О числѣ представленій чиселъ нѣкоторыми квадратичными формами съ четырьмя и шестью перемѣнными.

Я. Успенскаго.

Настоящая работа тѣсно примыкаетъ къ тѣмъ, которыя были напечатаны въ «Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества» [1]), и только по случайнымъ обстоятельствамъ не была своевременно опубликована. Цѣлью ея является доказательство результатовъ Ліувилля, касающихся опредѣленія числа представленій чиселъ нѣкоторыми квадратичными формами съ четырьмя и шестью перемѣнными. Изъ другихъ работъ въ томъ же направленіи я могу указать на работу Pepin «Sur quelques formes quadratiques quaternaires» (Journal de Mathématiques, 1890), въ которой однако разсмотрѣны только простѣйшіе случаи, а наиболѣе интересные не разобраны. Равнымъ образомъ въ диссертаціи Назимова «О приложеніяхъ эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ» (Москва 1885) даны доказательства нѣкоторыхъ результатовъ Ліувилля, основанныя на примѣненіи эллиптическихъ функцій. Ліувиллемъ разсмотрѣно такое множество отдѣльныхъ квадратичныхъ формъ, что было бы крайне утомительно останавливаться на каждой изъ нихъ; поэтому я ограничусь доказательствомъ основныхъ результатовъ, изъ которыхъ другіе могутъ быть безъ труда выведены. Чтобы не повторять того, что находится въ указанной выше работѣ Pepin, я выведу результаты, уже доказанные въ этой работѣ, совершенно особымъ путемъ. Въ заключеніе замѣчу, что главный интересъ такой работы, какъ эта, заключается не столько въ доказываемыхъ результатахъ, сколько въ своеобразныхъ пріемахъ доказательства, позволяющихъ хотя бы на частныхъ примѣрахъ обнаружить обстоятельства, ускользающія отъ общей теоріи квадратичныхъ формъ со многими перемѣнными въ современномъ ея состояніи.

---

[1]) О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремахъ Stieltjes'а Т. XIV стр. 7—30. О представленіи чиселъ суммами квадратовъ. Ib. стр. 31—64. О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремахъ. Ib. 88—99.

§ 1. Основныя формулы.

Въ этомъ параграфѣ я приведу тѣ общія ариѳметическія формулы, на которыя придется постоянно ссылаться въ дальнѣйшемъ.

Пусть $F(x, y, z)$ обозначаетъ произвольную функцію аргументовъ x, y, z, удовлетворяющую слѣдующимъ условіямъ

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z); \; F(0, y, z) = 0$$
$$F(x, -y, -z) = F(x, y, z)$$

Обозначимъ черезъ S сумму

$$\sum F(\Delta + \Delta', h, \Delta - \Delta'),$$

распространенную на всѣ представленія даннаго положительнаго цѣлаго числа m въ формѣ

$$m = h^2 + \Delta\Delta',$$

гдѣ Δ и Δ' положительныя цѣлыя числа, а h произвольное цѣлое число. Обозначимъ также черезъ S' сумму

$$\sum F(\delta - 2i, d + i, 2d + 2i - \delta),$$

распространенную на всѣ представленія m въ формѣ

$$m = i^2 + d\delta,$$

гдѣ d и δ положительныя цѣлыя числа, а i произвольное цѣлое число. Между суммами S и S' всегда имѣется такое соотношеніе

$$S = 2S' + T,$$

гдѣ $T = 0$, если m не квадратъ, и

$$T = \sum F(2s, s - j, 2s - 2j) - 2 \sum_{j=1, 2, 3, \ldots 2s-1} F(2s - j, s, 2s - j)$$

если $m = s^2$. Предыдущее равенство подробнѣе перепишемъ такъ

$$\sum F(\Delta + \Delta', h, \Delta - \Delta') = 2 \sum F(\delta - 2i, d + i, 2d + 2i - \delta) + T \qquad \text{(I)}$$

Для доказательства этого важнаго равенства замѣтимъ, что всякому рѣшенію i, d, δ уравненія

$$m = i^2 + d\delta,$$

для котораго $2i + d - \delta > 0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$i' = \delta - i, \quad d' = 2i + d - \delta, \quad \delta' = \delta,$$

для котораго

$$2i'+d'-\delta'=d>0.$$

Новое рѣшеніе будетъ отлично отъ прежняго, если $\delta-2i$ не $=0$. Въ суммѣ S' исчезаютъ въ силу свойствъ функціи $F(x, y, z)$ члены, соотвѣтствующіе рѣшеніямъ, для которыхъ $\delta-2i=0$. Но члену $F(\delta-2i, d+i, 2d+2i-\delta)$, соотвѣтствующему всякому другому рѣшенію, для котораго $2i+d-\delta>0$, отвѣчаетъ членъ $F(\delta'-2i', d'+i', 2d'+2i'-\delta')$, дающій съ первымъ въ суммѣ 0, такъ какъ

$$\begin{aligned}\delta'-2i'&=-\delta+2i\\ d'+i'&=d+i\\ 2d'+2i'-\delta'&=2d+2i-\delta\end{aligned}$$

Слѣдовательно въ суммѣ S' остаются только члены, соотвѣтствующіе рѣшеніямъ, для которыхъ

$$2i+d-\delta<0 \text{ или } 2i+d-\delta=0$$

Рѣшенія послѣдней категоріи возможны только при m равномъ квадрату s^2, и соотвѣтствующая имъ часть суммы S' будетъ

$$\sum F(2s-j,\ s,\ 2s-j), \qquad j=1, 2, \ldots 2s-1$$

Выбросивъ эти члены, если они имѣются, изъ суммы S', получаемъ сумму σ'

$$\sigma'=\sum F(\delta-2i,\ d+i,\ 2d+2i-\delta)$$

распространенную на всѣ рѣшенія уравненія

$$m=i^2+d\delta,$$

для которыхъ

$$2i+d-\delta<0.$$

Но всякому такому рѣшенію соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$h=d+i,\ \ \Delta=d,\ \ \Delta'=\delta-d-2i$$

уравненія

$$m=h^2+\Delta\Delta',$$

удовлетворяющее условію $\Delta'-\Delta+2h>0$ и обратно. Отсюда видно, что сумма σ' будетъ равна суммѣ

$$\sigma=\sum F(\Delta+\Delta',\ h,\ \Delta-\Delta'),$$

распространенной на всѣ рѣшенія, для которыхъ $\Delta'-\Delta+2h>0$. Нетрудно установить связь между суммами σ и S. Всякому рѣшенію h, Δ, Δ', для котораго

$$\Delta-\Delta'+2h>0$$

соотвѣтствуетъ другое рѣшеніе

$$h_1=-h;\ \Delta_1=\Delta',\ \Delta_1'=\Delta,$$

для котораго

$$\Delta_1-\Delta_1'+2h_1<0$$

Двумъ этимъ рѣшеніямъ соотвѣтствуютъ въ суммѣ S равные члены

$$F(\Delta+\Delta',\ h,\ \Delta-\Delta') \text{ и } F(\Delta'+\Delta,\ -h,\ \Delta'-\Delta).$$

Слѣдовательно, часть суммы S, соотвѣтствующая рѣшеніямъ, для которыхъ

$$\Delta-\Delta'+2h\neq 0.$$

равна $2\sigma=2\sigma'$. Что же касается рѣшеній, для которыхъ $\Delta'-\Delta+2h=0$, то соотвѣтствующая имъ часть суммы S будетъ

$$\sum F(2s,\ s-j,\ 2s-2j);\qquad j=1,\ 2,\ldots 2s-1,$$

если $m=s^2$.

Отсюда уже сразу убѣждаемся въ справедливости формулы (I). Изъ нея выводимъ другія формулы, ограничивая извѣстнымъ образомъ выборъ функціи $F(x,\ y,\ z)$. Положимъ, что

$$F(x,\ y,\ z)=0, \text{ если } x \text{ нечетное}$$
$$F(x,\ y,\ z)=0, \text{ если } y \text{ нечетное}$$

и будемъ предполагать m нечетнымъ числомъ. Тогда въ (I) можно считать h четнымъ, δ четнымъ, а d нечетнымъ; послѣ небольшой перемѣны въ обозначеніяхъ получимъ новую формулу

$$\sum F\left(\frac{\Delta+\Delta'}{2},\ 2h,\ \frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)=2\sum F(d-i,\ \delta+i,\ \delta+i-d)+T \qquad \text{(II)}$$

Здѣсь сумма въ лѣвой части распространена на рѣшенія уравненія

$$m=4h^2+\Delta\Delta',$$

сумма въ правой части—на рѣшенія уравненія

$$m=i^2+2d\delta;\ \delta \text{ нечетное},$$

а величина T будетъ $=0$, если m не квадратъ и

$$T = \sum F(s,\ s-j,\ s-j); \qquad {\scriptstyle j=1,\,3,\,5,\dots 2s-1}$$

если $m = s^2$.

Предположивъ, что

$$F(x,\ y,\ z) = 0, \text{ если } y \text{ четное}$$
$$F(x,\ y,\ z) = 0, \text{ если } x \text{ нечетное}$$

и взявъ $m = 4n$, получимъ послѣ перемѣны въ обозначеніяхъ новую формулу

$$\sum F\left(\frac{\Delta+\Delta'}{4},\ \lambda,\ \frac{\Delta-\Delta'}{2}\right) = 2\sum F(d+i,\ \delta-2i,\ \delta-2i-2d) + T \qquad \text{(III)}$$

Сумма въ лѣвой части распространяется на рѣшенія уравненія

$$4n = \lambda^2 + \Delta\Delta',\ \lambda \text{ нечетное},$$

сумма въ правой части—на рѣшенія уравненія

$$n = i^2 + d\delta,\ \delta \text{ нечетное},$$

а величина $T = 0$, если n не квадратъ и

$$T = 2\sum F(s,\ j,\ j); \qquad {\scriptstyle j=1,\,3,\,5,\dots 2s-1,}$$

если $n = s^2$.

Пусть $\Phi(x,\ y,\ z)$—функція, удовлетворяющая условіямъ

$$\Phi(-x,\ y,\ z) = -\Phi(x,\ y,\ z)$$
$$\Phi(x,\ -y,\ z) = -\Phi(x,\ y,\ z)$$
$$\Phi(x,\ y,\ -z) = -\Phi(x,\ y,\ z)$$

Беря въ формулѣ (III) одинъ разъ

$$F(x,\ y,\ z) = \Phi(x,\ y,\ z),$$

другой разъ

$$F(x,\ y,\ z) = (-1)^{\frac{y-z}{2}}\,\Phi(x,\ y,\ z)$$

и составляя разность результатовъ, получимъ при n нечетномъ еще одну полезную формулу

$$\sum \Phi\left(\frac{\Delta+\Delta'}{4},\ \lambda,\ \frac{\Delta-\Delta'}{2}\right) = 4\sum \Phi(d+2i,\ \delta-4i,\ \delta-4i-2d). \qquad \text{(IV)}$$

Здѣсь сумма въ правой части распространяется на рѣшенія уравненія

$$n = 4i^2 + d\delta,$$

а въ лѣвой части на тѣ же значенія, какъ въ формулѣ (III).

Если m нечетное число и функція $F(x, y, z)$ удовлетворяетъ тѣмъ же условіямъ, какъ выше, то будетъ имѣть мѣсто слѣдующая формула

$$\sum F\left(\frac{\Delta+\Delta'}{2},\ \lambda,\ \frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)=2\sum F(d+2h,\ \delta-2h,\ 2h+d-\delta) \qquad \text{(V)}$$

Здѣсь сумма слѣва распространяется на рѣшенія уравненія

$$2m=\lambda^2+\Delta\Delta',\ \lambda \text{ нечетное},$$

а сумма справа—на рѣшенія уравненія

$$m=2h^2+d\delta.$$

Доказательство этой формулы совершенно подобно доказательству формулы (I).

Если $\Phi(x, y, z)$ функція, удовлетворяющая тѣмъ же условіямъ, какъ въ формулѣ (IV), то справедливо равенство

$$\sum\Phi\left(\frac{\Delta'+\Delta}{3},\ h,\ \Delta'-\Delta\right)=4\sum\Phi(d+2\lambda,\ 3\lambda-\delta,\ 3d+6\lambda-2\delta)+T \qquad \text{(VI)}$$

Здѣсь сумма справа распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$n=3\lambda^2+d\delta;\ d,\ \delta \text{ положительны, } \delta \text{ на 3 не дѣлится,}$$

сумма же слѣва—на рѣшенія уравненія

$$3n=h^2+\Delta\Delta',\ h \text{ не дѣлится на 3;}$$

величина $T=0$, если n не утроенный квадратъ и

$$T=2\sum\Phi(2\sigma,\ 3\sigma-j,\ 6\sigma-2j); \qquad j=1,\ 2,\ldots 6\sigma,$$

если $n=3\sigma^2$. На доказательствѣ этой формулы нѣтъ нужды останавливаться.

Наконецъ, слѣдуетъ привести еще одну формулу, которой приходилось пользоваться въ ранѣе напечатанныхъ работахъ. Если функція $F(x)$ такова, что

$$F(-x)=-F(x),\ F(0)=0$$

то

$$\sum(-1)^s F(d+s)=0, \text{ если } m \text{ не кв., и} =(-1)^{s-1}sF(s), \text{ если } m=s^2; \qquad \text{(VII)}$$

здѣсь сумма распространяется на рѣшенія уравненія

$$m=s^2+d\delta,$$

въ которомъ d и δ положительныя числа и притомъ δ нечетное.

§ 2. Число представленій формами x^2+y^2 и x^2+2y^2.

Можно было бы предполагать извѣстнымъ, какъ выражается число представленій какого-либо числа формою x^2+y^2 или x^2+2y^2; но представляется интереснымъ получить хотя бы хорошо извѣстные результаты совершенно инымъ путемъ, тѣмъ болѣе, что такимъ же образомъ въ дальнѣйшемъ будутъ выведены гораздо болѣе трудныя вещи.

Въ формулѣ (V) § 1 положимъ $F(x, y, z) = \sin\frac{\pi x}{2}$; это дастъ намъ такое равенство

$$\sum \sin\frac{\pi}{4}\Delta\cos\frac{\pi}{4}\Delta' = \sum (-1)^h \sin\frac{\pi d}{2}$$

Но это равенство можно представить проще, если замѣтить, что

$$\sin\frac{\pi}{4}\Delta = \left(\frac{-2}{\Delta}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{\pi}{4}\Delta' = \left(\frac{2}{\Delta'}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\frac{\pi}{4}\Delta\cos\frac{\pi}{4}\Delta' = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}\left(\frac{2}{\Delta\Delta'}\right) = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}\left(\frac{2}{2m-\lambda^2}\right) = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}+\frac{m-1}{2}}$$

Вводя ариѳметическую функцію $\varrho(m)$, опредѣляемую равенствомъ

$$\varrho(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}; \quad m = d\delta, \ \delta \text{ неч.}$$

и выполнивъ одно суммированіе (соотвѣтственно при данныхъ λ и h), получимъ

$$2\sum_{h=0,\,\pm1,\,\pm2,\dots} (-1)^h \varrho(m-2h^2) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{\lambda=\pm1,\,\pm3,\,\pm5\dots} \varrho(2m-\lambda^2) \tag{1}$$

Но нетрудно видѣть, что $\varrho(m) = 0$, если $m \equiv 3 \pmod 4$; на этомъ основаніи

$$\sum \varrho(m-2h^2) = 0,$$

если суммированіе производить по нечетнымъ h, когда $m \equiv 1 \pmod 4$, и по четнымъ h, когда $m \equiv 3 \pmod 4$. Комбинируя послѣднее равенство съ (1), получимъ

$$2\sum_{h=0,\,\pm1,\,\pm2,\dots} \varrho(m-2h^2) = \sum_{\lambda=\pm1,\,\pm3,\,\pm5,\dots} \varrho(2m-\lambda^2) \tag{2}$$

Обозначимъ теперь черезъ $N(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2 + y^2.$$

Если будемъ разсматривать уравненіе

$$m = 2h^2 + k^2 + l^2 \qquad \text{(a)}$$

то число рѣшеній его P выразится суммой

$$P = \sum_{h=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots} N(m - 2h^2)$$

Подобно этому число рѣшеній Q уравненія

$$2m = 4h^2 + \lambda^2 + \mu^2 \qquad \text{(b)}$$

выразится суммой

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{\lambda = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5, \dots} N(2m - \lambda^2)$$

Но легко обнаружить, что $P = Q$, такъ какъ каждому рѣшенію (h, k, l) уравненія (a) соотвѣтствуетъ рѣшеніе $(h,\ \lambda = k + l,\ \mu = k - l)$ уравненія (b) и наоборотъ, рѣшенію (h, λ, μ) послѣдняго уравненія соотвѣтствуетъ рѣшеніе $\left(h,\ k = \frac{\lambda + \mu}{2},\ l = \frac{\lambda - \mu}{2}\right)$ перваго.

Равенство $P = Q$ переписываемъ такъ

$$2 \sum N(m - 2h^2) = \sum N(2m - \lambda^2) \qquad (2^*)$$

и, полагая $N(n) - 4\varrho(n) = \Omega(n)$, отсюда и изъ (2) найдемъ

$$\sum \Omega(2m - \lambda^2) = 2 \sum \Omega(m - 2h^2). \qquad (3)$$

Непосредственно убѣждаемся, что $\Omega(1) = 0$, $\Omega(3) = 0$ и т. д. и если допустимъ

$$\Omega(n) = 0$$

для всѣхъ нечетныхъ $n < 2m - 1$, то изъ (3) выведемъ $\Omega(2m - 1) = 0$, слѣдовательно будемъ имѣть

$$N(m) = 4\varrho(m)$$

для всѣхъ нечетныхъ m [1]). Послѣ того, какъ установлено это равенство для нечетныхъ m, уже весьма легко подтвердить его и для всякихъ четныхъ m.

---

[1]) Для нечетныхъ n формы $4\mu + 3$ очевидно $N(n) = 0$ и $\varrho(n) = 0$; слѣдовательно равенство $\Omega(n) = 0$ нужно провѣрить только для такихъ n, которыя представляется въ видѣ $n = 2m - 1$ съ нечетнымъ m.

