О сходимости рядовъ Sturm'a-Liouville'я и Legendre'a.

И. И. Привалова.

Въ послѣдніе годы для рядовъ по ортогональнымъ функціямъ установленъ рядъ достаточныхъ признаковъ сходимости почти всюду [1]), болѣе и болѣе общихъ. Самый общій изъ нихъ далъ Planckerel въ 1913 г. въ своемъ сообщеніи Французской Академіи [2]).

Теорема Planckerel'я: если функціи $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ образуютъ нормально-ортогональную систему въ интервалѣ (a, b), т. е.

$$\int_v^b \varphi_n^2(\alpha)\, d\alpha = 1\,; \qquad \int_a^b \varphi_n(\alpha)\, \varphi_m(\alpha)\, d\alpha = 0 \quad (n \neq m)$$

если далѣе, дѣйствительныя постоянныя C_n таковы, что

$$\sum_1^\infty C_n^2 (\log n)^3$$

сходится, то рядъ

$$\sum_1^\infty C_n\, \varphi_n(x)$$

сходится почти всюду въ интервалѣ (a, b).

Въ частности для тригонометрическихъ рядовъ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Hardy [3]) обобщилъ признакъ Planckerel'я, показавъ, что для сходимости почти всюду такого ряда достаточно сходимости

$$\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) . (\log n)^2 .$$

---

[1]) Presque partout (за исключеніемъ, быть можетъ, точекъ множества мѣры 0).

[2]) Comptes Rendus t. 156.

[3]) Proc. Lond. Math. Soc. t. 12.

Цѣль настоящей статьи въ томъ, чтобы распространить признакъ Hardy на ряды Sturm'a-Liouville'я и Legendre'a. Сначала мы установимъ одно вспомогательное предложеніе.

Лемма. *Рядъ* $\sum_1^\infty \frac{a_n}{\varphi(n)}$, *гдѣ* $\varphi(n)$ *какая нибудь возрастающая до безконечности положительная функція, сходится, если онъ суммируется процессомъ среднихъ ариѳметическихъ, при условіи*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0\,(\varphi(n))\ ^{1}).$$

Доказательство. Называя черезъ σ_n, Σ_n простую и средне-ариѳметическую суммы первыхъ n членовъ ряда $\sum_1^\infty \frac{a_n}{\varphi(n)}$, имѣемъ тождественно:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right).\sigma_n - \Sigma_n = \frac{\sum_1^n \frac{ka_k}{\varphi(k)}}{n}.$$

Отсюда ясно, что достаточно показать справедливость соотношенія:

$$\sum_1^n \frac{ka_k}{\varphi(k)} = 0\,(n),$$

въ чемъ мы убѣдимся слѣдующимъ образомъ [2]):

$$\sum_1^n \frac{ka_k}{\varphi(k)} = \sum_1^{n-1} S_k.\Delta \frac{k}{\varphi(k)} + \frac{nS_n}{\varphi(n)} = \sum_1^{n-1} 0\,(\varphi(n)).\,O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) + 0\,(n) =$$

$$= \sum_1^{n-1} 0\,(1) + 0\,(n) = 0\,(n),$$ что и нужно.

Къ системѣ функцій Sturm'a-Liouville'я мы приходимъ изъ такъ называемой проблемы собственныхъ значеній дифференціальныхъ уравненій. Эта проблема заключается въ томъ, чтобы опредѣлить тѣ значенія параметра λ, при которыхъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d}{dx}\left(p\,(x)\cdot\frac{du}{dx}\right) + q\,(x).u + \lambda u = 0 \qquad [p(x)>0] \qquad (1)$$

имѣетъ единственное рѣшеніе, выполняющее на концахъ однородныя условія, напр. $\frac{du}{dx} - hu = 0$ для $x = a$; $\frac{du}{dx} + Hu = 0$ для $x = b$.

