С. В. Ковалевская

(въ двадцатипятилѣтнюю годовщину смерти).

Ц. К. Руссьянъ.

Сегодня исполняется печальная двадцатипятилѣтняя годовщина со дня смерти выдающейся, первой среди женщинъ-математиковъ, ученой С. В. Ковалевской.

Хотя научныя заслуги ея давно оцѣнены, припомнимъ однако ихъ еще разъ и воздадимъ должное памяти женщины, вступившей изъ чистой любви къ наукѣ на трудный, тернистый путь ученаго изслѣдователя и пріобрѣтшей себѣ почетную извѣстность въ области столь трудной и столь мало гармонирующей съ женской натурой, какъ математика.

С. В. Ковалевская принадлежитъ къ числу математиковъ, все болѣе и болѣе рѣдко встрѣчающихся, которые чувствуютъ одинаковую склонность какъ къ чистой, такъ и къ прикладной математикѣ: на ряду съ трудными вопросами чистой математики, она занимается сложными задачами физики, механики. Научная слава ея основывается на трудахъ ея по механикѣ, написанныхъ въ позднѣйшій періодъ; но своими открытіями въ этой области она въ значительной мѣрѣ обязана своимъ превосходнымъ познаніямъ въ чистой математикѣ, работы по которой относятся къ болѣе раннему періоду ея научной дѣятельности.

Этихъ работъ двѣ: «Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3-en Ranges auf elliptische Integrale» (Acta matematica, t. 4; p. 392) и «Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen» (J. Crelle, Bd. 80, 1874). Первая—частнаго характера и представляетъ рѣшеніе задачи, предложенное ей Weierstrass'омъ. Вторая относится къ теоріи интегрированія дифференціальныхъ ураненій съ частными производными при помощи безконечныхъ рядовъ. Чтобы лучше выяснить заслугу С. В. Ковалевской въ этой области и значеніе этого сочиненія въ ряду иныхъ, посвященныхъ тому же вопросу, я войду въ нѣкоторыя подробности историческаго характера.

Математики, занимавшіеся со временъ открытія интегральнаго исчисленія интегрированіемъ дифференціальныхъ уравненій, скоро замѣтили, что случаи, когда возможно ихъ проинтегрировать помощью конечнаго числа извѣстныхъ фонкцій, сравнительно рѣдки; поэтому они прибѣгали къ способу интегрированія помощью безконечныхъ рядовъ, полагая, что искомый интегралъ разлагается въ безконечный рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ восходящимъ степенямъ перемѣнныхъ независимыхъ. Но вслѣдствіе отсутствія теоріи безконечныхъ рядовъ математики стараго времени ограничивались только вычисленіемъ коэффиціентовъ безконечнаго ряда, не касаясь вопроса о его сходимости, ни того, дѣйствительно ли онъ представляетъ искомую функцію.

Геніальный французскій математикъ Cauchy первый далъ этому методу прочное основаніе. Въ мемуарѣ «Mémoire sur l'intégration des équations différentielles», литографированномъ въ Прагѣ въ 1835 году (Oeuvres, t. XI, série II) онъ далъ методъ, названный имъ «calcul des limites». Cauchy занимается въ немъ интегрированіемъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\ldots=\frac{dt}{T}, \tag{1}$$

гдѣ X, $Y, \ldots T$ суть голоморфныя [1]) функціи $x, y, \ldots t$ въ области нѣкоторой точки $(a,\ b \ldots \tau)$ и приводитъ его къ интегрированію одного линейнаго однороднаго дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка

$$X\frac{\partial f}{\partial t}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots+T\frac{\partial f}{\partial t}=0. \tag{2}$$

Пользуясь символомъ операціи

$$\nabla s=-\int_{\tau}^{t}\left(\frac{X}{T}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{Y}{T}\frac{\partial s}{\partial y}+\ldots\right)dt$$

онъ даетъ сначала формальное разложеніе въ безконечный рядъ какого либо рѣшенія этого уравненія, а изъ него получаются формальныя разложенія для той системы интеграловъ $x, y \ldots$ данной системы уравненій (1), которые при $t=\tau$ обращаются въ $x=a$, $y=b, \ldots$ Чтобы доказать существованіе области сходимости каждаго изъ полученныхъ рядовъ, Cauchy строитъ новый рядъ, общій членъ котораго больше по модулю общаго члена разсматриваемаго ряда. Этотъ новый рядъ пред-

[1]) Cauchy называетъ ихъ въ этомъ мемуарѣ и въ слѣдующихъ «finies et continues».