Чтобы подобнымъ же образомъ вывести число представленій формой x^2+2y^2, вновь обращаемся къ формулѣ (V) § 1, въ которой полагаемъ

$$F(x,\ y,\ z)=f(x,\ y+z),$$

считая, что функція $f(x,y)$ удовлетворяетъ условіямъ

$$f(-x,y)=-f(x,y);\ f(x,-y)=f(x,y).$$

Получаемъ слѣдующую полезную формулу

$$\sum f\left(\frac{\Delta+\Delta'}{2},\ \lambda+\frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)=2\sum f(d+2h,\ d) \tag{I}$$

Полагая въ ней $f(x,\ y)=\sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{4}y$, получимъ

$$\sum(-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8}}\sin\frac{\pi}{4}(\Delta+\Delta')\cos\frac{\pi}{8}(\Delta-\Delta')=2\sum(-1)^{h+\frac{d-1}{2}+\frac{d^2-1}{8}}$$

Если предположимъ $m\equiv 3 \pmod 4$, то изъ уравненія

$$2m=\lambda^2+\Delta\Delta'$$

выведемъ $\Delta\Delta'\equiv 5 \pmod 8$, слѣдовательно число $\frac{\Delta+\Delta'}{4}$ цѣлое и нечетное; поэтому въ случаѣ $m\equiv 3 \pmod 4$

$$\sum(-1)^{h+\frac{d-1}{2}+\frac{d^2-1}{8}}=0. \tag{c}$$

Если $m\equiv 1 \pmod 4$, то $\Delta\Delta'\equiv 1 \pmod 8$, поэтому будемъ имѣть

$$\frac{\Delta+\Delta'}{2}\equiv 1,\ 3,\ 1,\ 3 \pmod 4$$

при $\Delta\equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7 \pmod 8$

слѣдовательно

$$\sin\frac{\pi}{4}(\Delta+\Delta')=(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}$$

Полагая $m\equiv 1 \pmod 8$ и считая $\lambda\equiv\pm 1 \pmod 8$, изъ сравненія $\Delta\Delta'\equiv 1 \pmod{16}$, имѣющаго мѣсто въ этомъ случаѣ, выведемъ, что

$$\frac{\Delta-\Delta'}{8}\equiv 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0 \pmod 2$$

при $\Delta\equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15 \pmod{16}$.

Если $m \equiv 5 \pmod 8$ и опять $\lambda \equiv \pm 1 \pmod 8$, то будемъ имѣть

$$\frac{\Delta - \Delta'}{8} \equiv 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1 \pmod 2$$

при $\Delta \equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15 \pmod{16}$.

Въ обоихъ случаяхъ

$$\cos\frac{\pi}{8}(\Delta - \Delta') = (-1)^{\frac{\Delta^2-1}{8}+\frac{\lambda^2-1}{8}+\frac{m^2-1}{8}},$$

и эта формула имѣетъ мѣсто также при $\lambda \equiv \pm 3 \pmod 8$. Такимъ образомъ въ случаѣ $m \equiv 1 \pmod 4$ получаемъ

$$\sum (-1)^{\frac{m^2-1}{8}+\frac{\Delta-1}{2}+\frac{\Delta^2-1}{8}} = 2\sum (-1)^{h+\frac{d-1}{2}+\frac{d^2-1}{8}} \tag{d}$$

Полагая

$$\varphi(n) = \sum\left(\frac{-2}{\delta}\right),$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ нечетные дѣлители δ числа n, мы можемъ представить равенства (c) и (d) такъ

$$\sum_{h=0,\,\pm1,\,\pm2,\ldots} (-1)^h \varphi(m-2h^2) = 0;\quad m \equiv 3 \pmod 4 \tag{4}$$

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum_{\lambda=\pm1,\,\pm3,\ldots} \varphi(2m-\lambda^2) = 2\sum_{h=0,\,\pm1,\,\pm2,\ldots} (-1)^h \varphi(m-2h^2);\quad m \equiv 1 \pmod 4 \tag{5}$$

Обозначимъ черезъ $N(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2 + 2y^2.$$

Легко убѣдиться, что $N(n) = 0$, когда $n \equiv 5{,}7 \pmod 8$; въ этомъ случаѣ также будетъ $\varphi(n) = 0$. Предполагая, что $m \equiv 3 \pmod 8$, разсмотримъ уравненіе

$$m = 2h^2 + 2k^2 + l^2,$$

въ которомъ одно изъ чиселъ h и k будетъ четнымъ, а другое нечетнымъ. Число рѣшеній, гдѣ h четное, будетъ, очевидно, равно числу рѣшеній, гдѣ h нечетное, откуда

$$\sum (-1)^h N(m-2h^2) = 0,\quad m \equiv 3 \pmod 8 \tag{4*}$$

Если $m \equiv 1 \pmod 4$, то въ уравненіи

$$m = 2h^2 + 2k^2 + l^2$$

оба числа h и k одинаковой четности, именно четныя, когда $m \equiv 1 \pmod 8$ и нечетныя, когда $m \equiv 5 \pmod 8$. Число рѣшеній P этого уравненія можно представить въ видѣ

$$P = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum (-1)^h N(m-2h^2)$$

Каждому рѣшенію h, k, l соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\lambda = l+h+k, \quad \mu = l-h-k, \quad \nu = h-k$$

уравненія

$$2m = \lambda^2 + \mu^2 + 2\nu^2,$$

удовлетворяющее условію $\lambda \equiv \mu \pmod 4$. Обратно, каждому такому рѣшенію λ, μ, ν, соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$h = \frac{\lambda-\mu}{4} + \frac{\nu}{2}, \; k = \frac{\lambda-\mu}{4} - \frac{\nu}{2}, \; l = \frac{\lambda+\mu}{2}$$

Если Q есть число рѣшеній уравненія

$$2m = \lambda^2 + \mu^2 + 2\nu^2,$$

то изъ сказаннаго ясно, что $P = \frac{1}{2} Q$; но такъ какъ

$$Q = \sum N(2m - \lambda^2),$$

то будемъ имѣть

$$\frac{1}{2} \sum N(2m-\lambda^2) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum (-1)^h N(m-2h^2); \quad m \equiv 1 \pmod 4 \qquad (5^*)$$

Положивъ

$$\Omega(n) = N(n) - 2\varphi(n)$$

изъ (4), (4*), (5) и (5*) получимъ

$$\sum (-1)^h \Omega(m-2h^2) = 0, \qquad m \equiv 3 \pmod 4 \qquad (6)$$

$$2\sum (-1)^h \Omega(m-2h^2) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum \Omega(2m-\lambda^2), \; m \equiv 1 \pmod 4 \qquad (7)$$

При малыхъ нечетныхъ n непосредственно находимъ $\Omega(n) = 0$. То же равенство мы докажемъ вообще, если, допустивъ его для всѣхъ нечетныхъ $n < N$, покажемъ, что $\Omega(N) = 0$. Но это равенство очевидно, если $n \equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$; если $N \equiv 3 \pmod 8$, то оно получается изъ (6), гдѣ слѣдуетъ взять $m = N$; если, наконецъ, $N \equiv 1 \pmod 8$, то оно получается изъ (7), когда возьмемъ $m = \frac{N+1}{2}$. Такимъ образомъ имѣемъ вообще

$$N(n) = 2\varphi(n).$$

§ 3. Число представленій формой x^2+3y^2.

Чтобы такимъ же образомъ опредѣлить число представленій формой x^2+3y^2, положимъ въ равенствѣ (V) § 1

$$F(x,\ y,\ z)=\sin\frac{2\pi x}{3}\cos\frac{2\pi z}{3}\ ;$$

получимъ

$$\frac{1}{2}\sum\left(\sin\frac{2\pi\Delta}{3}+\sin\frac{2\pi\Delta'}{3}\right)=\sum\left\{\sin\frac{2\pi}{3}(2d-\delta+4h)+\sin\frac{2\pi\delta}{3}\right\}$$

Но если m не дѣлится на 3, то легко видѣть, что

$$\sum\left\{\sin\frac{2\pi}{3}(2d-\delta+4h)+\sin\frac{2\pi\delta}{3}\right\}=\sum\left(\frac{3}{2}\sin\frac{2\pi\delta}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi d}{3}\right)=2\sum\sin\frac{2\pi d}{3}$$

такъ что будетъ

$$\sum\sin\frac{2\pi\Delta}{3}=2\sum\sin\frac{2\pi d}{3} \qquad \text{(a)}$$

Полагая

$$\psi(n)=\sum\left(\frac{-3}{\delta}\right),$$

гдѣ сумма берется по всѣмъ нечетнымъ дѣлителямъ δ числа n, и замѣчая, что

$$\sin\frac{2\pi n}{3}=\left(\frac{-3}{n}\right)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

вмѣсто (a) можемъ написать

$$\sum_{\lambda=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\dots}\psi(2m-\lambda^2)=2\sum_{h=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots}\psi(m-2h^2) \qquad (1)$$

Разсмотримъ теперь уравненія

$$m=\xi^2+2\eta^2+3\zeta^2 \qquad \text{(b)}$$

$$6m=h^2+k^2+l^2,\quad h \text{ четное и не дѣл. на } 3 \qquad \text{(c)}$$

и, обозначивъ числа ихъ рѣшеній черезъ P и R, докажемъ, что

$$P=\frac{1}{4}R.$$

Число рѣшеній уравненія (c) будетъ равно числу рѣшеній уравненіе

$$6m=h^2+2p^2+2q^2$$

или числу рѣшеній уравненія

$$3m = 2i^2 + p^2 + q^2,$$

гдѣ i на 3 не дѣлится. Изъ двухъ чиселъ p и q одно дѣлится на 3, откуда видно, что уравненіе

$$3m = 2i^2 + p^2 + 9r^2 \tag{d}$$

имѣетъ $\frac{1}{2}R$ рѣшеній. Если-же разсматривать только рѣшенія, для которыхъ $i \equiv p \pmod 3$, то число такихъ рѣшеній будетъ $\frac{1}{4}R$. Между этими рѣшеніями и рѣшеніями уравненія (b) устанавливается взаимно—однозначное соотвѣтствіе по формуламъ

$$\xi = \frac{p+2i}{3}, \ \eta = \frac{p-i}{3}, \ \zeta = r$$

$$p = \xi + 2\eta, \quad i = \xi - \eta, \quad r = \zeta,$$

откуда видно, что $P = \frac{1}{4}R$. Обозначимъ черезъ Q число рѣшеній уравненія

$$2m = 3x^2 + y^2 + z^2$$

и докажемъ, что $R = 2Q$. Для этого обращаемся къ формулѣ (VI) § 1 и полагаемъ въ ней

$$\Phi(x, y, z) = \sin\frac{3\pi x}{2};$$

получимъ послѣ упрощеній

$$-2\sum(-1)^\lambda \varrho(n-3\lambda^2) = \sum(-1)^\sigma(-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}, \tag{2}$$

причемъ первая сумма распространяется на всѣ значенія λ, для которыхъ $3\lambda^2 < n$, а вторая сумма на всѣ представленія $3n$ въ видѣ

$$3n = h^2 + 2\varrho\sigma, \quad h \equiv n \pmod 2 \text{ и } h \text{ не дѣл. на } 3$$

При $n = 2m$ число h четное, σ нечетное и при нечетномъ λ

$$\varrho(2m - 3\lambda^2) = 0;$$

это даетъ возможность переписать (2) такъ

$$\sum_{h \text{ четн. не дѣл. на } 3.} \varrho(6m - h^2) = 2\sum_{x=0,\,\pm1,\,\pm2,\dots} \varrho(2m - 3x^2)$$

Но послѣднее равенство равносильно $R = 2Q$. Такъ какъ уже доказано, что $R = 4P$, то

$$Q = 2P.$$

Обозначая черезъ $N(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2 + 3y^2$$

будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$\sum N(2m - \lambda^2) = 2 \sum N(m - 2h^2) \tag{4}$$

Если положимъ

$$\Omega(n) = N(n) - 2\psi(n),$$

то изъ (1) и (4) найдемъ

$$\sum \Omega(2m - \lambda^2) = 2 \sum \Omega(m - 2h^2). \tag{5}$$

Нужно помнить, что здѣсь m—нечетное число, не дѣлящееся на 3. Для малыхъ нечетныхъ n находимъ непосредственно $\Omega(n) = 0$. Для того, чтобы оправдать это равенство вообще, замѣтимъ прежде всего, что $\Omega(3n) = \Omega(n)$ и что $\Omega(n) = 0$, если $n \equiv 5, 11 \pmod{12}$, ибо для такихъ n очевидно $N(n) = 0$ и $\psi(n) = 0$. Положимъ теперь, что равенство

$$\Omega(n) = 0$$

провѣрено для всѣхъ нечетныхъ чиселъ $n' \equiv 1 \pmod 4$, которыя $< 12k + 1$, и для всѣхъ нечетныхъ чиселъ $n'' \equiv 3 \pmod 4$, которыя $< 6k + 1$. Докажемъ, что тоже равенство будетъ справедливо для всѣхъ $n' < 12(k+1) + 1$ и для всѣхъ $n'' < 6(k+1) + 1$, а это уже дастъ возможность утверждать, что вообще $\Omega(n) = 0$. Положимъ въ (5) $m = 6k + 5$, тогда получимъ

$$\Omega(12k+9) + \Omega(12k+1) + \ldots = \Omega(6k+5) + 2\Omega(6k+3) + 2\Omega(6k-3) + \ldots;$$

но $\Omega(12k+9) = \Omega(4k+3) = 0$ по предположенію (ибо $4k + 3 < 6k + 1$, что можно предполагать), $\Omega(6k+5) = 0$, $\Omega(6k+3) = \Omega(2k+1) = 0$ и т. д., слѣдовательно $\Omega(12k+1) = 0$. А такъ какъ $\Omega(12k+5) = 0$, $\Omega(12k+9) = 0$, то будемъ имѣть $\Omega(n') = 0$ для всѣхъ $n' < 12(k+1) + 1$. Положимъ въ (5) $m = 6k + 1$; лѣвая часть будетъ равна 0, такъ какъ уже доказано, что $\Omega(12k+1) = 0$, правая же часть будетъ

$$\Omega(6k+1) + 2\Omega(6k-1) + \ldots = 0,$$

откуда $\Omega(6k+1) = 0$. А такъ какъ $\Omega(6k+3) = 0$, $\Omega(6k+5) = 0$, то будемъ имѣть $\Omega(n'') = 0$ для всѣхъ $n'' < 6(k+1) + 1$. Такимъ образомъ доказано, что для нечетнаго n

$$N(n) = 2\psi(n).$$

Если n четное и дѣлится только на 2, но не на 4, то очевидно $N(n) = 0$. То же будетъ имѣть мѣсто, когда вообще высшая степень 2, дѣлящая n, нечетная.

Если же высшая степень 2, дѣлящая n, четная, то нетрудно убѣдиться, что

$$N(n)=6\psi(n).$$

Отсюда видно, что уравненіе

$$4m=x^2+3y^2, \quad m \text{ неч.}$$

въ нечетныхъ числахъ x и y имѣетъ $4\psi(m)$ рѣшеній, т. е. въ два раза больше, чѣмъ уравненіе

$$m=x^2+3y^2.$$

§ 4. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+t^2$ и другими формами, съ ней тѣсно связанными.

Чтобы получить число представленій нечетнаго числа m формой $x^2+y^2+z^2+t^2$, мы положимъ въ формулѣ (II) § 1

$$F(x,\, y,\, z)=x(-1)^{\frac{y}{2}};$$

получимъ равенство

$$\sum(-1)^h\frac{\Delta+\Delta'}{2}=2\sum(-1)^{\frac{\delta-i}{2}}(d+i)+\{(-1)^{\frac{s-1}{2}}s\}; \tag{a}$$

здѣсь заключенный въ скобки $\{\,\}$ членъ нужно вообще считать равнымъ 0 и только, когда $n=s^2$, полагать его равнымъ $(-1)^{\frac{s-1}{2}}s$. Если будемъ обозначать черезъ $\zeta(n)$ сумму дѣлителей n, то лѣвую часть можно представить суммой

$$\sum(-1)^h\zeta(m-4h^2);$$

что же касается суммы

$$2\sum(-1)^{\frac{\delta-i}{2}}(d+i)=2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}; \quad m=i^2+2d\delta,$$

то въ силу сказаннаго въ § 2 ее можно представить въ видѣ суммы

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i$$

распространенной на рѣшенія уравненія

$$n=i^2+i'^2+i''^2, \quad i'\equiv i'' \pmod 2)$$

гдѣ i' и i'' не равны 0 заразъ. Прибавляя членъ $\{(-1)^{\frac{s-1}{2}} s\}$ въ случаѣ $n=s^2$, мы получимъ такую же сумму, но уже распространенную на всѣ рѣшенія. Равенство (a) представляется теперь въ слѣдующемъ видѣ

$$2\sum(-1)^h\zeta(m-4h^2)=\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;\ m=i^2+i'^2+i''^2\dots \qquad (1)$$

Полагая въ формулѣ (VII) § 1 $F(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$, мы извлечемъ изъ нея слѣдующее равенство

$$\sum(-1)^h=2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;\quad m=i^2+i'^2+i'^2;\quad i'\equiv i''\ (\mathrm{mod}\ 2) \qquad (\mathrm{b})$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m=4h^2+x^2+y^2+z^2+t^2;\quad x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

Если обозначимъ черезъ $N(n)$ число представленій n формой $x^2+y^2+z^2+t^2$, то нетрудно видѣть, что для нечетнаго n число представленій той же формой, но удовлетворяющихъ условію $x\equiv y$ (mod 2), будетъ $\frac{1}{2}N(n)$. На этомъ основаніи равенство (b) можно написать такъ

$$\sum(-1)^hN(m-4h^2)=4\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i \qquad (2)$$

Сравненіе (1) и (2) даетъ

$$\sum(-1)^hN(m-4h^2)=8\sum(-1)^h\zeta(m-4h^2)$$

Для малыхъ значеній m непосредственно провѣряется, что $N(m)=8\zeta(m)$; предыдущее равенство подтверждаетъ эту индукцію для всякихъ нечетныхъ m. Такимъ образомъ имѣемъ

$$N(m)=8\zeta(m),\quad m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

Отсюда уже нетрудно вывести, что для четныхъ $n=2^sm$, m неч.

$$N(2^sm)=24\zeta(m)$$

Въ дальнѣйшемъ, когда придется разсматривать сразу нѣсколько квадратичныхъ формъ, удобно будетъ ввести для обозначенія числа представленій n формой $\varphi(x, y, z,\dots)$ знакъ

$$N(n=\varphi(x, y, z,\dots)).$$

При такомъ обозначенiи только что выведенныя равенства представятся такъ

$$N(m=x^2+y^2+z^2+t^2)=8\zeta(m) \text{ при } m \text{ нечет.}$$
$$N(2^s m=x^2+y^2+z^2+t^2)=24\zeta(m) \text{ при } s>0$$

или безъ различенія случаевъ нечетнаго и четнаго n

$$N(n=x^2+y^2+z^2+t^2)=8(2+(-1)^n)\zeta(m);\ n=2^s m;\ s\geqq 0$$

Если m нечетное, то число рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+t^2,$$

удовлетворяющихъ условію $y\equiv z \pmod 2$, будетъ $4\zeta(m)$; а такъ какъ при этомъ одно изъ чиселъ x и t нечетное, а другое четное, то число рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+4t^2, \tag{c}$$