---

[1]) Условно обозначаемъ черезъ $0(A)$ количество, удовлетворяющее равенству: $\frac{0\,(A)}{A} \to 0$, когда $n \to \infty$

[2]) Обозначаемъ черезъ $O(A)$ количество, удовлетворяющее условію: $O\,|(A)| < C.A$, каково бы ни было n, гдѣ C не зависитъ отъ n.

Доказывается, что если функціи $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяютъ опредѣленнымъ условіямъ непрерывности, то существуетъ всегда счетное множество значеній λ_n параметра и что соотвѣтствующія рѣшенія $u_n(x)$ дифференціальнаго уравненія (1) образуютъ полную нормально-ортогональную систему функцій въ интервалѣ (a, b).

Разсмотримъ рядъ Sturm'a-Liouville'я

$$\sum_1^{\infty} C_n u_n(x), \tag{I}$$

гдѣ

$$C_n = \int_a^b f(\alpha)\, u_n(\alpha)\, (d\alpha) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\dots),$$

при чемъ $f(x)$ любая ф-ція, интегрируемая по Lebesgue'у въ интервалѣ (a, b).

Приложимъ обычное въ теоріи этой системы преобразованіе Liouville'я:

$$z = \int_a^x [p(\alpha)]^{-\frac{1}{2}} d\alpha; \qquad v(z) = [p(x)]^{\frac{1}{4}} u(x).$$

Дифференціальное уравненіе (1) переходитъ въ новое дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + Q(z).v + \lambda v = 0 \tag{1'}$$

гдѣ $Q(z)$ означаетъ функцію, просто выражаемую черезъ $p(x)$ и $q(x)$.

Новыя граничныя условія будутъ:

$$\frac{dv}{dz} - h'v = 0 \qquad \text{для} \quad z = 0;$$

$$\frac{dv}{dz} + H'v = 0 \qquad \text{для} \quad z = \pi,$$

если для простоты примемъ

$$\int_a^b [p(\alpha)]^{-\frac{1}{2}} d\alpha = \pi,$$

что всегда можетъ быть достигнуто умноженіемъ независимаго перемѣннаго на постоянное; h' и H' суть два постоянныя, получающіяся изъ первоначальныхъ h и H.

Обозначимъ функціи Sturm'a-Liouville'я для дифференціальнаго уравненія (1') черезъ $v_1(z)$, $v_2(z), \dots, v_n(z)\dots$ и воспользуемся извѣстнымъ ихъ асимптотическимъ выраженіемъ, предполагая, что

$$\int_0^{\pi} v_n^2(z)\, dz = 1.$$

Согласно этимъ формуламъ въ каждой точкѣ интервала $(0, \pi)$ имѣемъ:

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \left\{1 + \frac{\alpha_n(z)}{n^2}\right\} + \sin nz \left\{\frac{\beta(z)}{n} + \frac{\gamma_n(z)}{n^2}\right\}, \tag{2}$$

гдѣ функціи $\alpha_n(z)$, $\gamma_n(z)$ и $\beta(z)$ по абсолютному значенію меньше постояннаго A, не зависящаго отъ n и z.

Вопросъ изученія ряда (I) сводится къ изученію преобразованнаго ряда

$$\sum_1^\infty C'_n v_n(z), \tag{I'}$$

гдѣ

$$C'_n = \int_0^\pi F(\alpha) v_n(\alpha) d\alpha,$$

при чемъ

$$F(z) = [p(x)]^{\frac{1}{4}} \cdot f(x).$$

Полагая $v_1(z) v_1(\alpha) + v_2(z) v_2(\alpha) + \ldots + v_n(z) v_n(\alpha) = K_n(z, \alpha)$, для суммы $S_n(z)$ первыхъ n членовъ ряда (I′) будемъ имѣть:

$$S_n(z) = \int_0^\pi K_n(z, \alpha) F(\alpha) d\alpha.$$

Пользуясь формулой (2), положимъ:

$$K_n(z, \alpha) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos pz \cos p\alpha\right] + \Phi_n(z, \alpha), \tag{3}$$

гдѣ $|\Phi_n(z, \alpha)| < C$, не зависящаго отъ α, z, и n.

