣроятностей для всѣхъ значеній n, число коихъ безконечно.

При большихъ значеніяхъ k_0, n_0, k эта невозможность затушевывается, но она ясно проявляется при $k_0=0$, когда интегралъ

$$\int_0^1 x^{k_0-1}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx,$$

входящій въ знаменатель выраженія вѣроятности, обращается въ ∞ и сама вѣроятность становится поэтому нулемъ.

4-го марта 1914 г.

---

[1]) *Laplace.* Théorie analytique des probabilités. Livre II. Chapitre VI, § 31. (1814 г.). *Буняковскій.* Основанія математической теоріи вѣроятностей. Глава 8, § 69 (1846 г.).