удовлетворяющихъ условію $y\equiv z \pmod 2$, будетъ $2\zeta(m)$. Если $m\equiv 3 \pmod 4$, то въ (c) числа x, y, z нечетныя, если же $m\equiv 1 \pmod 4$, то y и z четныя; отсюда сразу находится, что

$$N(m=x^2+y^2+z^2+4t^2)=2\zeta(m),\quad m\equiv 3 \pmod 4$$
$$N(m=x^2+y^2+z^2+4t^2)=6\zeta(m),\quad m\equiv 1 \pmod 4$$

и, сверхъ того,

$$N(m=x^2+4y^2+4z^2+4t^2)=2\zeta(m);\quad m\equiv 1 \pmod 4$$

Число рѣшеній уравненія (c), удовлетворяющихъ условію $y\equiv z \pmod 2$, будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ числомъ рѣшеній уравненія

$$m=x^2+2y^2+2z^2+4t^2 \tag{d}$$

такъ что

$$N(m=x^2+2y^2+2z^2+4t^2)=2\zeta(m).$$

Въ уравненіи (d) при $m\equiv 3 \pmod 4$ числа y и z разной четности, откуда найдемъ

$$N(m=x^2+2y^2+8z^2+4t^2)=\zeta(m) \quad \text{при} \quad m\equiv 3 \pmod 4$$

Если $m\equiv 1 \pmod 4$, то y и z въ уравненіи (d) одинаковой четности, именно оба четныя, когда при $m\equiv 1 \pmod 8$ t четное, а при $m\equiv 5 \pmod 8$ t нечетное. Но въ (d) t будетъ четнымъ или нечетнымъ тогда, когда въ уравненіи

$$m=x^2+4y^2+4z^2+4t^2$$

t будетъ четнымъ или нечетнымъ. Полное число рѣшеній этого уравненія уже опредѣлено; чтобы опредѣлить число рѣшеній съ четнымъ и нечетнымъ t, обратимся къ равенству (b) настоящаго §. Такъ какъ теперь предполагается $m \equiv 1 \pmod 4$, то въ уравненіи

$$m = i^2 + i'^2 + i''^2,$$

гдѣ i нечетное, оба числа i' и i'' будутъ четными; пусть $i' = 2s$, $i'' = 2t$. Обозначивъ черезъ $g(m)$ числовую функцію

$$g(m) = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

гдѣ сумма распространена на всѣ представленія

$$m = i^2 + 4s^2$$

съ нечетнымъ положительнымъ i, мы можемъ правую часть равенства (b) написать въ видѣ суммы

$$4 \sum g(m - 4t^2) \qquad t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Сумма $\sum (-1)^h$ лѣвой части того же равенства распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = 4h^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2; \qquad x \equiv y \pmod 2.$$

Въ случаѣ $m \equiv 1 \pmod 4$ оба числа x и y четныя, а изъ чиселъ z и t—одно четное, другое нечетное. Предполагая t четнымъ, замѣняемъ лѣвую часть равенства (b) суммой $2\sum(-1)^h$, распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = 4h^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + x^2$$

или суммой

$$2 \sum \varphi(m - 4t^2),$$

если условимся черезъ $\varphi(m)$ обозначать разность между числами рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2,$$

въ которыхъ t четное и нечетное. Представивъ теперь уравненіе (b) въ видѣ

$$\sum \varphi(m - 4t^2) = 2 \sum g(m - 4t^2),$$

найдемъ

$$\varphi(m) = 2g(m),$$

откуда на основаніи предыдущаго выведемъ

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \zeta(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \quad t \text{ четное}$$

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \zeta(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \quad t \text{ нечетное}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ получимъ

$$N(m=x^2+2y^2+4z^2+8t^2)=\zeta(m)+(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;\ m\equiv1 \pmod 4)$$

Изъ доказанныхъ результатовъ можно вывести числа представленій многими другими формами, встрѣчающимися у Ліувилля; но это уже не можетъ представить никакихъ новыхъ трудностей. Характерно въ послѣднихъ формулахъ появленіе особой числовой функціи $\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i$, которая при нашемъ способѣ разсужденія вводится вполнѣ естественно и просто.

§ 5. Число представленій формой $x^2+y^2+3z^2+3t^2$.

Число представленій формой $x^2+y^2+3z^2+3t^2$ можно опредѣлить на основаніи доказаннаго въ предыдущемъ § относительно формы $x^2+y^2+z^2+t^2$. Выведемъ предварительно нѣкоторыя вспомогательныя формулы, для чего обращаемся къ равенству (VII) § 1, которое представимъ такъ

$$\sum(-1)^s F(d+s)=\{(-1)^{s-1}sF(s)\};\ m=s^2+d\delta,\ \delta \text{ неч.} \tag{VI}$$

придавая знаку { } тотъ же смыслъ, какъ въ § 4. Взявъ здѣсь $F(x)=\sin\frac{2\pi x}{3}$ и $m=3n$ получимъ

$$\sum(-1)^s\sin\frac{2\pi d}{3}\cos\frac{2\pi s}{3}=0;\quad 3n=s^2+d\delta,\quad \delta \text{ неч.} \tag{a}$$

Если $s\equiv n+1 \pmod 2$, то d будетъ нечетнымъ; если $s\equiv n \pmod 2$, то d будетъ четнымъ. На этомъ основаніи при $s\equiv n+1 \pmod 2$

$$\sum_d \sin\frac{2\pi d}{3}=\psi(3n-s^2).\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а при $s\equiv n \pmod 2$

$$\sum_d \sin\frac{2\pi d}{3}=\pm\,\psi(3n-s^2).\frac{\sqrt{3}}{2},$$

причемъ знакъ $+$ будетъ въ томъ случаѣ, когда высшая степень 2, дѣлящая d, четная, и знакъ — въ случаѣ, когда эта степень нечетная; подъ $\psi(n)$ подразумѣвается та-же функція, какъ § 3. Припоминая связь этой функціи съ числомъ представленій формой x^2+3y^2, нетрудно дать равенству (a) такое ариѳметическое толкованіе. Обозначимъ черезъ P, Q, R, S соотвѣтственно числа рѣшеній уравненій

$$3n = 9\sigma^2 + \varrho^2 + 3\tau^2; \quad \varrho + \tau \text{ неч.}$$
$$3n = 9\sigma^2 + \varrho^2 + 3\tau^2; \quad \varrho + \tau \text{ четн.}$$
$$3n = 9\sigma^2 + 2\varrho^2 + 6\tau^2$$
$$3n = \sigma^2 + 2\varrho^2 + 6\tau^2; \quad \sigma \text{ не дѣл. на } 3.$$

Тогда при $n \equiv 1$ или $\equiv 2 \pmod 4$ изъ (a) выведемъ

$$P + R = \frac{1}{2} S \tag{b}$$

а при $n \equiv 3$ или $\equiv 0 \pmod 4$ получимъ

$$3P - Q + R = \frac{1}{2} S \tag{c}$$

Можно разсматривать P, Q и R также, какъ числа рѣшеній уравненій

$$n = 3\sigma^2 + 3\varrho^2 + \tau^2; \quad \varrho + \tau \text{ неч.}$$
$$n = 3\sigma^2 + 3\varrho^2 + \tau^2; \quad \varrho + \tau \text{ четн.}$$
$$n = 3\sigma^2 + 6\varrho^2 + 2\tau^2.$$

Сумму $R + \frac{1}{2} S$ можно разсматривать, какъ число рѣшеній уравненія

$$3n = \sigma^2 + 2\varrho^2 + 6\tau^2,$$

удовлетворяющихъ условію $\sigma \equiv \varrho \pmod 3$. Но число такихъ рѣшеній будетъ равно числу рѣшеній уравненія

$$n = \xi^2 + 2\eta^2 + 2\zeta^2,$$

что видно изъ формулъ

$$\xi + 2\eta = \sigma, \ \xi - \eta = \varrho, \ \zeta = \tau,$$

однозначно связывающихъ σ, ϱ, τ съ ξ, η, ζ. Такимъ образомъ

$$R + \frac{1}{2} S = N(n = \xi^2 + 2\eta^2 + 2\zeta^2)$$

Съ помощью этого соотношенія равенства (b) и (c) напишутся такъ

$$P + 2R = N(n = \xi^2 + 2\eta^2 + 2\zeta^2), \tag{b*}$$
$$3P - Q + 2R = N(n = \xi^2 + 2\eta^2 + 2\zeta^2), \tag{c*}$$

Это тѣ вспомогательныя формулы, которыя нужно было вывести. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію формы $x^2+y^2+3z^2+3t^2$. При отысканіи числа рѣшеній уравненія

$$n=x^2+y^2+3z^2+3t^2$$

очевидно достаточно ограничиться предположеніемъ, что n на 3 не дѣлится. Мы предположимъ сначала, что n удвоенное нечетное число: $n=2m$. Если $m\equiv 1 \pmod 3$, то въ уравненіи

$$2m=x^2+y^2+3z^2+3t^2 \tag{d}$$

оба числа x и y не дѣлятся на 3; число $2m-x^2$ будетъ $\equiv 1 \pmod 3$ и $\equiv 1$ или $\equiv 2 \pmod 4$. Если въ равенствѣ (b*) положимъ $n\equiv 1 \pmod 3$, то $R=0$ и потому

$$N(n=3y^2+3z^2+t^2)=N(n=\xi^2+2\eta^2+2\zeta^2);$$
$$n\equiv 1 \pmod 3 \text{ и } n\equiv 1 \text{ или } \equiv 2 \pmod 4.$$

Въ силу замѣченнаго выше и съ помощью этого соотношенія найдемъ

$$N(2m=x^2+y^2+3z^2+3t^2)=N(2m=x^2+\xi^2+2\eta^2+2\zeta^2);\ x \text{ не дѣл. на } 3.$$

Но число рѣшеній уравненія

$$2m=x^2+\xi^2+2\eta^2+2\zeta^2,\quad x \text{ не дѣл. на } 3.$$

равно трети числа рѣшеній уравненія

$$2m=x^2+y^2+z^2+t^2,\quad x \text{ не дѣл. на } 3.$$

или одной шестой числа всѣхъ рѣшеній этого уравненія, такъ какъ изъ чиселъ y, z, t одно и только одно не дѣлится на 3. Такимъ образомъ получимъ

$$N(2m=x^2+y^2+3z^2+3t^2)=4\zeta(m);\quad m\equiv 1 \pmod 3$$

Если $m\equiv 2 \pmod 3$, то въ уравненіи (d) одно изъ чиселъ x и y дѣлится на 3, другое не дѣлится; число рѣшеній, для которыхъ x дѣлится на 3, будетъ

$$\frac{1}{2}N(2m=x^2+y^2+3z^2+3t^2).$$

Если $x\equiv 0 \pmod 3$, то $2m-x^2\equiv 1 \pmod 3$, слѣдовательно по предыдущему будетъ

$$\frac{1}{2}N(2m=x^2+y^2+3z^2+3t^2)=N(2m=x^2+\xi^2+2\eta^2+2\zeta^2)=$$
$$=\frac{1}{3}N(2m=x^2+y^2+z^2+t^2);\quad x\equiv 0 \pmod 3)$$

Если x дѣлится на 3, то въ уравненіи

$$2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

среди чиселъ y, z, t одно и только одно на 3 не дѣлится. Если положить, что t на 3 не дѣлится и обозначить соотвѣтствующее число рѣшеній черезъ M, то число всѣхъ рѣшеній, гдѣ $x \equiv 0 \pmod 3$, будетъ $3M$. Для опредѣленія же M разсмотримъ уравненіе

$$4m = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2,$$

въ которомъ мы считаемъ ξ и η дѣлящимися на 3, а ζ и θ не дѣлящимся на 3 и сверхъ того $\zeta + \theta \equiv 0 \pmod 3$. Число рѣшеній при такихъ условіяхъ будетъ $2\zeta(m)$; но то же число будетъ равно M. Въ самомъ дѣлѣ, между x, y, z, t и ξ, η, ζ, ϑ можно установить однозначное и взаимное соотвѣтствіе по формуламъ

$$x = \frac{\xi + \eta}{2},\ y = \frac{\xi - \eta}{2},\ z = \frac{\zeta + \theta}{2},\ t = \frac{\zeta - \theta}{2},$$

въ силу котораго системѣ значеній $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$, удовлетворяющихъ условіямъ

$$\xi \equiv \eta \equiv 0 \pmod 3; \quad \zeta \equiv -\theta \equiv \pm 1 \pmod 3,$$

соотвѣтствуетъ система значеній x, y, z, t, удовлетворяющихъ условіямъ

$$x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod 3; \quad t \equiv \pm 1 \pmod 3$$

и наоборотъ. Найдя такимъ образомъ число рѣшеній уравненія

$$2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

гдѣ $x \equiv 0 \pmod 3$, равнымъ $3M = 6\zeta(m)$, мы, имѣя въ виду ранѣе доказанное, опять получимъ

$$N(2m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4\zeta(m); \quad m \equiv 2 \pmod 3$$

Слѣдовательно вообще для всякаго нечетнаго m, недѣлящагося на 3.

$$N(2m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4\zeta(m).$$

Отсюда, замѣтивъ что x и y, а также z и t одной четности, легко получить

$$N(m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4\zeta(m),$$

Остается опредѣлить число представленій четнаго числа $2^h m$, гдѣ $h \geqq 2$. Для этого обозначимъ черезъ $F(h)$ полное число рѣшеній уравненія

$$2^h m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2,$$

черезъ $\Phi(h)$ и $\Psi(h)$ — числа рѣшеній, удовлетворющихъ условіямъ $x \equiv y \pmod 2$ и $x \equiv y+1 \pmod 2$. Безъ труда находимъ $\Phi(h) = F(h-1)$, откуда

$$F(h) - F(h-1) = \Psi(h) \tag{e}$$

При принятыхъ обозначеніяхъ ясно, что число рѣшеній уравненія

$$2^h m = x^2 + 3z^2 + y^2 + 3t^2$$

съ нечетными x и z и съ четными y и t будетъ $\frac{1}{4}\Psi(h)$. Такъ какъ при нечетномъ n уравненіе

$$4n = x^2 + 3z^2$$

въ нечетныхъ числахъ имѣемъ въ два раза больше рѣшеній, чѣмъ уравненіе

$$n = \xi^2 + 3\eta^2,$$

то $\frac{1}{8}\Psi(h)$ будетъ числомъ рѣшеній уравненія

$$2^{h-2} m = \xi^2 + 3\eta^2 + \zeta^2 + 3\theta^2,$$

гдѣ ξ и η разной четности. Если $h-2 \geqq 2$, то то же число будетъ $\frac{1}{2}\Psi(h-2)$, такъ что получимъ

$$\Psi(h) = 4\Psi(h-2) \text{ при } h \geqq 4$$

Если же $h=3$ или $h=2$, то будетъ

$$\frac{1}{8}\Psi(2) = 2\zeta(m) \quad \text{и} \quad \frac{1}{8}\Psi(3) = 4\zeta(m)$$

Отсюда уже нетрудно вывести

$$\Psi(h) = 2^{h+2}\zeta(m) \text{ при } h \geqq 2$$

и, наконецъ, въ силу равенства (e)

$$F(h) = 4(2^{h+1} - 3)\,\zeta(m),$$

или

$$N(2^h m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4(2^{h+1} - 3)\,\zeta(m).$$

Изъ сказаннаго также легко выводится, что число рѣшеній уравненія

$$2^{h+3}m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2; \quad h \geqq 0$$

въ нечетныхъ и положительныхъ числахъ x, y, z, t, равно

$$\frac{1}{16}\Psi(h+2) = 2^h\zeta(m).$$

§ 6. Число представленій формой $x^2+2y^2+3z^2+6t^2$.

Установленные въ предыдущемъ § результаты позволяютъ очень просто опредѣлить число представленій четныхъ чиселъ формой

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2;$$

для нечетныхъ чиселъ удается опредѣлить только нижній предѣлъ числа представленій

Если $n = 2m$ — удвоенное нечетное число, то изъ равенства (b*) § 5 сразу получаемъ

$$2N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) + N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) =$$
$$= N(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2)$$

Выдѣлимъ высшую степень 3, дѣлящую n, для чего положимъ $m = 3^\beta p$; тогда будемъ имѣть

$$N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4\zeta(p)$$
$$N(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 4(3^{\beta+1} - 1)\zeta(p),$$

откуда

$$N(2.3^\beta p = x + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(3^{\beta+1} - 2)\zeta(p).$$

Если $n = 2^h m$ дѣлится на 4, то изъ равенства (c*) § 5 получаемъ

$$3N(\underset{x \text{ и } z \text{ разн. четн.}}{n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2}) - N(\underset{x \text{ и } z \text{ одной четн.}}{n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2}) +$$
$$+ 2N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 24\zeta(m).$$

Но при обозначеніяхъ предыдущаго §

$$N(\underset{x \text{ и } z \text{ разн. четн.}}{n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2}) = \frac{1}{2}\Psi(h) = 2^{h+1}\zeta(p)$$

$$N(\underset{x \text{ и } z \text{ одной четн.}}{n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2}) = F(h) - \frac{1}{2}\Psi(h)$$

слѣдовательно будемъ имѣть

$$N(2^h 3^\beta p = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6(3^{\beta+1} - 2)\zeta(p); \quad h > 1.$$

Переходя къ нечетнымъ числамъ и останавливаясь на случаѣ $n \equiv 1 \pmod 4$, мы получимъ изъ тѣхъ же равенствъ (b^*) и (c^*)

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\text{ четн.}}{N}(n=x^2+3y^2+z^2+3t^2)+2\underset{x\text{ четн.}}{N}(n=x^2+2y^2+3z^2+6t^2)=2\zeta(n) \\ 3\underset{x\text{ и }y\text{ неч.}}{N}(n=x^2+3y^2+z^2+3t^2)-\underset{x\text{ неч., }y\text{ чет.}}{N}(n=x^2+3y^2+z^2+3t^2)+ \\ \qquad +2\underset{x\text{ неч.}}{N}(n=x^2+2y^2+3z^2+6t^2)=2\zeta(n). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Обозначимъ черезъ A и B числа рѣшеній уравненій

$$n=x^2+3y^2+z^2+3t^2;\quad x \text{ и } y \text{ нечетн.}$$
$$n=x^2+3y^2+z^2+3t^2;\quad x \text{ и } y \text{ четн.}$$

Тогда изъ уравненій (1) легко найдемъ послѣ сложенія

$$A+N(n=x^2+2y^2+3z^2+6t^2)=2\zeta(n)$$

Примѣнивъ равенства (b^*) и (c^*) къ случаю $n \equiv 3 \pmod 4$, получимъ

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\text{ неч.}}{N}(n=x^2+3y^2+z^2+3t^2)+2\underset{x\text{ неч.}}{N}(n=x^2+2y^2+3z^2+6t^2)=2\zeta(n) \\ 3\underset{x\text{ и }y\text{ четн.}}{N}(n=x^2+3y^2+z^2+3t^2)-\underset{x\text{ четн. }y\text{ неч.}}{N}(n=x^2+3y^2+z^2+3t^2)+ \\ \qquad +2\underset{x\text{ четн.}}{N}(n=x^2+2y^2+3z^2+6t^2)=2\zeta(n) \end{array}\right\} \quad (2)$$

откуда найдемъ

$$B+N(n=x^2+2y^2+3z^2+6t^2)=2\zeta(n)$$

Второе изъ равенствъ (2) показываетъ, что для случая $n \equiv 3 \pmod 4$

$$2B-A \leqq 2\zeta(n)$$

Если n не дѣлится на 3, то между A и B существуетъ зависимость

$$A-B=2\zeta(n).$$

Сверхъ того, если C обозначаетъ число рѣшеній уравненія

$$n=x^2+3y^2+z^2+3t^2,$$

удовлетворяющихъ условію $x^2+3y^2 \equiv 0 \pmod 8$, то

$$B=\frac{1}{2}A+C.$$

Принявъ это во вниманіе, имѣемъ для случая $n \equiv 1 \pmod 4$:

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = \frac{2}{3}\zeta(n) + \frac{2}{3}C,$$

а для случая $n \equiv 3 \pmod 4$

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = \frac{4}{3}\zeta(n) - \frac{2}{3}C.$$

Но всегда $C \geqq 0$, а при $n \equiv 3 \pmod 4$, какъ уже замѣчено, $C \leqq \zeta(n)$; слѣдовательно для всякаго нечетнаго n, не дѣлящагося на 3

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) \geqq \frac{2}{3}\zeta(n).$$

Было бы интересно найти простое выраженіе для C, но это сопряжено, какъ кажется, съ большими трудностями.