Докажемъ, что въ каждой точкѣ z интервала $(0, \pi)$ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi \Phi_n(z, \alpha) F(\alpha) d\alpha = 0, \tag{4}$$

гдѣ $F(\alpha)$ любая функція интегрируемая по Lebesgue'у [1]).

Сначала легко видѣть, что равенство (4) справедливо, если предположить функцію $F(z)$ аналитической. Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ функція $F(z)$ разлагается въ равномѣрно сходящійся рядъ какъ по системѣ 1, $\cos z$, $\cos 2z, \ldots$, такъ и по системѣ $v_1(z)$, $v_2(z), \ldots$ Вслѣдствіе этого получаемъ желаемое, переходя къ предѣлу при $n = \infty$ въ равенствѣ:

$$\int_0^\pi \Phi_n(z, \alpha) F(\alpha) d\alpha = \int_0^\pi K_n(z, \alpha) F(\alpha) d\alpha - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \cos pz \cos p\alpha\right] F(\alpha) d\alpha.$$

---

[1]) Haar, Math. Ann. t. 69.

Пусть теперь $F(z)$ любая функція интегрируемая по Lebesgue'у. Возможно построить послѣдовательность аналитическихъ функцій $F_1(z), F_2(z), \ldots$ такую, чтобы

$$\lim_{p=\infty}\int_0^\pi |F(\alpha)-F_p(\alpha)|\,d\alpha=0.$$

Тогда для каждаго p будетъ

$$\left|\int_0^\pi \Phi_n(z,\,\alpha)F(\alpha)d\alpha\right| \leq C\int_0^\pi |F(\alpha)-F_p(\alpha)|\,d\alpha+\left|\int_0^\pi \Phi_n(z,\,\alpha)F_p(\alpha)\,d\alpha\right|$$

откуда очевидно равенство (4).

Изъ тождества (3) въ силу теоремы Lebesgue'а о тригонометрическихъ рядахъ и только что установленнаго равенства (4) вытекаетъ:

Теорема I. *Рядъ (I) Sturm'a-Liouville'я суммируется процессомъ среднихъ ариѳметическихъ почти всюду въ интервалѣ (a, b) къ $f(x)$.*

Hardy въ цитированной выше работѣ доказалъ для тригонометрическаго ряда Fourier-Lebesgue'а справедливость соотношенія:

$$S_n(x)=0(\log n),\qquad \text{почти всюду},$$

гдѣ $S_n(x)$ сумма первыхъ $n+1$ членовъ тригонометрическаго ряда. Вслѣдствіе тождества (3), установленнаго равенства (4) и только что упомянутаго результата Hardy имѣемъ:

$$S_n(x)=0(\log n),\qquad \text{почти всюду въ } (a,\,b),$$

обозначая черезъ $S_n(x)$ сумму первыхъ n членовъ ряда (I).

Отсюда, пользуясь леммой, беря $\varphi(n)=\log n$, и теоремой I, получаемъ:

Теорема II. *Рядъ $\sum\limits_2^\infty \frac{C_n}{\log n}\,.\,U_n(x)$ сходится почти всюду въ (a, b).*

Слѣдствіе. *Если $\sum\limits_1^\infty C_n^2(\log n)^2$ сходится, то рядъ Sturm'a-Liouville'я $\sum\limits_1^\infty C_n\,U_n(x)$ сходится почти всюду въ интервалѣ $(a,\,b)$ къ $f(x)$.*

Въ самомъ дѣлѣ рядъ $\sum\limits_1^\infty C_n\,.\log.\,U_n(x)$ по условію есть рядъ Fourier отъ функціи интегрируемой вмѣстѣ съ квадратомъ [1]), а потому вслѣдствіе теоремы II рядъ $\sum\limits_1^\infty C_n U_n(x)$ сходится почти всюду въ (a, b). Далѣе такъ какъ система $U_n(x)$ полная, то послѣдній рядъ изображаетъ функцію $f(x)$.