ставляетъ геометрическую прогрессію; поставивъ условіе, что ея знаменатель по модулю меньше единицы, находимъ область сходимости этого, а, слѣдовательно, и разсматриваемаго ряда. Въ случаѣ, если функціи X, $Y\ldots$ не заключаютъ t, ряды расположены непосредственно по цѣлымъ положительнымъ восходящимъ степенямъ разности $t-\tau$. Этотъ методъ доказательства сходимости разсматриваемыхъ рядовъ путемъ сравненія его съ вспомогательнымъ рядомъ, имѣющимъ упомянутыя выше свойства, и есть «calcul des limites». Cauchy заканчиваетъ этотъ мемуаръ словами: «En résumé les formules, qui précèdent, transforment en une théorie complètement rigoureuse l'intégration par séries d'un système quelconque d'équations différentielles. Dans les nouveaux mémoires je montrerai comment on peut déduire du calcul des limites diverses méthodes analogues à celle que je viens d'exposer».

Въ четырехъ мемуарехъ, представленныхъ въ 1842 г. Парижской Академіи Наукъ, Cauchy совершенствуетъ свой методъ и обобщаетъ его на случай дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ.

Въ первомъ изъ нихъ: «Mémoire sur l'emploi du nouveau calcul, appelé calcul des limites, dans l'intégration d'un système d'équations différentielles» (C. R., t. XV, p. 14) Cauchy разсматриваетъ тотъ же вопросъ объ интегрированіи системы (1), но уже непосредственно, не пользуясь уравненіемъ (2); и разсматриваемые ряды, однозначно вычисляемые по начальнымъ условіямъ и коэффиціентамъ рядовъ X, $Y\ldots$ расположены уже по цѣлымъ положительнымъ степенямъ разности $t-\tau$, а самый методъ «calcul des limites» примѣненъ въ усовершенствованной формѣ: именно, вспомогательные безконечные ряды являются, mutatis mutandis, голоморфными интегралами вспомогательныхъ дифференціальныхъ уравненій вида

$$\frac{dx}{dt}=\frac{M_1}{\left(1-\dfrac{x-a}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{y-b}{r_2}\right)\cdots},\ldots\frac{dz}{dt}=\frac{M_n}{\left(1-\dfrac{x-a}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{y-a}{r_2}\right)\cdots}\qquad(3)$$

гдѣ $M_1,\ldots M_n$ maximum'ы модулей коэффиціентовъ $X,\ldots Z$ данныхъ дифференціальныхъ уравненій $\frac{dx}{dt}=X,\ldots\frac{dz}{dt}=Z$ на контурахъ областей сходимости ихъ. Вопросъ о существованіи области сходимости этихъ вспомогательныхъ рядовъ, построенныхъ однозначно и аналогично разсматриваемымъ рядамъ, рѣшается опредѣленіемъ области сходимости безконечнаго ряда, представляющаго корень нѣкотораго конечнаго уравненія $n+1$-ой степени.

Въ слѣдующемъ мемуарѣ: «Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles» (ib., p. 44) Cauchy обобщаетъ свой методъ на случай одного линейнаго дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{1}^{n}{}_{k}X(x,\ x_1 ... x_n,\ u)\frac{\partial u}{\partial x_k}+X(x,\ x_1 ... x_n,\ u),$$

гдѣ X_k, X голоморфныя функціи въ нѣкоторой области точки $(a, a_1, \ldots a_n, b)$, и ищетъ голоморфный интегралъ, обращающійся при $x=a$ въ данную голоморфную функціи $\varphi(x_1 \ldots x_n)$, обращающуюся въ b въ точкѣ $(a_1 \ldots a_n)$.