§ 7. Число представленій формой $x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$.

Форма $x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$ находится также въ связи съ формой $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Хотя представляется повидимому труднымъ найти число представленій нечетнаго числа этой формой, но для четнаго числа эта задача рѣшается просто. Обозначимъ черезъ n четное число, дѣлящееся на 5. Рѣшенія уравненія

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \tag{a}$$

гдѣ не всѣ числа x, y, z, t дѣлятся на 5, разбиваются на двѣ категоріи: для рѣшеній первой категоріи ни одно изъ чиселъ x, y, z, t не дѣлится на 5, для рѣшеній второй категоріи два и только два числа дѣлятся на 5. Обозначимъ число рѣшеній, удовлетворяющихъ условіямъ $x^2 \equiv 1$, $y^2 \equiv 1$, $z^2 \equiv -1$, $t^2 \equiv -1 \pmod 5$ черезъ Q, а число рѣшеній удовлетворяющихъ условіямъ $x \equiv 0, y \equiv 0, z^2 \equiv +1, t^2 \equiv -1 \pmod 5$ черезъ R. Полное число рѣшеній обѣихъ категорій будетъ

$$P = 6Q + 12R.$$

Докажемъ теперь, что $R = \frac{1}{4}Q$. Для этого разсмотримъ уравненіе

$$2m = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2 \tag{b}$$

и обозначимъ черезъ G число рѣшеній его, удовлетворяющихъ условіямъ

$$\zeta \equiv \eta \equiv 0 \quad \zeta^2 \equiv -\theta^2 \equiv 1 \pmod 5.$$

Число рѣшеній уравненія (a), которыя подчинены условіямъ

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1,\ z^2 \equiv t^2 \equiv -1 \pmod 5; \quad x + y \equiv 0,\ z + t \equiv 0 \pmod 5)$$

будетъ $\frac{1}{4}Q$. Но эти рѣшенія связаны съ ξ, η, ζ, θ однозначно формулами

$$\xi = x + y,\ \eta = z + t,\ \zeta = z - t,\ \theta = x - y;$$

дѣйствительно изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, во-первыхъ, $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ и, во-вторыхъ, $\xi^2 + \theta^2 \equiv 2(x^2 + y^2) \equiv 4$, $\eta^2 + \zeta^2 \equiv 2(z^2 + t^2) \equiv -4 \pmod 5$, т. е. $\theta^2 \equiv -1$, $\zeta^2 \equiv 1 \pmod 5$; наоборотъ, если предположимъ, что ξ, η, ζ, θ удовлетворяютъ этимъ сравненіямъ, то x, y, z, t будутъ удовлетворять поставленнымъ для нихъ сравненіямъ. Поэтому $G = \frac{1}{4}Q$. Если разсматривать рѣшенія уравненія (a), удовлетворяющія условіямъ

$$x \equiv y \equiv 0, \quad z^2 + t^2 \equiv 0 \pmod 5).$$

то число ихъ будетъ $2R$. Число рѣшеній уравненія (b), удовлетворяющихъ условіямъ

$$\xi \equiv \eta \equiv 0, \quad \zeta^2 + \theta^2 \equiv 0 \pmod 5$$

будетъ $2G$. Изъ формулъ, связывающихъ x, y, z, t съ ξ, η, ζ, θ:

$$\xi = x + y,\ \eta = x - y,\ \zeta = z + t,\ \theta = z - t$$

видно, что когда удовлетворена одна система сравненій, то будетъ удовлетворена и другая; отсюда получаемъ $2R = 2G$, $R = G$. Наконецъ находимъ $R = \frac{1}{4}Q$ и $Q = \frac{1}{9}P$.

Число рѣшеній уравненія (a), гдѣ x на 5 не дѣлится, будетъ

$$M = 6Q + 6R = \frac{5}{6}P$$

Обозначивъ черезъ $\bar{\zeta}(n)$ сумму нечетныхъ дѣлителей n и согласившись полагать $\bar{\zeta}(n) = 0$ при n дробномъ, будемъ имѣть

$$P = 24\left[\bar{\zeta}(n) - \bar{\zeta}\left(\frac{n}{5^2}\right)\right]$$

и

$$M = 20\left[\bar{\zeta}(n) - \bar{\zeta}\left(\frac{n}{5^2}\right)\right] \qquad \text{(c)}$$

Докажемъ теперь слѣдующее равенство

$$N(m = \xi^2 + 5\eta^2 + 5\zeta^2) = \frac{1}{3}N(m = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2); \quad m \equiv \pm 1 \pmod 5 \qquad \text{(d)}$$

Для этого разсмотримъ уравненіе

$$25m = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{(d)}$$

и обозначимъ число рѣшеній его, гдѣ x, y, z, дѣлятся на 5 черезъ Q, а число рѣшеній, гдѣ x и y не дѣлятся на 5, а z дѣлится, черезъ R. Среди послѣднихъ рѣшеній будетъ $\frac{1}{2}R$ рѣшеній, удовлетворяющихъ сравненію $x \equiv 2y \pmod 5$. Но таково же будетъ число рѣшеній уравненія

$$5m = \xi^2 + \eta^2 + 5\zeta^2, \tag{e}$$

для которыхъ $\xi + 2\eta$ не дѣлится на 5; это видно изъ формулъ

$$\xi = \frac{x - 2y}{5}, \quad \eta = \frac{2x + y}{5}, \ \zeta = z.$$

Число рѣшеній, для которыхъ $\xi - 2\eta$ дѣлится на 5, будетъ также $\frac{1}{2}R$. Таково же будетъ число рѣшеній уравненія

$$m = u^2 + v^2 + w^2 \tag{f}$$

гдѣ $u + 2v$ не дѣлится на 5. Если $m \equiv +1 \pmod 5$, то или всѣ три числа u, v, w не дѣлятся на 5 или два дѣлятся, а одно не дѣлится; въ послѣднемъ случаѣ одно и только одно изъ нихъ будетъ $\equiv \pm 2 \pmod 5$. Если V—число рѣшеній, удовлетворяющихъ условіямъ $u \equiv v \equiv 0 \pmod 5$, w не дѣлится на 5, и W—число рѣшеній, удовлетворяющихъ условіямъ $u^2 \equiv v^2 \equiv 1$, $w^2 \equiv -1 \pmod 5$, то полное число рѣшеній, равное Q, будетъ

$$Q = 3V + 3W,$$

число же рѣшеній, для которыхъ $u + 2v$ не дѣлитсся на 5, находится равнымъ

$$\frac{1}{2}R = 2V + 2W,$$

откуда $R = \frac{4}{3}Q$. Такой же результатъ получается въ случаѣ $m \equiv -1 \pmod 5$

Обращаясь вновь къ уравненію (d), находимъ, что число рѣшеній его, гдѣ $x \equiv 2y \pmod 5$ и $z \equiv 0 \pmod 5$ есть $Q + \frac{1}{2}R = \frac{5}{3}Q$; таково же будетъ число рѣшеній уравненія (e). Пусть N число рѣшеній этого уравненія, гдѣ ξ и η дѣлятся на 5, а N'—число рѣшеній, гдѣ ξ и η не дѣлятся на 5. Тогда

$$N + N' = \frac{5}{3}Q$$

и

$$N + \frac{1}{2}N' = Q,$$

такъ какъ $N+\frac{1}{2}N'$ равно числу всѣхъ рѣшеній уравненія (f). Теперь уже имѣемъ

$$N=\frac{1}{3}Q$$

или

$$N(m=\xi^2+5\eta^2+5\zeta^2)=\frac{1}{3}N(m=\xi^2+\eta^2+\zeta^2);\ m\equiv\pm 1 \pmod 5$$

Переходимъ наконецъ къ разсмотрѣнію уравненія

$$n=x^2+y^2+5z^2+5t^2$$

въ которомъ n четное, дѣлящееся на 5. Если положимъ $n=5^h m$, гдѣ m уже на 5 не дѣлится, то обозначимъ число рѣшеній, гдѣ x и y не дѣлятся на 5, черезъ $\Phi(h)$, а число всѣхъ рѣшеній черезъ $F(h)$. Сумма $\frac{1}{2}\Phi(h)+F(h-1)$ будетъ

$$\frac{1}{2}\Phi(h)+F(h-1)=N\left(\frac{n}{5}=x^2+y^2+z^2+t^2\right)=24\bar{\zeta}\left(\frac{n}{5}\right);$$

съ другой стороны въ силу равенства (d)

$$\Phi(h)=\frac{1}{3}\underset{x \text{ не дѣл. на } 5.}{N(n=x^2+y^2+z^2+t^2)}=\frac{1}{3}M=\frac{20}{3}\left[\zeta(n)-\zeta\left(\frac{n}{5^2}\right)\right],$$

слѣдовательно

$$F(h-1)=2(5^h-3)\bar{\zeta}(m) \quad \text{при } h\geqq 1$$

или наконецъ

$$N(5^h 2^k p=x^2+y^2+5z^2+5t^2)=2(5^{h+1}-3)\zeta(p);\ h\geqq 0,\ k\geqq 1.$$

§ 8. О числѣ представленій формой $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2$ и другими, съ ней связанными.

Послѣ разсмотрѣнія простѣйшей формы съ четырьмя перемѣнными $x^2+y^2+z^2+t^2$ и другихъ формъ, къ ней близкихъ, обратимся къ простѣйшей формѣ съ шестью перемѣнными $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2$ и опредѣлимъ число представленій этой формой тѣмъ же способомъ, которымъ мы до сихъ поръ пользовались. Въ силу формулы (VII) § 1 имѣемъ

$$\sum(-1)^s F(d+s)=\frac{1}{2}\sum(-1)^{s-1}sF(s) \tag{a}$$

здѣсь сумма слѣва распространена на всѣ рѣшенія уравненія

$$n=s^2+2t^2+2u^2+2v^2+2w^2+d\delta,\quad \delta \text{ нечет.},$$

сумма справа на всѣ рѣшенія уравненія $n = s^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2w^2$, а число n предполагается нечетнымъ. Полагая въ (a) $F(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, получимъ соотношеніе между двумя суммами, которое можно представить такъ

$$\sum(-1)^h G(n-4h^2) = \sum(-1)^{\frac{s-1}{2}} s;\quad n = s^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2w^2, \qquad (1)$$

обозначивъ черезъ $G(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = y + 4z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2w^2.$$

Съ другой стороны въ формулѣ (II) § 1 въ случаѣ $n \equiv 3 \pmod 4$ возьмемъ $F(x, y, z) = xz \sin\frac{\pi z}{2}$; замѣтивъ, что

$$\sin\frac{\pi}{4}(\Delta' - \Delta) = (-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{m^2-1}{8} + \frac{\Delta-1}{2} + h}$$

послѣ простого изслѣдованія получимъ

$$\sum(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}} \Delta'^2 (-1)^h = 4\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\,(2d-\delta)$$

или

$$\sum(-1)^h \varphi(n-4h^2) = \frac{1}{2}\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}} s;\quad n = s^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2w^2, \qquad (2)$$

обозначивъ черезъ $\varphi(n)$ числовую функцію

$$\varphi(n) = \sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2;\quad n = d\delta.$$

Такое же равенство получимъ и въ случаѣ $n \equiv 1 \pmod 4$, если въ формулѣ (II) § 1 возьмемъ

$$F(x, y, z) = (x + z(y+z)) \sin\frac{\pi x}{2}$$

Изъ сравненія (1) и (2) найдемъ

$$G(n) = 2\varphi(n)$$

или

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2) = 2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

Съ помощью этого результата уже нетрудно вывести, что

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 12\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,\quad n \equiv 1 \pmod 4$$

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 20\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,\quad n \equiv 3 \pmod 4$$

Эти равенства являются основными въ теоріи формы

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2;$$

пользуясь ими можно безъ труда опредѣлить число представленій четнаго числа, но для краткости на этомъ останавливаться не будемъ. Переходя къ болѣе труднымъ вопросамъ, остановимся на уравненіи

$$n=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2 \tag{b}$$

для случая $n\equiv 1 \pmod 4$. Среди чиселъ $x, y, \ldots v$ будетъ или одно нечетное или пять; соотвѣтственно этому обозначимъ черезъ $I(n)$ число рѣшеній, гдѣ x нечетное, а y, z, t, u, v четныя, и черезъ $\Gamma'(n)$ число рѣшеній, гдѣ x, y, z, t и нечетныя, а v четное. Полное число рѣшеній будетъ $6[\Gamma(n)+\Gamma'(n)]$, откуда найдемъ одно соотношеніе между $I(n)$ и $\Gamma'(n)$:

$$\Gamma(n)+\Gamma'(n)=2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2; \quad n=d\delta \tag{3}$$

Чтобы получить другое соотношеніе, положимъ опять въ формулѣ (II) § 1 $F(x, y, z)=(-1)^{\frac{x-1}{2}+\frac{y}{2}}x^2$; получимъ

$$\sum\frac{\Delta^2+\Delta'^2}{4}(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}+\frac{1}{2}\sum(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}\Delta\Delta'=2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2+2\sum i^2(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}+\{s^2\}. \tag{c}$$

Лѣвая часть этого равенства представляется такъ

$$\frac{1}{4}\sum\{\Gamma(n-4h^2)+\Gamma'(n-4h^2)\}+\frac{1}{4}\sum_{u=i^2+4s^2+4h^2}(i^2+4s^2)$$

Послѣдніе два члеиа въ правой части могутъ быть замѣнены суммой

$$\frac{1}{2}\sum i^2; \quad n=i^2+4s^2+4h^2;$$

что же касается до перваго члена $2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2$; $n=i^2+2d\delta$, то нужно выяснить его ариѳметическій смыслъ. Съ этой цѣлью разсматриваемъ уравненіе

$$2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2+4u^2+4v^2 \tag{d}$$

при $\alpha\geqq 2$ и, предполагая x, y, z, t нечетными, обозначаемъ число рѣшеній его черезъ $F(\alpha)$.

Легко понять, что $\frac{1}{4}F(\alpha)$ есть число рѣшеній уравненія

$$2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2,$$

гдѣ x и y нечетныя, а $z \equiv t \pmod 2$; если $\alpha - 1 \geqq 2$, то это число будетъ $F(\alpha-1)$. Такимъ образомъ

$$F(\alpha) = 4F(\alpha-1) \quad \text{при} \quad \alpha \geqq 3 \tag{e}$$

Но если $\alpha = 2$, то $\frac{1}{4}F(2)$ будетъ также числомъ рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2,$$

гдѣ x и y разной четности, т. е. по предыдущему $4\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2$; $m = d\delta$. Отсюда и изъ равенства (e) найдемъ

$$F(\alpha) = 4^\alpha \sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2; \quad m = d\delta.$$

На основаніи этого равенства уже нетрудно видѣть, что сумма

$$2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2, \quad n = i^2 + 2d\delta$$

равна половинѣ числа рѣшеній уравненія

$$n = i^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2 + 4p^2 + 4q^2,$$

гдѣ i, h, k, l, m нечетныя т. е. выражается суммой

$$\frac{1}{2}\sum \Gamma'(n - 4h^2).$$

Сообразивъ все сказанное, равенство (c) представимъ такъ

$$\sum\{\Gamma(n-4h^2) - \Gamma'(n-4h^2)\} = \sum(i^2 - 4s^2); \quad n = i^2 + 4s^2 + 4h^2$$

или

$$\sum\{\Gamma(n-4h^2) - \Gamma'(n-4h^2)\} = 2\sum g(n-4h^2)$$

если положимъ

$$g(n) = \sum(i^2 - 4s^2); \quad n = i^2 + 4s^2, \ i > 0$$

Изъ выведеннаго равенства имѣемъ

$$\Gamma(n) - \Gamma'(n) = 2g(n) \tag{4}$$

что въ связи съ (3) даетъ

$$\Gamma(n) = \sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2 + g(n)$$

или

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2 +$$
$$+ \sum_{n = i^2 + 4s^2;\ i > 0} (i^2 - 4s^2); \quad n \equiv 1 \pmod 4)$$

Выведенныя равенства являются основными; изъ нихъ можно получить много другихъ результатовъ, но на этомъ не будемъ останавливаться.

§ 9. О числѣ представленій формой $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$.