---

[1]) Теорема Fischer'a-Riesz'a.

Обратимся теперь къ изслѣдованію ряда Legendre'a [1]):

$$\sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} C_n P_n(x)\,, \qquad \text{(II)}$$

гдѣ

$$C_n = \int_1^\pi f(\alpha)\, P(x)\, d\alpha \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

при чемъ ф-ція $f(\alpha)$ интегрируема по Lebesgue'у въ интервалѣ $(-1, +1)$.

Теорема III. *Если* $\sum\limits_1^\infty \frac{2n+1}{2} C_n^2 (\log n)^2$ *сходится, то рядъ (II) Legendre'a* $\sum\limits_0^\infty \frac{2n+1}{2} C_n P_n(x)$ *сходится почти всюду въ интервалѣ* $(-1, +1)$ *къ* $f(x)$.

Полагая

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,.\,P_n(x) = \Pi_n(x)$$

и

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,.\,C_n = C'_n$$

рядъ (II) преобразуетъ въ рядъ

$$\sum_0^\infty C'_n\,.\,\Pi_n(x), \qquad \text{(II')}$$

гдѣ

$$C'_n = \int_{-1}^{+1} f(\alpha)\,.\,\Pi_n(\alpha)\, d\alpha$$

и система ф-цій $\Pi_n(x)$ нормально ортогональная въ интервалѣ $(-1, +1)$.

Рядъ (II'), а слѣдовательно рядъ (II), будетъ суммироваться процессомъ среднихъ ариѳметическихъ почти всюду въ области $(-1, +1)$, вслѣдствіе признака Weyl'я [2]). Въ силу леммы для теоремы III достаточно доказать, что $S_n(x) = 0(\log n)$, почти всюду въ $(-1, +1)$, гдѣ $S_n(x)$ сумма первыхъ n членовъ ряда

$$\sum_1^\infty C'_n \log n\,.\,\Pi_n(x)\,.$$

Такъ какъ, далѣе,

$$\sum_1^\infty C'^2_n (\log n)^2$$

---

[1]) $\int_{-1}^{+1} P_n(\alpha)\, P_m(\alpha)\, d\alpha = 0 \ (m \neq n) \qquad \int_{-1}^{+1} P_n^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{2}{2n+1}.$

[2]) Признакъ Weyl'я: если рядъ $\sum\limits_1^\infty C_n^2 \cdot \log n$ сходится, то рядъ по нормально ортогональной системѣ $\sum\limits_1^\infty C_n \varphi_n(x)$ суммируется процессомъ среднихъ ариѳметическихъ почти всюду.

по условію теоремы сходится, то (по теоремѣ Fischer-Riesz'a) рядъ

$$\sum_1^\infty C'_n \log . \Pi_n(x)$$

есть рядъ Fourier отъ функціи съ интегрируемымъ квадратомъ. Итакъ теорема III будетъ доказана, если установимъ соотношеніе:

$$S_n(x) = 0\,(\log n)\,,$$

почти всюду въ $(-1, +1)$, обозначая черезъ $S_n(x)$ сумму первыхъ $n+1$ членовъ любого ряда (II) Legendre'a отъ ф-ціи съ интегрируемымъ квадратомъ. Дальнѣйшее будетъ посвящено доказательству этого равенства.