Для вывода числа представленій формой $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$ обращаемся къ формулѣ (I) § 2. Въ случаѣ $m \equiv 3 \pmod 4$ возьмемъ въ ней $f(x,\ y) = x \cos \frac{\pi y}{4}$; если воспользуемся замѣчаніями, сдѣланными въ этомъ §, то найдемъ

$$\sum (-1)^h \left(\frac{2}{\delta}\right) d = 0\,; \quad m = 2h^2 + d\delta$$

или

$$\sum (-1)^h \psi(m - 2h^2) = 0; \ m \equiv 3 \pmod 4,$$

если положимъ

$$\psi(n) = \sum \left(\frac{2}{\delta}\right) d; \ n = d\delta.$$

Разсматривая уравненіе

$$m = 2x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 2u^2, \tag{a}$$

замѣчаемъ, что при $m \equiv 3 \pmod 4$ числа x и u разной четности; слѣдовательно, называя черезъ $\chi(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2, \tag{b}$$

будемъ имѣть

$$\sum (-1)^h \chi(m - 2h^2) = 0$$

Въ случаѣ $m \equiv 1 \pmod 4$ полагаемъ опять въ формулѣ (I) § 2 $f(x\,,\ y) = (-1)^{\frac{x-1}{2}} y \sin \frac{\pi}{4} y$; принимая во вниманіе сказанное въ томъ же §, получимъ такое соотношеніе

$$2 \sum (-1)^h \left(\frac{2}{\delta}\right) d = \sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda \,.\, (-1)^{\frac{\Delta-1}{2} + \frac{\Delta^2-1}{8}}$$

или

$$2 \sum (-1)^h \psi(m - 2h^2) = \frac{1}{2} \sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda, \ 2m = \lambda^2 + \mu^2 + 8v^2$$

Положивъ $\lambda = \xi + \eta$, $\mu = \xi - \eta$, замѣнимъ сумму въ правой части суммой

$$\sum \xi \sin\frac{\pi}{2}\xi \cos\frac{\pi}{2}\eta\,; \quad m = \xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2$$

которую въ свою очередь представимъ такъ

$$\sum (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\rho}\sigma\,; \quad m = \sigma^2 + 4\rho^2 + 4\tau^2$$

Слѣдовательно

$$2\sum (-1)^h \psi(m - 2h^2) = \sum (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\rho}\sigma \tag{c}$$

Въ уравненіи (a) въ случаѣ $m \equiv 1 \pmod 4$ x и u одинаковой четности, но нетрудно видѣть, что x будетъ четнымъ или нечетнымъ въ зависимости отъ того, будутъ-ли въ уравненіи

$$m = 4\tau^2 + 4t^2 + 4u^2 + v^2 + 4w^2$$

τ и t одной четности или нѣтъ. На этомъ основаніи

$$\sum (-1)^h \chi(m - 2h^2) = \sum (-1)^{\tau+t}; \; m = 4\tau^2 + 4t^2 + 4u^2 + v^2 + 4w^2.$$

Что же касается суммы $\sum (-1)^{\tau+t}$, то по формулѣ (VII) § 1 при $F(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ найдемъ

$$\sum (-1)^{\tau+t} = \sum (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\rho}; \; m = \sigma^2 + 4\rho^2 + 4\tau^2.$$

Отсюда и изъ равенства (c) выводимъ

$$2\sum (-1)^h \psi(m - 2h^2) = \sum (-1)^h \chi(m - 2h^2). \tag{1}$$

Въ силу сказаннаго раньше это равенство будетъ справедливо и для $m \equiv 3 \pmod 4$. Такъ какъ (1) справедливо при всякомъ m (нечетномъ), то необходимо будетъ

$$\chi(m) = 2\psi(m),$$

т. е.

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 2\sum \left(\frac{2}{\delta}\right) d; \; m \equiv 1 \pmod 2 \tag{2}$$

Число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

равно числу рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

гдѣ z и t одинаковой четности. Если $m \equiv 1 \pmod 8$, то y, z, t четныя; если $m \equiv 7 \pmod 8$, то y, z, t нечетныя. Слѣдовательно для $m \equiv \pm 1 \pmod 8$

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 2\psi(m).$$

Если $m \equiv 3 \pmod 8$, то только одно изъ чиселъ y, z, t нечетное, при $m \equiv 5 \pmod 8$ только одно изъ этихъ чиселъ четное. На этомъ основаніи для $m \equiv \pm 3 \pmod 8$

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 6\psi(m).$$

Число рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

съ нечетнымъ x будетъ $N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)$. Соображая, сколько въ разныхъ случаяхъ будетъ четныхъ и нечетныхъ чиселъ среди x, y, z, нетрудно установить общее равенство

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2) = 2\left[4 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\psi(m).$$

Чтобы опредѣлить число представленій четнаго числа $2^h m$ той же формой, обозначимъ черезъ $Q(\alpha)$ число рѣшеній уравненія

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2, \tag{d}$$

гдѣ x четное, y нечетное. Такъ какъ при $\alpha > 0$ z также нечетное, то $\frac{1}{2}Q(\alpha)$ будетъ числомъ рѣшеній уравненія

$$2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2,$$

гдѣ опять x четное, y нечетное; поэтому

$$Q(\alpha) = 2Q(\alpha - 1).$$

По предыдущему

$$Q(0) = N(m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 2\psi(m),$$

слѣдовательно

$$Q(\alpha) = 2^{\alpha+1}\psi(m).$$

Если $P(\alpha)$ число рѣшеній уравненія (d), гдѣ x, y, z четныя, а $F(\alpha)$ полное число рѣшеній, то

$$F(\alpha) = P(\alpha) + 3Q(\alpha).$$

Съ другой стороны сумма $P(\alpha) + Q(\alpha)$ будетъ числомъ рѣшеній уравненія

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

т. е. $F(\alpha-1)$, такъ что

$$F(\alpha-1)=P(\alpha)+Q(\alpha).$$

По исключенiи $P(\alpha)$ имѣемъ

$$F(\alpha)-F(\alpha-1)=2^{\alpha+2}\psi(m),$$

откуда наконецъ найдемъ

$$N(2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+2t^2)=2\left[2^{\alpha+2}-(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\psi(m).$$

§ 10. Формы $x^2+2y^2+8z^2+8t^2$, $x^2+2y^2+16z^2+16t^2$ и проч.

Въ уравненiи

$$m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2 \qquad (a)$$

числа z и t будутъ одной четности, если $m\equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$; если же $m\equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$, то z и t будутъ разной четности; на этомъ основанiи

$$N(m=x^2+2y^2+8z^2+8t^2)=2\psi(m);\quad m\equiv 1,\ 3 \pmod 8)$$

$$N(m=x^2+2y^2+4z^2+16t^2)=\psi(m);\quad m\equiv 5,\ 7 \pmod 8).$$

Можно опредѣлить число представленiй послѣдней формой и для случаевъ $m\equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$, для чего достаточно опредѣлить число рѣшенiй уравненiя (a), гдѣ z и t четныя числа.

Изъ формулы (VII) § 1, которой мы уже столько разъ пользовались, полагая $F(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$, нетрудно извлечь такое слѣдствiе

$$\sum(-1)^s=2\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}s;\quad m=s^2+2t^2,\ s>0,$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ рѣшенiя уравненiя

$$m=4s^2+4t^2+u^2+2v^2$$

и представляетъ собою разность между числами рѣшенiй уравненiя (a) съ четными и нечетными t.

Отсюда находится

$$N(m=x^2+2y^2+4z^2+16t^2)=\psi(m)+\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}s;\ m=s^2+2t^2,\ s>0$$

или все равно

$$N(m=x^2+2y^2+16z^2+16t^2)=\psi(m)+\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}s;\ m\equiv 1 \text{ или } \equiv 3 \pmod 8).$$

Изъ этихъ основныхъ результатовъ безъ новыхъ соображенiй могутъ быть выведены многiе другiе, на чемъ однако мы не останавливаемся.

Предполагая $m \equiv 1 \pmod 8$, разсмотримъ теперь представленіе m формой $x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$:

$$m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$$

Положивъ въ тождествѣ

$$\sum_{m=s^2+16t^2+d\delta,\ \delta \text{ неч.}} (-1)^s F(d+s) = \sum_{m=i^2+16s^2,\ i>0} iF(i)$$

вытекающемъ изъ формулы (VII) § 1 $F(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$, получимъ

$$\sum(-1)^t = 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i; \quad m = i^2 + 16s^2,$$

гдѣ сумма слѣва распространяется на рѣшенія уравненія

$$m = 16t^2 + 16z^2 + x^2 + 8y^2,$$

Отсюда находимъ

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2) = \frac{1}{2}[\psi(m) + \sum(-1)^{\frac{s-1}{2}} s] + \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i;$$
$$m = i^2 + 16s^2, \ i > 0.$$

А изъ этого равенства совершенно аналогичнымъ способомъ выведемъ

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 64z^2 + 64t^2) = \frac{1}{4}\psi(m) + \frac{1}{4}\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}} s +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i + \sum(-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{q^2-1}{8}} q; \quad m = q^2 + 64v^2 \ q > 0.$$

Точно такимъ же образомъ изъ установленнаго въ § 4 равенства

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2) = \zeta(m) + \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i; \ m = i^2 + 4s^2$$

выведемъ

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2) = \frac{1}{2}[\zeta(m) + \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i] +$$
$$+ \sum(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s; \quad m = s^2 + 8t^2, \ s > 0.$$

Опредѣлимъ наконецъ число рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + 2y^2 + 32z^2 + 32t^2,$$

предполагая $m \equiv 3 \pmod 8$; для случая $m \equiv 1 \pmod 8$ намъ неизвѣстно никакого простого результата. Разсматривая уравненіе

$$m = x^2 + 2y^2 + 8\xi^2 + 8\eta^2,$$

обозначимъ соотвѣтственно черезъ P, Q, P', Q' числа рѣшеній, удовлетворяющихъ условіямъ

$$\begin{aligned} &\xi \equiv \quad \eta \equiv 0 \\ &\xi \equiv 1, \ \eta \equiv 0 \\ &\xi \equiv \quad \eta \equiv 1 \\ &\xi \equiv 0, \ \eta \equiv 1 \end{aligned} \qquad \pmod 2$$

На основаніи предыдущаго

$$P + P' = \psi(m) + \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s; \ m = s^2 + 2t^2; \ s > 0.$$

Кромѣ того очевидно $Q = Q'$; слѣдовательно, если обозначимъ черезъ R и R' числа рѣшеній, гдѣ ξ четное и нечетное, то получимъ $P - P' = R - R'$. Но получаемое изъ формулы (VII) § 1 тождество

$$\sum_{m=2x^2+y^2+2d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^x F(d+x) = \sum_{m=2t^2+s^2,\ t>0} (-1)^{t-1} t F(t)$$

при $F(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ даетъ

$$P - P' = 2\sum (-1)^{\frac{t-1}{2}} t, \ m = 2t^2 + s^2, \ t > 0,$$

откуда въ связи съ предыдущимъ имѣемъ

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 32z^2 + 32t^2) = \frac{1}{2}\psi(m) + \frac{1}{2}\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s +$$
$$+ \sum (-1)^{\frac{t-1}{2}} t; \quad m \equiv 3 \pmod 8.$$

§ 11. О числѣ представленій формой $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2$.

Вопросъ о числѣ представленій формой $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$ рѣшается на основаніи соображеній, сходныхъ съ соображеніями § 9. Предполагая $m \equiv 3 \pmod 4$, возьмемъ въ формулѣ (I) § 2

$$f(x, y) = (-1)^{\frac{x-1}{2}} y^2 \cos \frac{\pi y}{4}.$$

Послѣ простого изслѣдованія получимъ

$$2\sum (-1)^h \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2 = 2\sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda \left(\frac{2}{\Delta'}\right) \Delta,$$

что можно представить въ такой формѣ, принявъ во вниманіе сказанное въ § 9

$$2\sum(-1)^h\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2=\sum(-1^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda;\ 2m=\lambda^2+\mu^2+4v^2+4\varrho^2+8\sigma^2$$

или окончательно

$$\begin{gathered}2\sum(-1)^h\varphi(m-2h^2)=2\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi;\\ m=\xi^2+4\eta^2+\zeta^2+\theta^2+4\sigma^2;\ \zeta \text{ и } \theta \text{ неч.,}\end{gathered} \tag{1}$$

согласившись ввести обозначеніе

$$\varphi(n)=\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2;\ n=d\delta.$$

Если въ той же формулѣ (I) § 2 въ случаѣ $m\equiv1 \pmod 4$ возьмемъ $f(x, y)=xy\sin\frac{\pi y}{4}$, то найдемъ

$$\begin{gathered}2\sum(-1)^h\varphi(m-2h^2)=\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi;\\ m=\xi^2+4\eta^2+\zeta^2+\theta^2+4\sigma^2;\ \zeta \text{ и } \theta \text{ чет,}\end{gathered} \tag{2}$$

Разсмотримъ теперь уравненіе

$$n=p^2+q^2+r^2+4s^2+4t^2+2u^2,$$

въ которомъ $q\equiv r \pmod 2$. Обозначимъ черезъ $P(n)$ число рѣшеній съ четными q и r и черезъ $Q(n)$ число рѣшеній съ нечетными q и r. Не трудно доказать, что

$$\sum(-1)^hP(m-2h^2)=0, \text{ если } m\equiv3 \pmod 4$$

$$\sum(-1)^hQ(m-2h^2)=0, \text{ если } m\equiv1 \pmod 4.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ уравненіи

$$m=2h^2+p^2+q^2+r^2+4s^2+4t^2+2u^2 \tag{a}$$

при четныхъ q и r и $m\equiv3 \pmod 4$ числа h и u разной четности; тѣ же числа разной четности при нечетныхъ q и r въ случаѣ $m\equiv1 \pmod 4$; отсюда написанныя выше равенства вытекаютъ непосредственно. Предполагая, что h и u въ уравненіи (a) одинаковой четности, можно безъ труда убѣдиться въ томъ, что въ уравненіи

$$m=4u^2+4v^2+p^2+q^2+r^2+4s^2+4t^2;\ q\equiv r \pmod 2 \tag{b}$$

числа u и v одинаковой четности, когда h и u четныя, и разной четности, когда h и u нечетныя. Но изъ формулы (VII) § 1 можно вывести, что распространенная на рѣшенія уравненія (b) сумма $\sum(-1)^{u+v}$ равна суммѣ

$$\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi,$$

распространенной на рѣшенія уравненія $m=\xi^2+4\eta^2+\zeta^2+\theta^2+4\sigma^2$; $\xi\equiv 1 \pmod 2$, т. е.

$$\sum(-1)^h Q(m-2h^2)=\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi \text{ при } m\equiv 3 \pmod 4 \qquad (3)$$

$$\sum(-1)^h P(m-2h^2)=\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi \text{ при } m\equiv 1 \pmod 4 \qquad (4)$$

Изъ (1) и (3), (2) и (4), положивъ

$$\chi(n)=P(n)+2Q(n),$$

выведемъ

$$\sum(-1)^h\chi(m-2h^2)=2\sum(-1)^h\varphi(m-2h^2)$$

для всякаго нечетнаго m, а отсюда получимъ

$$\chi(m)=P(m)+2Q(m)=2\varphi(m) \qquad (5)$$

Чтобы вывести изъ этого равенства число рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2, \qquad (c)$$

разсмотримъ отдѣльно случаи $m\equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$, $m\equiv 5 \pmod 8$ и $m\equiv 7 \pmod 8$.

Въ случаѣ $m\equiv 1 \pmod 8$ при v четномъ изъ чиселъ x, y, z, t, u только одно нечетное, а при v нечетномъ среди тѣхъ же чиселъ 3 нечетныхъ. Легко сообразить, что первая категорія содержитъ $5P(m)$ рѣшеній, а вторая—$10Q(m)$ рѣшеній; слѣдовательно полное число рѣшеній есть $5(P(m)+2Q(m))=10\varphi(m)$. Такой же результатъ получается въ случаѣ $m\equiv 3 \pmod 8$, слѣдовательно

$$N(m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)=10\varphi(m) \text{ при } m\equiv 1 \text{ или } \equiv 3 \pmod 8.$$

Случаи $m\equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$ трактуются одинаково; остановимся поэтому на предположеніи $m\equiv 7 \pmod 8$. Будемъ считать x нечетнымъ; тогда при v четномъ среди чиселъ y, z, t, u два нечетныхъ. Число рѣшеній такого рода, содержащихъ три нечетныхъ квадрата, есть $10Q(m)$. Если v нечетное, то или y, z, t, u всѣ четныя, причемъ $y^2+z^2+t^2+u^2\equiv 4 \pmod 8$, или y, z, t, u всѣ нечетныя.

Если число рѣшеній 1-го рода A, а второго рода B, то нетрудно видѣть, что $B=2A$.

Кромѣ того ясно, что

$$A=P(m) \text{ и } B=2Q(m),$$

откуда

$$P(m)=Q(m)=\frac{2}{3}\varphi(m).$$

Полное число рѣшеній будетъ

$$10Q(m)+2P(m)+5P(m)=17P(m)=\frac{34}{3}\varphi(m),$$

и такой же результатъ получается въ случаѣ $m\equiv 5 \pmod 8$. Нетрудно видѣть, что всѣ случаи обнимаются формулой

$$N(m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)=\frac{2}{3}\left[16-\left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2;\; m\equiv 1 \pmod 2.$$

Также легко на основаніи сказаннаго найти, что въ случаѣ $m\equiv 7 \pmod 8$ число рѣшеній уравненія (c) въ нечетныхъ положительныхъ числахъ будетъ

$$\frac{1}{48}\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

Переходя къ случаю четнаго числа $2^h m$, обозначимъ черезъ $F(h)$ полное число рѣшеній уравненія

$$2^h m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2.$$

Обозначимъ сверхъ того число рѣшеній этого уравненія, гдѣ x и y оба четныя, равно какъ и z, а t и u нечетныя, черезъ $B(h)$; а число рѣшеній, гдѣ x, y, t, u нечетныя, черезъ $C(h)$.

Полное число рѣшеній, гдѣ z четное, а $x\equiv y \pmod 2$, будетъ $F(h-2)+C(h)+2B(h)$; но легко понять, что то же число будетъ $F(h-1)$, предполагая $h\geqq 2$; слѣдовательно

$$F(h-1)-F(h-2)=C(h)+2B(h)=f(h)$$

или, увеличивая h на 1,

$$F(h)-F(h-1)=f(h+1) \quad\text{при}\quad h\geqq 1 \tag{d}$$

Остается опредѣлить $f(h)$. Для этого разсмотримъ рѣшенія уравненія

$$2^h m=x^2+y^2+t^2+u^2+2v^2+4z^2, \tag{e}$$

въ которыхъ x и y четныя, а t и u нечетныя. Число такихъ рѣшеній будетъ $B(h)$; и нетрудно понять, что $\frac{1}{2}B(h)$ будетъ равна числу рѣшеній уравненія

$$2^{h-1}m = x^2 + y^2 + t^2 + 4u^2 + v^2 + 2z^2,$$

гдѣ $x \equiv y \pmod 2$ и t нечетное. При $h=1$ это число будетъ $P(m)+Q(m)$, а при $h>1$ оно равно $B(h-1)+C(h-1)$; слѣдовательно

$$B(h)=2B(h-1)+2C(h-1) \text{ при } h>1 \text{ и } B(1)=2P(m)+2Q(m) \qquad \text{(f)}$$

Если въ уравненіи (e) будемъ предполагать x, y, t, u нечетными, то число такихъ рѣшеній будетъ $C(h)$; легко понять, что $\frac{1}{4}C(h)$ будетъ равна числу рѣшеній уравненія

$$2^{h-1}m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 2v^2,$$

гдѣ x, y, z нечетныя; такъ что будемъ имѣть

$$C(h) = 4B(h-1) \text{ при } h>1 \text{ и } C(1) = 4Q(m) \qquad \text{(g)}$$

Изъ (f) и (g) найдемъ

$$f(h) = 4f(h-1); \quad f(1) = 4(P(m) + 2Q(m)) = 8\varphi(m),$$

далѣе

$$f(h) = 4^h . 2\varphi(m)$$

и наконецъ на основаніи (d)

$$F(h) = \frac{2}{3}\left[4^{h+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\varphi(m)$$

или

$$N(2^h m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[4^{h+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

Замѣтимъ въ заключеніе, что изъ полученныхъ результатовъ весьма легко вывести число представленій формой $x^2+2y^2+2z^2+2t^2+2u^2+2v^2$; не останавливаясь на этомъ вопросѣ, перейдемъ къ болѣе интересному, именно къ опредѣленію функцій $B(h)$ и $C(h)$ въ отдѣльности, что составитъ предметъ слѣдующаго §.

§ 12. Число представленій формой $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2$.

Равенства (f) и (g) предыдущаго § даютъ возможность найти $B(h)$ и $C(h)$ при всякомъ h, если только будутъ извѣстны $P(m)$ и $Q(m)$.

Въ случаяхъ $m \equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$ имѣемъ $P(m) = Q(m) = \frac{2}{3}\varphi(m)$. Для $m \equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$ мы имѣемъ только одно соотношеніе $P(m) + 2Q(m) = 2\varphi(m)$.

Чтобы найти другое, прибѣгнемъ опять къ формулѣ (VII) § 1; полагая $F(x) = x$, извлечемъ изъ нея такое слѣдствіе:

$$\sum (-1)^z d = \frac{1}{2} \sum s^2, \tag{a}$$

здѣсь сумма слѣва распространяется на всѣ рѣшенія уравненія $m = z^2 + 2t^2 + d\delta$, δ нечетное, t по произволу четное или нечетное; сумма справа—на всѣ представленія $m = s^2 + 2t^2$.

Подобнымъ же образомъ получается другая формула

$$\sum (-1)^t d = \mp \frac{1}{2} \sum t^2, \tag{b}$$

въ которой сумма слѣва распространяется на всѣ рѣшенія уравненія $m = z^2 + 2t^2 + 2d\delta$, δ неч., а сумма справа на всѣ представленія $m = s^2 + 2t^2$. Случаи $m \equiv 1$ или $m \equiv 3 \pmod 8$ трактуются аналогично; поэтому достаточно разсмотрѣть, напр., случай $m \equiv 1 \pmod 8$. Въ этомъ случаѣ будемъ считать, что сумма въ лѣвой части равенства (a) распространяется на рѣшенія уравненія $m = z^2 + 2t^2 + d\delta$ съ четнымъ t. Изъ (a) и (b) получимъ

$$\sum_{z \equiv 0,\ t \equiv 0} d - \sum_{z \equiv 1,\ t \equiv 1} d = \frac{1}{2} \sum (s^2 - 2t^2), \quad m = s^2 + 2t^2. \tag{c}$$

Здѣсь обѣ суммы въ лѣвой части распространяются на рѣшенія уравненія

$$m = z^2 + 2t^2 + d\delta, \quad \delta \text{ неч.},$$

причемъ первая на рѣшенія, гдѣ z и t четныя, вторая—на рѣшенія, гдѣ z и t нечетныя. Припоминая, какъ выражается число представленій суммою четырехъ квадратовъ, мы можемъ написать

$$\sum_{z \equiv 0,\ t \equiv 0} d = \frac{1}{8} N(m = z^2 + 2t^2 + x^2 + y^2 + u^2 + v^2); \quad z \text{ и } t \text{ четныя}$$

$$\sum_{z \equiv 1,\ t \equiv 1} d = \frac{2}{8} N(m = z^2 + 2t^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2u^2 + 2v^2); \quad z \text{ и } t \text{ нечетныя}.$$

Но нетрудно видѣть, что

$$N(m = \underset{z\equiv 0,\ t\equiv 0}{z^2 + 2t^2} + x^2 + y^2 + u^2 + v^2) = 4P(m)$$

$$N(m = \underset{z\equiv 1,\ t\equiv 1}{z^2 + 2t^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2u^2 + 2v^2) = 2Q(m),$$

слѣдовательно въ силу равенства (c) будемъ имѣть

$$P(m) - Q(m) = \sum (s^2 - 2t^2); \quad m = s^2 + 2t^2$$

или

$$P(m) - Q(m) = 2\sigma,$$

если положимъ

$$\sigma = \sum (s^2 - 2t^2); \quad m = s^2 + 2t^2, \quad s > 0$$

Такая же формула имѣетъ мѣсто и въ случаѣ $m \equiv 3 \pmod 8$. Теперь находимъ

$$\left.\begin{aligned} P(m) &= \frac{2}{3}\varphi(m) + \frac{4}{3}\sigma \\ Q(m) &= \frac{2}{3}\varphi(m) - \frac{2}{3}\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти формулы годятся и въ случаяхъ $m \equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$, такъ какъ тогда $\sigma = 0$.

Изъ равенствъ (f) и (g) предыдущаго § слѣдуетъ

$$B(h) - C(h) = -2(B(h-1) - C(h-1)) \text{ при } h > 1,$$

поэтому

$$B(h) - C(h) = (-1)^{h-1} 2^{h+1} \sigma.$$

Съ другой стороны

$$2B(h) + C(h) = 2 \,.\, 4^h \varphi(m),$$

слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} B(h) &= \frac{2}{3}\left[4^h \varphi(m) + (-1)^{h-1} 2^h \sigma\right] \\ C(h) &= \frac{2}{3}\left[4^h \varphi(m) - (-1)^{h-1} 2^{h+1} \sigma\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Разсмотримъ теперь уравненіе

$$2^{h+1} m = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2; \quad h \geqq 0.$$

Число рѣшеній его, гдѣ t и u нечетныя есть $B(h+1)$, число рѣшеній, гдѣ t и u четныя равно числу рѣшеній $\Phi(h)$ уравненія

$2^h m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2u^2 + v^2$; число рѣшеній, гдѣ $t \equiv u \pmod 2$ равно $B(h+1) + \Phi(h)$. Но это число равно числу рѣшеній уравненія

$$2^h m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2.$$

Слѣдовательно

$$N(2^h m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2) =$$
$$= \frac{2}{3}[4^{h+1}\varphi(m) - (-2)^{h+1}\sigma] + N(2^h m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2).$$

Послѣдній членъ въ правой части, какъ уже было замѣчено, находится безъ труда. Именно

$$N(2^h m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2) = \frac{4}{3}\left[4^{h+1} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\varphi(m) \text{ при } h \geqq 0,$$

поэтому окончательно

$$N(2^h m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2) =$$
$$= \frac{2}{3}\left[2^{2h+3} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\varphi(m) + \frac{(-2)^{h+2}}{3}\sum(s^2 - 2t^2); \quad m = s^2 + 2t^2, \quad s > 0.$$

Установленные результаты позволяютъ также опредѣлить число представленій формой

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 8v^2.$$

Дѣйствительно, легко найти, что для нечетнаго числа m число представленій этой формой N будетъ

$$N = 5P(m) = \frac{10}{3}\varphi(m) + \frac{20}{3}\sigma, \quad m \equiv 1 \pmod 8$$
$$N = 10Q(m) = \frac{20}{3}\varphi(m) - \frac{20}{3}\sigma, \quad m \equiv 3 \pmod 8$$
$$N = 7P(m) = \frac{14}{3}\varphi(m), \quad m \equiv 5 \pmod 8$$
$$N = 10Q(m) = \frac{20}{3}\varphi(m), \quad m \equiv 7 \pmod 8.$$

Для удвоеннаго нечетнаго числа $2m$ число представленій всегда будетъ $10B(1)$, т. е.

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 8v^2) = \frac{80}{3}\varphi(m) + \frac{40\sigma}{3}.$$

Наконецъ, для числа $2^h m$, $h>1$ число представленій будетъ $5C(h)+F(h-2)$, т. е.

$$N(2^h m = x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+8v^2) =$$
$$=\frac{2}{3}\left[6.4^h - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\varphi(m) + (-1)^h \frac{5.2^{h+2}}{3}\sigma \text{ при } h>1.$$

Мы нашли нужнымъ остановиться на этихъ результатахъ, потому что они, повидимому, ускользнули отъ Ліувилля.

§ 13. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+3t^2$.

Способъ индукціи, которымъ мы до сихъ поръ исключительно пользовались, въ примѣненіи къ формѣ $x^2+y^2+z^2+3t^2$ оказывается слишкомъ громоздкимъ. Для этой формы проще будетъ вести изслѣдованіе, опираясь на слѣдующую формулу, приводимую здѣсь безъ доказательства, которое не представляетъ трудностей.

Если $F(x)$ нечетная функція, то имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}[F(d+d')+F(d-d')] = 2^{\alpha-1}\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} dF(2^{\alpha+1}d); \quad (1)$$

здѣсь сумма слѣва распространяется на всѣ представленія четнаго числа $2^\alpha m$ въ формѣ

$$2^\alpha m = d\delta + d'\delta'$$

съ нечетными d, d', δ, δ', а сумма справа на всѣ представленія m въ формѣ $m=d\delta$.

Полагая въ (1) $F(x)=\sin\frac{2\pi x}{3}$, получимъ

$$\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}\cos\frac{2\pi d'}{3}\cdot\left(\frac{-3}{d}\right) = (-1)^\alpha 2^{\alpha-2}\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{-3}{d}\right)d. \quad \text{(a)}$$

Если $m=3^\beta n$, гдѣ n на 3 недѣлится, то правую часть можно изобразить такъ

$$(-1)^{\alpha+\beta}2^{\alpha-2}\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{-3}{d}\right)d; \quad n=d\delta$$

или

$$(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)2^{\alpha-2}\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d; \quad n=d\delta.$$

Въ лѣвой части сумма

$$\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}\cos\frac{2\pi d'}{3},$$

взятая по дѣлителямъ числа $m''=d'\delta'$ будетъ $-\frac{1}{2}\varrho(m'')$ (гдѣ $\varrho(m'')$ извѣстная числовая функція, связанная съ числомъ представленій суммой двухъ квадратовъ), если высшая степень 3, дѣлящая m'', четная (включая и нулевую), и $\frac{3}{2}\varrho\left(\frac{m''}{3}\right)$, если эта степень нечетная. Сумма $\sum\left(\frac{-3}{d}\right)$, взятая по дѣлителямъ нечетнаго числа $m'=d\delta$, равна половинѣ числа представленій m' формой x^2+3y^2. Нетрудно послѣ этого понять, что лѣвая часть равенства (a) имѣетъ слѣдующее ариѳметическое значеніе. Если обозначить знаками $\overline{N}(n=x^2+3y^2+z^2+t^2)$ и $\overline{N}(n=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)$ числа представленій соотвѣтствующими формами, но такія, гдѣ x и y разной четности, то лѣвая часть равенства (a) будетъ

$$\frac{3}{16}\overline{N}(2^\alpha m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\frac{1}{16}\overline{N}(2^\alpha m=x^2+3y^2+z^2+t^2);$$

сравнивая ее съ правой частью, получаемъ первое основное равенство

$$3\overline{N}(2^\alpha m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\overline{N}(2^\alpha m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=$$
$$=(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)2^{\alpha+2}S. \qquad (2)$$

$$m=3^\beta n;\quad \beta\geqq 0;\quad S=\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d;\quad n=d\delta.$$

Сейчасъ покажемъ, что это равенство, выведенное для $\alpha>0$, будетъ справедливо и для $\alpha=0$.

Мы установили въ § 5 для случая $v\equiv 2 \pmod 4$ такое равенство

$$N(v=x^2+y^2+z^2)_{y\equiv z \pmod 2}=N(v=x^2+3y^2+3z^2)+2N(v=3x^2+2y^2+6z^2),$$

изъ котораго, какъ простое слѣдствіе, вытекаетъ второе основное соотношеніе:

$$\overline{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=\overline{N}(2m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)+$$
$$+4\overline{N}(m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2) \qquad (3)$$

Замѣнивъ здѣсь m на $3m$, получимъ

$$\overline{N}(6m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=\overline{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)+$$
$$+4\overline{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2) \qquad (4)$$

Отсюда и изъ (2)

$$3\overline{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)-\overline{N}(6m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=$$
$$=(-1)^{\beta+1}\left(\frac{n}{3}\right)8S+4\{3\overline{N}(m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\overline{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)\}.$$

Замѣнивъ въ равенствѣ (2) m на $3m$ и взявъ $\alpha=1$, имѣемъ

$$3\overline{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)-\overline{N}(6m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=(-1)^\beta\left(\frac{n}{3}\right)8S,$$

что въ связи съ предыдущимъ даетъ

$$3\overline{N}(m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\overline{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=(-1)^\beta\left(\frac{n}{3}\right)4S. \quad (5)$$

Этимъ доказано равенство (2) и для $\alpha=0$.—Замѣтимъ, что уравненіе

$$n=x^2+3y^2+3z^2+3t^2$$

не имѣетъ рѣшеній, если $n\equiv2 \pmod 3$. На этомъ основаніи въ случаѣ $m\equiv2 \pmod 3$ изъ (5) сразу получаемъ

$$\overline{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=4S;\quad m\equiv2 \pmod 3.$$

Въ томъ же предположеніи изъ (3) и (2) найдемъ

$$\overline{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=4S;\qquad m\equiv2 \pmod 3)$$
$$\overline{N}(2m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)=4S;\quad m\equiv2 \pmod 3.$$

Если $m\equiv1 \pmod 3$, то изъ (2) получимъ

$$\overline{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=8S,\quad m\equiv1 \pmod 3.$$

Затѣмъ изъ (3) и (5) найдемъ

$$\overline{N}(m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)=2S,\quad m\equiv1 \pmod 3)$$
$$\overline{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=2S,\qquad m\equiv1 \pmod 3.$$

Всѣ эти случаи обнимаются формулами

$$\left.\begin{aligned}\overline{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)&=\left[3-\left(\frac{m}{3}\right)\right]S\\ \overline{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)&=2\left[3+\left(\frac{m}{3}\right)\right]S\end{aligned}\right\}\quad (6)$$

Если m дѣлится на 3, такъ что $m=3^\beta n$, $n\equiv\pm1 \pmod 3$, то положивъ для сокращенія письма

$$\overline{N}(2^\alpha 3^\beta n=x^2+3y^2+z^2+t^2)=\psi(\alpha,\ \beta),$$

изъ равенства (a) найдемъ

$$3\psi(\alpha,\ \beta-1)-\psi(\alpha,\ \beta)=(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)2^{\alpha+\beta}S\quad\text{при}\quad\alpha\geqq0$$

и отсюда легко выведемъ

$$\psi(\alpha,\ \beta) = 3^\beta\psi(\alpha,\ 0) + (3^\beta - (-1)^\beta)(-1)^\alpha\left(\frac{n}{3}\right)2^\alpha S. \tag{7}$$

Если $\alpha \geqq 2$, то въ уравненіи

$$2^\alpha n = x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

при условіи, что x и y разной четности, необходимо будетъ x четнымъ, y нечетнымъ; отсюда легко вывести, что

$$\psi(\alpha,\ 0) = 4\psi(\alpha - 2{,}0)$$

и далѣе въ силу равенствъ (6)

$$\psi(\alpha,\ 0) = 2^\alpha\left[3 - (-1)^\alpha\left(\frac{n}{3}\right)\right]S.$$

Подставляя это значеніе въ (7), получимъ общее выраженіе

$$\psi(\alpha,\ \beta) = 2^\alpha\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)\right]S. \tag{8}$$

Остается теперь опредѣлить полное число представленій формой $x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$, которое для числа $2^\alpha 3^\beta n$, гдѣ n нечетное и на 3 не дѣлится, обозначимъ черезъ $\varphi(\alpha,\ \beta)$.

Если m нечетное, то въ уравненіи

$$m = x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

при y четномъ, въ случаѣ $m \equiv 1 \pmod 4$, среди чиселъ x, z, t одно нечетное, а при y нечетномъ, среди тѣхъ же чиселъ одно четное; въ случаѣ $m \equiv 3 \pmod 4$ всѣ три числа x, z, t одинаковой четности. Отсюда нетрудно заключить, что вообще

$$\varphi(0,\ \beta) = \left[2 + (-1)^{\beta + \frac{n-1}{2}}\right]\psi(0,\ \beta).$$

Въ уравненіи

$$2m = x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

при y четномъ среди чиселъ x, z, t два нечетныхъ; число рѣшеній съ четнымъ y будетъ $\frac{3}{2}\psi(1,\ \beta)$. При y нечетномъ всѣ числа x, z, t нечетныя; число рѣшеній съ нечетнымъ y будетъ равно удвоенному числу рѣшеній уравненія

$$m = 2x^2 + 6y^2 + z^2 + t^2,$$

гдѣ x и y разной четности. Нетрудно видѣть, что полное число рѣшеній этого уравненія есть $\frac{1}{2}\psi(1, \beta)$. Это число совпадаетъ съ искомымъ, если $m \equiv 3 \pmod 4$, а при $m \equiv 1 \pmod 4$ искомое число равно 0. Въ виду этого нетрудно вывести, что

$$\varphi(1, \beta) = \frac{1}{2}\left[4 + (-1)^{\beta + \frac{n-1}{2} + 1}\right]\psi(1, \beta).$$

Равнымъ образомъ легко показать, что при $\alpha \geqq 2$

$$\varphi(\alpha, \beta) - \varphi(\alpha - 2, \beta) = \frac{3}{2}\psi(\alpha, \beta)$$

и въ связи съ предыдущимъ вывести общее выраженіе

$$\varphi(\alpha, \beta) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{n-1}{2}}\right]S.$$

Полученные результаты даютъ возможность опредѣлить число представленій многими другими формами, напр. формой $x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2$, на чемъ, однако, не будемъ останавливаться. Ограничимся лишь указаніемъ на то, что

$$N(m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 2\left[2 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]S.$$

для нечетнаго числа $\equiv 1 \pmod 3$.

§ 14. Число представленій формами $x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2$ и $4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2$.