Представимъ

$$S_n(x) = \int_{-1}^{+1} S_n(x,\ \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\,,$$

гдѣ

$$S_n(x,\ \alpha) = \sum_0^n \frac{2k+1}{2} P_k(x) P_k(\alpha),$$

въ видѣ суммы трехъ слагаемыхъ

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{1}\,,$$

при чемъ $\varepsilon > 0$, малое по желанію постоянное число. Въ дальнѣйшемъ будемъ разсматривать значенія x подъ условіемъ $-1 + a \leq x \leq 1 - a$ $(a > 0)$. Прежде всего покажемъ, что

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} f(\alpha) S_n(x,\ \alpha)\, d\alpha = O(1)$$

и

$$\int_{x+\varepsilon}^{1} f(\alpha) S_n(x,\ \alpha)\, d\alpha = O(1) \tag{5}$$

Съ этой цѣлью приложимъ извѣстную формулу Christoffel'я:

$$S_n(x,\ \alpha) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(x) P_n(\alpha) - P_n(x) P_{n+1}(\alpha)}{\alpha - x} \tag{6}$$

Такъ какъ въ интервалахъ $(-1\,,\ x-\varepsilon)$ и $(x+\varepsilon\,,\ 1)$ разность $|\alpha - x| \geq \varepsilon$, то находимъ:

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} |f(\alpha) S_n(x,\ \alpha)|\, d\alpha \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{n+1}{2} \left\{ |P_{n+1}(x)| \int_{-1}^{x-\varepsilon} |f(\alpha) P_n(\alpha)|\, d\alpha + |P_n(x)| . \int_{-1}^{x-\varepsilon} |f(\alpha) P_{n+1}(\alpha)|\, d\alpha \right\} \tag{7}$$

и аналогичное неравенство для $\int_{x+\varepsilon}^{1}$.

Такимъ образомъ оба интеграла (7) при каждомъ n меньше

$$\frac{n+1}{2\varepsilon}\left\{|P_{n+1}(x)|.\int_{-1}^{+1}|f(\alpha)P_n(\alpha)|\,d\alpha+|P_n(x)|\int_{-1}^{+1}f(\alpha)P_{n+1}(\alpha)|\,d\alpha\right\}$$

Изъ неравенства Schwarz'а заключаемъ

$$\int_{-1}^{+1}|f(\alpha)P_n(\alpha)|\,d\alpha\leq\sqrt{\int_{-1}^{+1}f^2(\alpha)\,d\alpha.\int_{-1}^{+1}P_n^2(\alpha)\,d\alpha}=\sqrt{k.\frac{2}{2n+1}}.$$

обозначая

$$\int_{-1}^{+1}f^2(\alpha)\,d\alpha$$

черезъ k.

Приложимъ, далѣе хорошо извѣстную асимптотическую формулу полиномовъ Legendre'а, гдѣ x замѣняемъ черезъ $\cos t$

$$P_n(x)=\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin t}}\left[\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\beta_n(t)}{n}\right]\tag{8}$$

которая справедлива для каждой внутренней точки x интервала $(-1, +1)$. Числа $\beta_n(t)$ для любого n по абсолютному значенію остаются меньше β; слѣдовательно

$$|P_n(x)|\leq\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin t}}\left[1+\frac{\beta}{n}\right]$$

и поэтому оба интеграла (7) меньше

$$\frac{n+1}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi\sin t}}\left\{\sqrt{\frac{1}{n+1}}\left(1+\frac{\beta}{n+1}\right)\sqrt{\frac{2k}{2n+1}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\sqrt{\frac{2k}{2n+3}}\right\}$$

Это же послѣднее выраженіе ограничено, каково бы ни было n, такъ какъ въ силу условія $-1+a\leq\cos t\leq 1-a$, $\sin t$ не можетъ быть нулемъ. Итакъ равенства (5) установлены. Остается изслѣдовать

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}S_n(x,\ \alpha)f(\alpha)\,d\alpha=\int_{t-\varepsilon'}^{t+\varepsilon''}S_n(\cos t,\ \cos u).f(\cos u)\sin u\,du,\tag{9}$$

при чемъ t удовлетворяетъ условію $\eta\leq t\leq\pi-\eta$, а η опредѣлено уравненіемъ: $\cos\eta=1-a\left(0<\eta<\frac{\pi}{2}\right)$.