Ограничиваясь наиболѣе интереснымъ случаемъ нечетнаго m, разсмотримъ уравненіе

$$4m = s^2 + t^2 + u^2 + 3v^2 \tag{a}$$

гдѣ u и v предполагаются нечетными. Полное число рѣшеній этого уравненія M слагается изъ числа M_1 рѣшеній, гдѣ $\frac{s}{2}$ четное и числа M_2 рѣшеній, гдѣ $\frac{s}{2}$ нечетное. По доказанному въ предыдущемъ §

$$M = M_1 + M_2 = 2\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]S.$$

Съ другой стороны, примѣня формулу (VII) § 1, можно установить, что

$$M_1 - M_2 = 4\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія $4m = i^2 + 3j^2$ въ нечетныхъ и положительныхъ числахъ. Если число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

гдѣ z и t разной четности, обозначить черезъ P; затѣмъ черезъ P_1 и P_2 числа тѣхъ рѣшеній, гдѣ при $z + t \equiv 1 \pmod 2$ x четное и нечетное, то будетъ

$$M = 2P, \quad M_1 = 2P_1, \quad M_2 = 2P_2.$$

Отсюда и на основаніи предыдущаго найдемъ

$$P_1 = \frac{1}{2} P + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i; \quad \underset{i \text{ и } j \text{ нечет. полож.}}{4m = i^2 + 3j^2}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} P - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Послѣ этого безъ труда находится число рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2;$$

именно получается

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2) = \frac{3}{2} P + 3 \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i; \quad m \equiv 1 \pmod 4)$$

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2) = \frac{1}{2} P - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i; \quad m \equiv 3 \pmod 4).$$

Предполагая m нечетнымъ $\equiv 1 \pmod 3$, разсмотримъ уравненіе

$$4m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2,$$

гдѣ x и y нечетныя. Пусть N полное число такихъ рѣшеній, N_1—число рѣшеній, гдѣ $\frac{t}{2}$ четное, N_2—число рѣшеній, гдѣ $\frac{t}{2}$ нечетное. Опять примѣненіемъ формулы (VII) § 1 можно установить, что

$$N_1 - N_2 = 4 \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j; \quad 4m = i^2 + 3j^2; \quad i \text{ и } j \text{ неч. полож.}$$

Если Q число рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2,$$

гдѣ x и y разной четности, слагающееся изъ Q_1 рѣшеній, гдѣ t четное, и Q_2 рѣшеній, гдѣ t нечетное, то

$$N = 2Q, \quad N_1 = 2Q_1, \quad N_2 = 2Q_2.$$

Отсюда и на основанiи ранѣе доказаннаго

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q + \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} Q - \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j.$$

Послѣ этого находится слѣдующее выраженiе для числа рѣшенiй уравненiя $m = 4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2$:

$$N(m = 4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2) = \frac{1}{2} Q - \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j; \quad m \equiv 1 \pmod 4$$

$$N(m = 4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2) = \frac{3}{2} Q + 3 \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j; \quad m \equiv 3 \pmod 4).$$

Не представляется труднымъ изъ доказанныхъ въ этомъ § основныхъ результатовъ вывести числа представленiй многими другими формами, разсмотрѣнными Лiувиллемъ. Возьмемъ для примѣра двѣ формы: $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 12t^2$ и $4x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 48t^2$.

Полное число рѣшенiй R уравненiя

$$m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2; \quad m \equiv 1 \pmod 4)$$

составляется изъ числа рѣшенiй R', гдѣ z четное, и числа рѣшенiй R'', гдѣ z нечетное. По доказанному

$$R' + R'' = \frac{1}{2} P + \sigma; \quad \sigma = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Но примѣненiе формулы (VII) § 1 даетъ

$$R' - R'' = 2 \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s; \quad m = s^2 + 12t^2, \quad s > 0,$$

и легко убѣдиться, что

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sigma,$$

замѣтивъ, что всѣ рѣшенiя уравненiя $4m = i^2 + 3j^2$, гдѣ $i \equiv j \pmod 4$, получаются изъ рѣшенiй уравненiя $m = x^2 + 3y^2$ по формуламъ

$$i = x + 3y, \quad j = x - y.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ

$$N(m=x^2+4y^2+16z^2+12t^2)=\frac{1}{4}P+\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{m}\right)\right]\sigma;\quad m\equiv 1 \pmod 4.$$

Полное число рѣшеній S уравненія

$$m=4x^2+3y^2+12z^2+12t^2;\quad m\equiv 3 \pmod 4$$

слагается изъ S' рѣшеній, гдѣ t четное, и S'' рѣшеній, гдѣ t нечетное. По доказанному

$$S'+S''=\frac{1}{2}Q+\tau;\quad \tau=\sum(-1)^{\frac{j-1}{2}}j;\quad 4m=i^2+3j^2.$$

Съ другой стороны примѣненіе формулы (VII) § 1 даетъ

$$S'-S''=2\sum(-1)^{\frac{t-1}{2}}t;\quad m=3t^2+4x^2;\quad t>0$$

и легко убѣдиться, что

$$\sum(-1)^{\frac{t-1}{2}}t=-(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\tau.$$

На основаніи сказаннаго получимъ

$$N(m=4x^2+3y^2+12z^2+48t^2)=\frac{1}{4}Q+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{m}\right)\right]\tau;\quad m\equiv 3 \pmod 4.$$

§ 15. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2$.

Вмѣстѣ съ этой формой придется разсматривать форму

$$x^2+3y^2+3z^2+3t^2+3u^2+3v^2.$$

Обозначимъ черезъ $N(n)$ число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$n=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2. \tag{a}$$

и черезъ $N_0(n)$ число рѣшеній, гдѣ u и v разной четности. Обозначимъ также черезъ $M(n)$ и $M_0(n)$ соотвѣтственно число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$n=x^2+3y^2+3z^2+3t^2+3u^2+3v^2. \tag{b}$$

и число тѣхъ рѣшеній, гдѣ x и y разной четности. Докажемъ, что для всякаго недѣлящагося на 3 числа n

$$M(n)=\frac{1+\left(\frac{n}{3}\right)}{10}N(n),$$

т. е. $M(n)=0$, если $n\equiv 2 \pmod 3$, что очевидно, и $M(n)=\frac{1}{5}N(n)$, если $n\equiv 1 \pmod 3$. Въ случаѣ $n\equiv 1 \pmod 3$ въ уравненіи (a) изъ чиселъ x, y, z, t, u или только одно не дѣлится на 3 или четыре. Если P есть число всѣхъ рѣшеній, гдѣ x не дѣлится на 3, а y, z, t, u дѣлятся, и равнымъ образомъ P' число рѣшеній, гдѣ x не дѣлится на 3, y, z, t, не дѣлятся, а u дѣлится, то $N(n)=5P+5P'$. Докажемъ, что $P+P'=M(n)$. Если обозначимъ черезъ $\bar{\zeta}(s)$ сумму нечетныхъ дѣлителей $s=3^\beta\sigma$, то имѣемъ

$$\bar{\zeta}(s)+3\bar{\zeta}\left(\frac{s}{9}\right)=4\bar{\zeta}\left(\frac{s}{3}\right). \tag{c}$$

Число всѣхъ рѣшеній уравненія (a), гдѣ x не дѣлится на 3, равное $4P'+P$, выражается суммой

$$4P'+P=8\sum\{2+(-1)^{n+x+v}\}\,\bar{\zeta}(n-x^2-3v^2).$$

Для P тоже получается выраженіе въ видѣ суммы

$$P=8\sum\{2+(-1)^{n+x+v}\}\,\bar{\zeta}\left(\frac{n-x^2-3v^2}{9}\right).$$

Изъ этихъ выраженій, принявъ во вниманіе тождество (c), находимъ

$$4(P'+P)=32\sum\{2+(-1)^{n+x+v}\}\,\bar{\zeta}\left(\frac{n-x^2-3v^2}{3}\right)=4M(n).$$

Докажемъ теперь, что для четнаго n

$$M_0(n)=\frac{1+\left(\frac{n}{3}\right)}{10}N_0(n).$$

Разсмотримъ уравненіе

$$2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2;\quad \alpha\geqq 3,\quad m \text{ неч.}$$

Если v четное, то или всѣ остальныя числа четныя или только одно; если v нечетное, то или всѣ остальныя числа нечетныя или только одно. На этомъ основаніи, если обозначимъ черезъ

R число рѣшеній, гдѣ x, y, z, t неч., u четн. v четн.
S » » » x, y, z, t четн., u неч. v неч.
T » » » x, y, z, t неч., u неч. v неч.
U » » » x, y, z, t четн., u четн. v четн.

то

$$N(2^\alpha m)=N(2^{\alpha-2}m)+5R+5S+T.$$

Но $T=2R$ и $S=R$, поэтому

$$N(2^\alpha m)-N(2^{\alpha-2}m)=12R.$$

Съ другой стороны $\frac{1}{2}R=N_0(2^{\alpha-2}m)$, слѣдовательно

$$N(2^\alpha m)-N(2^{\alpha-2}m)=24N_0(2^{\alpha-2}m). \qquad \text{(d)}$$

Подобнымъ же образомъ устанавливается равенство

$$M(2^\alpha m)-M(2^{\alpha-2}m)=24M_0(2^{\alpha-2}m).$$

Изъ совокупности же выведенныхъ равенствъ требуемое доказательство получается непосредственно.

До сихъ поръ предполагалось $\alpha\geqq 3$; если $\alpha=2$, то $T=0$ и кромѣ того R и S соотвѣтственно представляютъ удвоенныя числа рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2,$$

гдѣ $u+v$ четное и $u+v$ нечетное. Вслѣдствіе этого $R+S=2N(m)$ и

$$N(4m)=11N(m). \qquad \text{(e)}$$

Кромѣ того

$$N_0(4m)=4R+4S=8N(m). \qquad \text{(f)}$$

Подобнымъ же образомъ устанавливается равенство

$$N(2m)=\frac{5}{2}N_0(m). \qquad \text{(g)}$$

Найдемъ теперь связь между $N(3^\beta m)$ и $N(m)$, предполагая, что m на 3 не дѣлится.

Уравненіе

$$3^{\beta+1}m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2$$

имѣетъ рѣшенія двоякаго рода: къ первому роду относятся тѣ рѣшенія, гдѣ всѣ числа x, y, z, t, u дѣлятся на 3, ко второму роду—рѣшенія, гдѣ только два числа дѣлятся на 3. Пусть число рѣшеній 1-го рода P, а второго рода, гдѣ x и y дѣлятся на 3, Q; тогда полное число рѣшеній будетъ

$$N(3^{\beta+1}m)=P+10Q.$$

Съ другой стороны можно доказать, какъ выше, что

$$P+Q=M(3^{\beta+1}m)=N(3^\beta m);$$

кромѣ того ясно, что $P = M(3^{\beta}m) = N(3^{\beta-1}m)$, если $\beta \geqq 1$. Такимъ образомъ получимъ

$$N(3^{\beta+1}m) - N(3^{\beta}m) = 9\,\{N(3^{\beta}m) - N(3^{\beta-1}m)\} \text{ при } \beta \geqq 1,$$

откуда далѣе найдемъ

$$N(3^{\beta+1}m) - N(3^{\beta}m) = 9^{\beta}(N(3m) - N(m))$$

или, мѣняя β на $\beta - 1$,

$$N(3^{\beta}m) - N(3^{\beta-1}m) = 9^{\beta-1}(N(3m) - N(m)); \quad \beta \geqq 1.$$

Въ случаѣ $\beta = 0$ имѣемъ

$$P = M(m) = \frac{1 + \left(\frac{m}{3}\right)}{10} N(m), \quad Q = N(m) - P$$

и

$$N(3m) = P + 10Q = 10N(m) - 9P$$

$$N(3m) - N(m) = \frac{9}{10}\left(9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right) N(m);$$

поэтому

$$N(3^{\beta}m) - N(3^{\beta-1}m) = \frac{9^{\beta}}{10}\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] N(m).$$

Отсюда находимъ окончательно

$$N(3^{\beta}m) = \frac{9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)}{9 + \left(\frac{m}{3}\right)} N(m). \tag{1}$$

Послѣ этихъ предварительныхъ соображеній обращаемся къ слѣдующей важной формулѣ Ліувилля

$$\sum [f(d'-d'') - f(d'+d'')] = 2^{\alpha-1} \sum d(f(0) - f(2^{\alpha}d)), \tag{2}$$

гдѣ $f(x)$ обозначаетъ произвольную четную функцію, сумма слѣва распространяется на всѣ представленія четнаго числа $2^{\alpha}m$ въ формѣ

$$2^{\alpha}m = d'\delta' + d''\delta'',$$

съ нечетными d', δ', d'', δ''; сумма справа берется по дѣлителямъ m. Полагая $f(x) = x \sin \frac{2\pi x}{3}$, получимъ

$$2 \sum \left(\frac{-3}{d'}\right) d'' \cos \frac{2\pi d''}{3} = (-1)^{\alpha} 2^{2\alpha-2} \left(\frac{m}{3}\right) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2; \quad m = d\delta. \tag{h}$$

Но на основанiи установленнаго въ § 5 легко убѣдиться, что сумма

$$\sum d\cos\frac{2\pi d}{3},$$

взятая по дѣлителямъ нечетнаго числа n равна

$$\frac{1}{8}N(n=x^2+y^2+z^2+t^2)-\frac{3}{8}N(n=x^2+y^2+3z^2+3t^2),$$

что даетъ возможность истолковать равенство (h) такъ: обозначая черезъ $N_0(n)$, $M_0(n)$ то же, что выше, и черезъ $P_0(n)$ число рѣшенiй уравненiя

$$n=x^2+y^2+3z^2+3t^2+u^2+3v^2,$$

гдѣ u и v разной четности, будемъ имѣть

$$N_0(2^\alpha m)-3P_0(2^\alpha m)=(-1)^\alpha 2^{2\alpha+1}\left(\frac{m}{3}\right)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2. \tag{3}$$

Чтобы получить второе соотношенiе, замѣнимъ въ формулѣ (2) $f(x)$ черезъ $(-1)^{\frac{x}{2}}f(x)$; затѣмъ въ полученномъ равенствѣ

$$\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}[f(d'-d'')+f(d'+d'')]=2^{\alpha-1}\sum d(f(0)+f(2^\alpha d)). \tag{4}$$

положимъ опять $f(x)=x\sin\frac{2\pi x}{3}$. Въ результатѣ получимъ

$$16\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}\left(\frac{d'}{3}\right)d'.(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\cos\frac{2\pi d''}{3}=2^{2\alpha+1}.(-1)^{\alpha-1}\left(\frac{m}{3}\right)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2;\ m=d\delta. \tag{i}$$

Но сумма

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d,$$

взятая по дѣлителямъ нечетнаго числа n, на основанiи доказаннаго въ § 13, равна

$$\frac{3}{4}\overline{N}(n=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\frac{1}{4}\overline{N}(n=x^2+3y^2+z^2+t^2),$$

что даетъ возможность изъ (i) вывести

$$6P_0(2^\alpha m)-9M_0(2^\alpha m)-N_0(2^\alpha m)=(-1)^{\alpha-1}2^{2\alpha+3}\left(\frac{m}{3}\right)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2. \tag{5}$$

Прибавляя къ равенствамъ (3) и (5) ранѣе доказанное соотношеніе

$$10M_0(2^\alpha m)=\left[1+\left(\frac{2^\alpha m}{3}\right)\right]N_0(2^\alpha m),$$

найдемъ

$$N_0(2^\alpha m)=2^{2\alpha-1}\left(9+(-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right)\sigma;\quad \sigma=\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2;\quad m=d\delta.$$

Обращаясь затѣмъ къ равенствамъ (f) и (g), получимъ

$$N(m)=\left[9+\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sigma;\quad N(2m)=5\left[9-\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sigma$$

и далѣе на основаніи соотношенія (d) найдемъ

$$N(2^\alpha m)=\frac{1}{5}\left\{9+(-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right\}\left\{4^{\alpha+1}-(-1)^\alpha.\,9\right\}\sigma;\quad \alpha>0.$$

Здѣсь предполагается, что m не дѣлится на 3; для опредѣленія числа представленій чиселъ, дѣлящихся на 3, служитъ формула (1).

§ 16. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+3t^2+3u^2+3v^2$.

Въ предыдущемъ § мы встрѣтили форму $x^2+y^2+z^2+3t^2+3u^2+3v^2$, не разсмотрѣнную у Ліувилля.

Въ виду интересныхъ особенностей этой формы не лишне будетъ, хотя бы кратко, коснуться ея теоріи. Полное число представленій этой формой обозначимъ черезъ $P(n)$, сохраняя за знакомъ $P_0(n)$ то же значеніе, какъ въ предыдущемъ §. Для недѣлящагося на 3 числа $2^\alpha m$ $(\alpha>0)$ мы нашли

$$N_0(2^\alpha m)-3P_0(2^\alpha m)=(-1)^\alpha 2^{2\alpha+1}\left(\frac{m}{3}\right)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2. \tag{1}$$

Если же $m=3^\beta n$, то это соотношеніе замѣнится такимъ

$$N_0(2^\alpha m)-3P_0(2^\alpha m)=(-1)^\alpha 2^{2\alpha+1}\left(\frac{n}{3}\right)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2;\quad d\delta=n. \tag{1*}$$

На основаніи равенства

$$N(2^\alpha m)-N(2^{\alpha-2}m)=24N_0(2^{\alpha-2}m);\quad \alpha\geqq 3$$

можно считать величину $N_0(2^\alpha m)$ извѣстной во всѣхъ случаяхъ; поэтому будетъ считаться извѣстной также и величина $P_0(2^\alpha m)$ для $\alpha>0$. Чтобы получить $P(2^\alpha m)$ будемъ разсуждать такъ. Въ уравненіи

$$2^\alpha m=x^2+3y^2+z^2+3t^2+u^2+3v^2;\quad \alpha\geqq 3$$

можно различать три категоріи рѣшеній: для рѣшеній 1-ой категоріи не всѣ числа x^2+3y^2, z^2+3t^2, u^2+3v^2 числа четныя; для рѣшеній 2-ой категоріи, хотя эти числа четныя (дѣлящіяся на 4), но не всѣ дѣлятся на 8; для рѣшеній 3-ей категоріи всѣ упомянутыя числа дѣлятся на 8. Первая категорія содержитъ $\frac{3}{2}P_0(2^\alpha m)$ рѣшеній, вторая $\frac{27}{2}P_0(2^{\alpha-2}m)$ рѣшеній и третья $P(2^{\alpha-2}m)$ рѣшеній. Такимъ образомъ

$$P(2^\alpha m)=P(2^{\alpha-2}m)+\frac{3}{2}P_0(2^\alpha m)+\frac{27}{2}P_0(2^{\alpha-2}m);\quad \alpha\geqq 3. \tag{2}$$

Это равенство приводитъ всю задачу къ опредѣленію $P(m)$, $P(2m)$, $P(4m)$. Что касается $P(2m)$, то

$$P(2m)=\frac{3}{2}P_0(2m),$$

такъ какъ нѣтъ рѣшеній 2-ой и третьей категоріи. Въ частности для m не дѣлящагося на 3 будетъ

$$P(2m)=3\left[3+\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2;\quad m=d\delta.$$

Для опредѣленія $P(m)$ разсмотримъ уравненіе

$$4m=x^2+3y^2+z^2+3t^2+u^2+3v^2.$$

Число рѣшеній его, гдѣ x^2+3y^2 и z^2+3t^2 нечетныя, есть $\frac{1}{2}P_0(4m)$; отсюда нетрудно заключить, что число рѣшеній, гдѣ x и y нечетныя, а z и t четныя, равно $\frac{1}{4}P_0(4m)$. Пусть среди этихъ рѣшеній будетъ S такихъ, гдѣ $z^2+3t^2\equiv 4 \pmod 8$, и T такихъ, гдѣ $z^2+3t^2\equiv 0 \pmod 8$, такъ что

$$S+T=\frac{1}{4}P_0(4m). \tag{a}$$

Нетрудно видѣть, что $\frac{1}{6}S$ есть число рѣшеній уравненія

$$m=x^2+3y^2+z^2+3t^2+u^2+3v^2,$$

гдѣ x^2+3y^2 и z^2+3t^2 нечетныя, и $\frac{1}{2}T$ число рѣшеній того же уравненія, гдѣ x^2+3y^2 нечетное, а z^2+3t^2 четное. Полное число рѣшеній $P(m)$ будетъ

$$P(m)=\frac{3}{2}T+\frac{1}{6}S.$$

Для полнаго опредѣленія S и T недостаетъ одного уравненія; чтобы получить его, обращаемся къ формулѣ (VII) § 1. Беря въ ней $F(x)=x$ выведемъ, во-первыхъ, соотношеніе

$$\sum(-1)^{s+t}d=\frac{1}{2}\sum i^2; \qquad (\mathfrak{b})$$

здѣсь первая сумма распространяется на всѣ представленія m въ формѣ

$$m=s^2+3t^2+d\delta; \quad \delta \text{ неч.},$$

вторая же—на всѣ рѣшенія уравненія $m=i^2+3j^2$. Во-вторыхъ, выведемъ соотношеніе

$$\sum(-1)^{s+t}d=\frac{1}{2}\sum j^2, \qquad (\mathfrak{c})$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m=3t^2+s^2+3d\delta; \quad \delta \text{ неч.},$$

вторая—на всѣ рѣшенія уравненія $m=i^2+3j^2$. Обозначивъ черезъ $\bar\zeta(n)$ сумму нечетныхъ дѣлителей n и черезъ 2^α наивысшую степень 2, дѣлящую d (въ обоихъ случаяхъ), напишемъ равенства ($\mathfrak{b}$) и ($\mathfrak{c}$) такъ

$$\sum(-1)^{s+t}2^\alpha\bar\zeta(m-s^2-3t^2)=\frac{1}{2}\sum i^2\ldots(\mathfrak{b}^*); \quad s^2+3t^2<m$$

$$\sum(-1)^{s+t}2^\alpha\bar\zeta\left(\frac{m-s^2-3t^2}{3}\right)=\frac{1}{2}\sum j^2\ldots(\mathfrak{c}^*); \quad s^2+3t^2<m,$$

если согласимся полагать $\bar\zeta\left(\frac{n}{3}\right)=0$, когда n на 3 не дѣлится. Замѣтимъ теперь, что при всякомъ n разность $\bar\zeta(n)-3\bar\zeta\left(\frac{n}{3}\right)$ равна суммѣ нечетныхъ дѣлителей n, не дѣлящихся на 3; обозначивъ эту сумму черезъ $\varphi(n)$, изъ ($\mathfrak{b}^*$) и ($\mathfrak{c}^*$) получимъ

$$\sum(-1)^{s+t}2^\alpha\varphi(m-s^2-3t^2)=\frac{1}{2}\sum(i^2-3j^2) \qquad (\mathfrak{d})$$

На основаніи доказаннаго въ § 5 $\varphi(n)$ равно $\frac{1}{4}$ числа рѣшеній уравненія

$$n=x^2+3y^2+z^2+3t^2,$$

если n нечетное, и $2^\alpha\varphi(n)$ равно $\frac{1}{2}$ числа рѣшеній уравненія

$$2^\alpha n=x^2+3y^2+z^2+3t^2; \quad n \text{ неч.},$$

гдѣ x и y разной четности. Послѣ этого ясно, что при выше принятыхъ обозначеніяхъ равенство (d) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{1}{2}T-\frac{1}{6}S=\sum(i^2-3j^2). \tag{e}$$

Изъ (a) и (e) найдемъ S и T:

$$S=\frac{3}{16}P_0(4m)-\frac{3}{2}\tau;\quad T=\frac{1}{16}P_0(4m)+\frac{3}{2}\tau;$$
$$\tau=\sum(i^2-3j^2);\quad m=i^2+3j^2$$

и потомъ получимъ

$$P(m)=\frac{1}{8}P_0(4m)+2\tau.$$

Для недѣлящагося на 3 числа m

$$P(m)=\left[3-\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2+2\tau.$$

Остается опредѣлить $P(4m)$. Третьей категоріи рѣшеній въ этомъ случаѣ нѣтъ; число же рѣшеній 2-й категоріи будетъ, какъ легко видѣть,

$$\frac{9}{2}T+\frac{9}{2}S=\frac{9}{8}P_0(4m)$$

и потому полное число рѣшеній есть

$$P(4m)=\frac{21}{8}P_0(4m).$$

Въ случаѣ не дѣлящагося на 3 числа m

$$P(4m)=21\left[3-\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

§ 17. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+5t^2$.

Для опредѣленія числа представленій формой $x^2+y^2+z^2+5t^2$ слѣдуетъ прежде всего опредѣлить число представленій какого угодно числа совокупностью двухъ формъ x^2+5y^2 и $2x^2+2xy+3y^2$ опредѣлителя—5. Этого мы достигнемъ частью на основаніи доказанныхъ въ § 7 результатовъ, частью воспользовавшись равенствомъ (4) § 15. Введемъ предварительно слѣдующее обозначеніе:

$$g(m)=\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{5}\right)=\sum\left(\frac{-5}{d}\right),$$

гдѣ сумма берется по дѣлителямъ нечетнаго числа m. Затѣмъ въ упомянутомъ выше равенствѣ, считая m не дѣлящимся на 5, положимъ

$$f(x) = 1 + 4\cos\frac{2\pi x}{5};$$

если примемъ во вниманіе, что $f(x) = 5$, когда x дѣлится на 5 и $f(x) = \sqrt{5}\left(\frac{x}{5}\right)$, когда x не дѣлится на 5, и что для всякаго нечетнаго n

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} f(d) = 5\varrho\left(\frac{n}{5}\right) + \sqrt{5}\, g(n); \quad n = d\delta,$$

то послѣ отдѣленія раціональныхъ и ирраціональныхъ членовъ получимъ:

$$\sum \varrho(m')\varrho(m'') + \sum g(m')g(m'') - 2\sum \varrho(m'')\varrho\left(\frac{m'}{5}\right) = 2^\alpha \zeta(m). \tag{1}$$

$$5\sum g(m')\varrho\left(\frac{m''}{5}\right) - \sum g(m')\varrho(m'') = (-1)^\alpha 2^{\alpha-1}\sum d\left(\frac{d}{5}\right); \quad m = d\delta. \tag{2}$$

$$2^\alpha m = m' + m''; \quad m' \text{ и } m'' \text{ нечетныя} > 0.$$

Если въ равенствѣ (1) будемъ считать $\alpha = 1$ и замѣтимъ, что

$$\sum \varrho(m')\varrho(m'') = \zeta(m),$$

то получимъ

$$\sum g(m')g(m'') = \zeta(m) + 2\sum \varrho(m')\varrho\left(\frac{m''}{5}\right). \tag{a}$$

Здѣсь сумма $\sum \varrho(m')\varrho\left(\frac{m''}{5}\right)$ равна $\frac{1}{16}$ числа рѣшеній уравненія

$$2m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

гдѣ x и y разной четности. Если это число обозначимъ черезъ P, то

$$8\sum g(m')g(m'') = 8\zeta(m) + P \tag{a*}$$

То-же число P будетъ числомъ рѣшеній уравненія

$$4m = \xi^2 + 5\eta^2 + \zeta^2 + 5\theta^2,$$

гдѣ ξ, η, ζ, θ нечетныя, а это число въ свою очередь равно числу рѣшеній уравненія

$$2m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

гдѣ y и t нечетныя, въ чемъ убѣждаемся, положивъ $\xi+\eta=2n$, $\xi-\eta=2p$, $\zeta+\theta=2q$, $\zeta-\theta=2r$ и замѣтивъ, что форма (3,—4, 3) эквивалентна формѣ (2, 1, 3). Нетрудно также видѣть, что $\frac{1}{2}P$ есть число рѣшеній уравненія

$$2m=x^2+y^2+5z^2+5t^2,$$

гдѣ x и z одной четности. Въ § 7 было доказано, что полное число рѣшеній этого уравненія есть $4\zeta(m)$; поэтому сумма $4\zeta(m)+\frac{1}{2}P$ можетъ быть изображена такъ

$$4\zeta(m)+\frac{1}{2}P=N(2m=\underset{x+y\ \text{неч.}}{x^2+5y^2}+z^2+5t^2)+$$
$$+N(2m=2x^2+2x\underset{y\ \text{неч.}}{y}+3y^2+2z^2+2zt+3t^2),$$

что даетъ возможность истолковать равенство (a*) такъ. Если для нечетнаго m обозначимъ черезъ $G(m)$ число представленій совокупностью формъ (1, 0, 5) и (2, 1, 3), то

$$4\sum g(m')g(m'')=\sum G(m')G(m'');\quad 2m=m'+m''.$$

Это равенство позволяетъ по индукціи заключить, что

$$G(m)=2g(m).$$

Замѣтимъ, что формы x^2+5y^2 и $2x^2+xy+y^2$ способны представлять числа только одной изъ слѣдующихъ линейныхъ формъ: $20h+1$, $20h+9$, $20h+3$, $20h+7$. Среди этихъ чиселъ числа вида $20h+1$, $20h+9$ могутъ представляться только формой x^2+5y^2, а числа вида $20h+3$, $20h+7$—только формой $2x^2+2xy+3y^2$.

Имѣя въ виду ариѳметическое значеніе числовой функціи $g(m)$, нетрудно будетъ вывести изъ равенства (2) полезныя для насъ слѣдствія. Именно, если въ случаѣ $\alpha=1$ обозначимъ черезъ R и S числа рѣшеній уравненій

$$2m=x^2+y^2+z^2+5t^2 \tag{b}$$

$$2m=x^2+5y^2+5z^2+5t^2 \tag{c}$$

гдѣ $x+y$ нечетное, то изъ (2) получимъ

$$5S-R=-8\sum d\left(\frac{d}{5}\right)=-8\left(\frac{m}{5}\right)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d,\quad m=d\delta. \tag{d}$$

Нетрудно убѣдится, что полныя числа рѣшеній $N(2m)$ и $M(2m)$ тѣхъ же уравненій (b) и (c) будутъ:

$$N(2m) = \frac{3}{2} R, \quad M(2m) = \frac{3}{2} S,$$

такъ что получится

$$5M(2m) - N(m) = -12 \left(\frac{m}{5}\right) \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d. \tag{d*}$$

Если $m \equiv \pm 1 \pmod{10}$, то очевидно $M(2m) = 0$ и

$$N(2m) = 12 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Въ случаѣ $m \equiv \pm 2 \pmod{10}$ изъ доказаннаго въ § 7 равенства

$$N(n = x^2 + 5y^2 + 5z^2) = \frac{1}{3} N(n = x^2 + y^2 + z^2); \quad n \equiv \pm 1 \pmod{5}$$

сразу получается $M(2m) = \frac{1}{3} N(2m)$ и

$$N(2m) = 18 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Въ обоихъ случаяхъ можно написать

$$N(2m) = 3\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d. \tag{3}$$

Если при $\alpha > 1$ обозначимъ черезъ R и S числа рѣшеній уравненій

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$

$$2^\alpha m = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$

гдѣ $x + y$ нечетное, то изъ (2) получимъ

$$5S - R = (-1)^\alpha 2^{\alpha+2} \sum \left(\frac{d}{5}\right) d. \tag{e}$$

Но R и S будутъ также числами рѣшеній уравненій

$$2^{\alpha+1} m = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$

$$2^{\alpha+1} m = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

гдѣ x, y, z, t нечетныя. Отсюда можно вывести, что $S=0$, когда въ случаѣ $m\equiv\pm 1 \pmod{10}$ α четное, а въ случаѣ $m\equiv\pm 3 \pmod{10}$ α нечетное; въ другихъ же случаяхъ $S=\frac{1}{3}R$. Вслѣдствіе этого изъ (е) найдемъ

$$R=2^{\alpha}\left\{5+(-1)^{\alpha-1}\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d. \tag{4}$$

Въ уравненіи

$$2^{\alpha}m=x^2+y^2+z^2+5t^2,$$

полное число рѣшеній котораго пусть будетъ $N(2^{\alpha}m)$, при $\alpha>2$ всѣ числа x, y, z, t четныя или нечетныя; имѣя это въ виду, мы получимъ на основаніи формулы (4)

$$N(2^{\alpha}m)-N(2^{\alpha-2}m)=2^{\alpha-1}\left\{5+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d. \tag{5}$$

Это соотношеніе позволяетъ найти $N(2^{\alpha}m)$, если только будутъ извѣстны $N(4m)$ и $N(2m)$. Послѣднее число уже опредѣлено, и остается найти лишь $N(4m)$. Но можно сразу замѣтить, что $N(4m)=N(m)$. Для опредѣленія же числа рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+5t^2$$

придется прибѣгнуть къ общей формулѣ Ліувилля, которой еще не приходилось пользоваться.

Если $f(x)$ четная функція, то

$$2\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}}(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\{f(d'-d'')+f(d'+d'')\}+$$
$$+\sum\{f(0)-2f(2)+2f(4)-\ldots+2(-1)^{\frac{d-1}{2}}f(d-1)\}=f(0)\zeta(m); \tag{6}$$

здѣсь первая сумма распространяется на всѣ представленія m въ формѣ

$$m=d'\delta'+2^{\alpha}d''\delta'',$$

гдѣ d', δ', d'', δ'' нечетныя и показатель $\alpha>0$, вторая сумма берется по дѣлителямъ m. Полагая опять $f(x)=1+4\cos\frac{2\pi x}{5}$ и отдѣляя раціональную и ирраціональную части, получимъ

$$5\sum g(m')\varrho\left(\frac{m''}{5}\right)+5\sum g(m'')\varrho\left(\frac{m'}{5}\right)-$$
$$-\sum\varrho(m')g(m'')-\sum\varrho(m'')g(m')+g(m)-\varrho(m)=0. \tag{7}$$

Это равенство можетъ быть истолковано такъ. Если обозначимъ черезъ P, Q, R, S числа всѣхъ рѣшеній уравненій

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$
$$m = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + t^2$$
$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$
$$m = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$

то

$$5Q + 5S - P - R = 0. \qquad \text{(f)}$$

Значенія R и S опредѣлить нетрудно; именно ясно что

$$R = N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2); \qquad x \equiv y \pmod 2$$
$$S = N(2m = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + t^2); \qquad x \equiv y \pmod 2$$

или на основаніи ранѣе доказаннаго

$$R = \left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d, \qquad S = \frac{1 - \left(\frac{m}{5}\right)}{6} R$$

и кромѣ того

$$Q = \frac{1 + \left(\frac{m}{5}\right)}{6} P.$$

Послѣ этого изъ (f) найдемъ

$$P = N(m) = \left[5 + \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Опредѣливъ $N(m) = N(4m)$, можно на основаніи формулы (5) получить общее выраженіе

$$N(2^\alpha m) = \frac{2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha-1} 5}{3} \left[5 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d \qquad (8)$$

годное для $\alpha > 0$ и m не дѣлящагося на 5. Остается теперь найти соотношеніе между $N(5^\beta n)$ и $N(n)$, гдѣ n четное или нечетное число, не дѣлящееся на 5. Въ уравненіи

$$5^\beta n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2 \qquad \text{(g)}$$

можно различать рѣшенія (число ихъ пусть будетъ P), гдѣ x, y, z дѣлятся на 5, и рѣшенія (число ихъ пусть будетъ Q), гдѣ только одно изъ чиселъ x, y, z дѣлится на 5. Среди послѣднихъ будетъ $\frac{1}{6} Q$ такихъ, гдѣ $z \equiv 0 \pmod 5$ и $x + 2y \equiv 0 \pmod 5$. Всего рѣшеній уравненія (g), удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ будетъ $\frac{1}{6}Q+P$; но это число будетъ также числомъ рѣшеній уравненія

$$5^{\beta-1}n = x^2+y^2+z^2+5t^2.$$

Такимъ образомъ

$$N(5^{\beta-1}n) = \frac{1}{6}Q+P.$$

Но P будетъ числомъ рѣшеній уравненія $5^{\beta-1}m = 5x^2+5y^2+5z^2+t^2$, т. е. $P = N(5^{\beta-2}n)$ при $\beta \geqq 2$ и $P = \frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{n}{5}\right)\right]N(n)$ при $\beta = 1$, слѣдовательно

$$N(5^{\beta-1}n) = \frac{1}{6}Q + N(5^{\beta-2}n) \text{ при } \beta \geqq 2$$

$$N(5n) = \frac{1}{6}Q + \frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{n}{5}\right)\right]N(n).$$

Такъ какъ съ другой стороны

$$N(5^{\beta}n) = P+Q,$$

то будемъ имѣть

$$N(5^{\beta}n) = 6N(5^{\beta-1}n) - 5N(5^{\beta-2}n) \text{ при } \beta \geqq 2$$

и

$$N(5n) = \frac{5^2+\left(\frac{n}{5}\right)}{5+\left(\frac{n}{5}\right)}N(n).$$

Затѣмъ найдемъ вообще

$$N(5^{\beta}n) = \frac{5^{\beta+1}+\left(\frac{n}{5}\right)}{5+\left(\frac{n}{5}\right)}N(n)$$

и, на основаніи формулы (8),

$$N(5^{\beta}2^{\alpha}m) = \frac{2^{\alpha+1}+(-1)^{\alpha-1}5}{3}\left[5^{\beta+1}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d; \quad m = d\delta, \tag{9}$$

гдѣ $\beta \geqq 0$, $\alpha > 0$ и m нечетное число, не дѣлящееся на 5. Для случая $\alpha = 0$ имѣемъ

$$N(5^{\beta}m) = \left[5^{\beta+1}+\left(\frac{m}{5}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d. \tag{10}$$

Равенства (9) и (10) вполнѣ разрѣшаютъ поставленный вопросъ.