Такъ какъ ε' и ε'' стремятся къ нулю вмѣстѣ съ ε, то можно ихъ предположить меньше $\frac{\eta}{2}$ и значить $t-\varepsilon'>t-\frac{\eta}{2}$, $t+\varepsilon'<t+\frac{\eta}{2}\leq\pi-\frac{\eta}{2}$; аналогичныя неравенства справедливы съ замѣной ε' черезъ ε''.

Разбивая въ интегралѣ (9) интервалъ интеграціи на части $\left(t-\varepsilon',\ t-\frac{1}{n}\right)$, $\left(t-\frac{1}{n},\ t+\frac{1}{n}\right)$, $\left(t+\frac{1}{n}, t+\varepsilon''\right)$, представимъ его въ видѣ суммы трехъ слагаемыхъ

$$\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}} + \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} + \int_{t+\frac{1}{n}}^{t+\varepsilon''} \tag{9'}$$

$\left(\frac{1}{n} < \varepsilon', \varepsilon''\right.$, считая n достаточно большимъ).

При оцѣнкѣ интеграловъ (9′) воспользуемся снова формулой (8). Легко получаемъ:

$$\begin{aligned} &P_n(\cos t)\,P_{n+1}(\cos u) - P_{n+1}(\cos t)\,P_n(\cos u) = \\ &= \frac{2}{(n+1)\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin t \sin u}}\left[\cos\left(\frac{2n+1}{2}t-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{2n+3}{2}u-\frac{\pi}{4}\right)-\right. \\ &\left.-\cos\left(\frac{2n+3}{2}t-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{2n+1}{2}u-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\frac{M_n}{(n+1)^2\sqrt{\sin t\sin u}}. \end{aligned}$$

гдѣ M_n для $\eta \leq t \leq \pi-\eta$, $\frac{\eta}{2} \leq u \leq \pi - \frac{\eta}{2}$ и каждаго n ограничено по абсолютному значенію ($|M_n| < M$).

Черезъ разложеніе тригонометрическихъ произведеній въ суммы легко оправдываемъ тождество:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{2n+1}{2}t-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{2n+3}{2}u-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{2n+3}{2}t-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{2n+1}{2}u-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin(n+1)(t-u).\sin\frac{t+u}{2}-\cos(n+1)(t+u)\ \sin\frac{t-u}{2} \end{aligned}$$

и вслѣдствіе этого будетъ

$$\begin{aligned} &\frac{n+1}{2}\left[P_n(\cos t)\,P_{n+1}(\cos u) - P_{n+1}(\cos t)\,P_n(\cos u)\right] = \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{\sin t\sin u}}\left[\sin(n+1)(t-u).\sin\frac{t+u}{2}-\cos(n+1)(t+u).\sin\frac{t-u}{2}\right]+ \\ &+\frac{M_n}{2(n+1)\sqrt{\sin t\sin u}}. \end{aligned}$$

Принимая во вниманіе формулу Christoffel'я (6), находимъ далѣе

$$S_n(\cos t,\ \cos u)=\frac{n+1}{2}\,\frac{P_n(\cos t)\,P_{n+1}(\cos u)-P_{n+1}(\cos t)\,P_n(\cos u)}{\cos t-\cos u}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sin t\sin u}}\left[\frac{\cos(n+1)(t+u)}{\sin\frac{t+u}{2}}-\frac{\sin(n+1)(t-u)}{\sin\frac{t-u}{2}}\right]-$$

$$-\frac{M_n}{4(n+1)\sin\frac{t-u}{2}\sin\frac{t+u}{2}\sqrt{\sin t.\sin u}} \qquad (10)$$

Замѣтивъ, что имѣемъ неравенство:

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{\sin t.\sin u}}\cdot\frac{\cos(n+1)(t+u)}{\sin\frac{t+u}{2}}\right|\leq\frac{1}{2\pi\sqrt{\sin\eta\sin u}.\sin\frac{\eta}{2}},$$

такъ какъ $\eta\leq t\leq\pi-\eta$, видимъ, что абсолютное значеніе перваго интеграла (9′) отъ перваго члена формулы (10) меньше

$$\frac{1}{2\pi\sin\frac{\eta}{2}\sqrt{\sin\eta}}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}}\sqrt{\sin u}\,|f_1(u)|\,du=O(1)\quad[f_1(u)=f(\cos u)] \qquad (11)$$

Абсолютное значеніе того же интеграла отъ третьяго члена формулы (10) меньше

$$\frac{M}{4(n+1)\sin\frac{\eta}{2}\sqrt{\sin\eta}}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{\sin u}\,|f_1(u)|\,du}{\sin\frac{t-u}{2}}<\frac{M}{4(n+1)\sqrt{\sin\eta}}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}}\frac{|f_1(u)|\,du}{\sin\frac{t-u}{2}} \qquad (12)$$

Измѣняя въ послѣднемъ интегралѣ формулы (12) u на $t-u$, видимъ, что онъ меньше

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'}\frac{|f_1(t-u)|\,du}{\sin\frac{u}{2}}<\frac{1}{\sin\frac{1}{2n}}\cdot\int_0^{\varepsilon'}|f_1(t-u)|\,du.$$

Подставляя въ формулу (12), получаемъ въ правой части количество вида $O(1)$.(12′).

Наконецъ значеніе перваго изъ интеграловъ ($9'$) отъ второго члена формулы (10) будетъ

$$\frac{1}{2n\sqrt{\sin t}}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}} \frac{f_1(u)\,.\,\sqrt{\sin u}\,.\sin(n+1)(t-u)}{\sin\frac{t-u}{2}}\,du =$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sin t}}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \varphi(t-u)\,\frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du \qquad (13)$$

гдѣ положено для сокращенія $f_1(t-u)\sqrt{\sin(t-u)}=\varphi(t-u)$.

Послѣдній интегралъ (13) представимъ въ видѣ суммы

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \psi(u)\,\frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du+\varphi(t)\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du \qquad (14)$$

$$[\psi(u)=\varphi(t-u)-\varphi(t)].$$

Положимъ $\Psi(\lambda)=\int_0^{\lambda}|\psi(u)|\,du$ и предположимъ для разсматриваамаго значенія t условіе: $\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda}\to 0$, когда $\lambda\to 0$ (A).

Это условіе выполняется, какъ извѣстно, для значеній t почти всюду въ области $\eta\leq t\leq\pi-\eta$. Тогда

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'}\left|\psi(u)\,\frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}}\right|du<\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'}\frac{|\psi(u)|}{\sin\frac{u}{2}}\,du=\left(\Psi(u)\,\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\right)_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'}+$$

$$+\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'}\frac{\Psi(u)\cos\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\frac{du}{\sin\frac{u}{2}}=0(\log n)$$

въ каждой точкѣ, гдѣ выполнено условіе (A). Обращаясь къ (14), видимъ, что это выраженіе будетъ вида $0(\log n)$ для всѣхъ значеній t интервала $\eta\leq t\leq\pi-\eta$, кромѣ, быть можетъ, точекъ множества мѣры 0.

Итакъ, комбинируя (11, $12'$, 13, 14), заключаемъ, что первый изъ интеграловъ ($9'$) вида $0(\log n)$ для всѣхъ значеній t области $\eta\leq t\leq\pi-\eta$, кромѣ, быть можетъ, точекъ множества мѣры нуль.

Совершенно также можно доказать то же самое и для третьяго изъ интеграловъ ($9'$).

Итакъ

$$S_n(x) = S_n(\cos t) = O(\log n) + \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} S_n(\cos t,\ \cos u) . f_1(u) \sin u\, du. \qquad (15)$$

Покажемъ теперь, что послѣднiй интегралъ вида $O(1)$, почти всюду для $\eta \leq t \leq \pi - \eta$.

Вслѣдствiе формулы (8) для $\eta \leq t \leq \pi - \eta$ и $\frac{\eta}{2} \leq u \leq \pi - \frac{\eta}{2}$

$$P_n(\cos t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad P_n(\cos u) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

а потому

$$S_n(\cos t,\ \cos u) = \sum_0^n \frac{2k+1}{2} P_k(\cos t) P_k(\cos u) = O(n).$$

$$\left| \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} (\cos t,\ \cos u) f_1(u) \sin u\, du \right| < O(n) \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} |f_1(u)|\, du.$$

Такъ какъ функцiя $|f_1(u)|$ измѣримая, то существуетъ совершенное множество P мѣры сколь угодно близкой къ π, на которомъ она непрерывна. Пусть t какая либо точка этого множества, удовлетворяющая условiю $\eta \leq t \leq \pi - \eta$. Называя черезъ p отрѣзокъ, отсѣкаемый отъ P неравенствомъ $t - \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{n}$, а черезъ σ дополнительное къ p множество на области $t - \frac{1}{n} \leq u \leq t + \frac{1}{n}$, имѣемъ:

$$O(n) \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} |f_1(u)|\, du = O(n) \int_p |f_1(u)|\, du + O(n) \int_\sigma |f_1(u)|\, du \qquad (16)$$

Введемъ вспомогательную функцiю $\varphi(u)$ по условiямъ:

1°. $\varphi(u) = |f_1(u)|$, когда u принадлежитъ P.

2°. $\varphi(u) = 0$, когда u находится внѣ P.

Вслѣдствiе теоремы Lebesgue'а о неопредѣленномъ интегралѣ, найдемъ:

$$\lim_{\rho - 0} \frac{1}{\rho} \int_t^{1+\frac{1}{\rho}} (|f_1(u)| - \varphi(u))\, du = 0, \quad \text{почти всюду} \quad (17)$$

для $\eta \leq t \leq \pi - \eta$ на множествѣ P.

Пусть t точка множества P, въ которой выполнено равенство (17). Формула (16) представится такъ:

$$O(n) \int_p |f_1(u)|\, du + O(n) \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} (|f_1(u)| - \varphi(u)|\, du$$

Замѣтивъ, что $\int\limits_P |f_1 u)|\,du < K.\frac{2}{n}$, гдѣ $|f_1(u)| < K$ на P, и принимая во вниманіе равенство (17), видимъ, что формула (16) вида $O(1)$, когда t $(\eta \leq t \leq \pi - \eta)$ принадлежитъ P и выполнено условіе (17). Такъ какъ множество P мѣры сколь угодно близкой къ π, то значитъ наше утвержденіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній t, удовлетворяющихъ условію $\eta \leq t \leq \pi - \eta$, кромѣ, быть можетъ, множества точекъ мѣры нуль.

Наконецъ изъ (15) получаемъ:

$$S_n(x) = S_n(\cos t) = 0\,(\log n), \qquad \text{почти всюду}$$

для $-1 + a \leq x \leq 1 - a$. Заставляя a стремиться къ нулю, видимъ, что $S_n(x) = 0\,(\log n)$, почти всюду въ интервалѣ $(-1, +1)$. (ч. т. д.).

Résumé. Le but de ce travail est de démontrer les propositions suivantes:

Theorème I. Si les fonctions $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ forment un système de Sturm-Liouville dans l'intervalle (a, b), si, de plus, les constantes reelles c_n sont telles, que $\sum\limits_1^\infty c_n^2 (\log n)^2$ est convergente, la série $\sum\limits_1^\infty c_n u_n(x)$ est convergente presque partout dans l'intervalle (a, b).

Theorème II. Si les fonctions $P_n(x)$ forment un systeme de Legendre si, de plus, les constantes reelles c_n sont telles que $\sum\limits_1^\infty \frac{2n+1}{2} c_n^2 (\log n)^2$ est convergente, la série $\sum\limits_1^\infty \frac{2n+1}{2} c_n P_n(x)$ est convergente presque partout dans l'intervalle considéré $(-1, +1)$.