Сначала Cauchy полагаетъ, что $\varphi(x_1 \ldots x_n) \equiv b$ и примѣняетъ свой методъ въ той формѣ, какую онъ далъ ему въ предшествующемъ мемуарѣ: рядъ, построенный однозначно и долженствующій представлять искомый интегралъ, сравнивается съ рядомъ, представляющимъ голоморфный интегралъ вспомогательнаго дифференціальнаго уравненія

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{M_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+M_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n}+M}{\left(1-\dfrac{x-a}{r}\right)\left(1-\dfrac{x_1-a_1}{r_1}\right)\ldots},$$

гдѣ $M_1, \ldots M$ maximum'ы модулей коэффиціентовъ $X_1, \ldots X$ на контурахъ областей сходимости ихъ. Вопросъ о существованіи области этого послѣдняго ряда, а, слѣдовательно, и даннаго рѣшается опредѣленіемъ области сходимости безконечнаго ряда, представляющаго корень нѣкотораго конечнаго уравненія $n+1$ степени. Если $\varphi(x_1 ... x_n) \neq b$, то полагая $u-\varphi=v$ придемъ къ разобранному случаю.

Этотъ пріемъ Cauchy обобщаетъ на случай системы дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка съ такимъ же числомъ искомыхъ функцій въ мемуарѣ: «Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles» (ib., p. 86). Данныя дифференціальныя уравненія предполагаются разрѣшенными относительно частныхъ производныхъ искомыхъ функцій по одному и тому же перемѣнному независимому въ формѣ:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{1}^{m}{}_{\varkappa}\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}X^{i}_{\varkappa\lambda}(x,\ x_1 \ldots x_n\ u_1 \ldots u_m)\frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda}+X_i(x,\ x_1 \ldots u_m),$$

$$i=1,\ 2, \ldots m$$

гдѣ $X_{\varkappa\lambda}$, X_i — голоморфныя функціи въ области точки $(a,\ a_1 \ldots b_m)$; ищется система голоморфныхъ интеграловъ, обращающихся при $x=a$ въ данныя голоморфныя функціи $\varphi_1(x_1 \ldots x_n), \ldots\ \varphi_m(x_1 \ldots x_n)$, обращающіяся въ точкѣ $(a_1 \ldots a_n)$ въ $b_1, \ldots b_m$. Вспомогательные ряды предполагаются голоморфными интегралами системы дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\sum_1^m \varkappa \sum_1^n \lambda M_{\varkappa\lambda} \frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda} + M}{\left(1 - \frac{x-a}{r}\right)\left(1 - \frac{x_1 - a_1}{r_1}\right)\ldots} \qquad i=1,\, 2 \ldots m$$

гдѣ λ_i какія нибудь постоянныя, а $M_{\varkappa\lambda}$, M maximum'ы на контурахъ областей сходимости функцій $\frac{X_{\varkappa\lambda}}{\lambda_i}$, $\frac{X_i}{\lambda_i}$. Cauchy полагаетъ сначала $\varphi_i(x_1 \ldots x_n) \equiv b_i$. $\quad i=1,\, 2 \ldots m$

Вопросъ о сходимости вспомогательныхъ рядовъ рѣшается опредѣленіемъ области сходности безконечнаго ряда, представляющаго корень нѣкотораго конечнаго уравненія. Въ томъ же мемуарѣ Cauchy дѣлаетъ указаніе, какъ свести къ этому случаю случай отысканія голоморфныхъ интеграловъ системы нелинейныхъ уравненій перваго порядка съ тѣмъ же числомъ искомыхъ функцій:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i\left((x,\; x_1 \ldots x_n \;\; u_1 \ldots u_m \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right), \qquad i=1 \ldots, 2, \ldots m$$

обращающихся при $x=a$ въ данныя голоморфныя функціи $\varphi_i(x_1 \ldots x_n) \ldots$ $\varphi_m(x_1 \ldots x_n)$; именно, должно интегрировать линейную систему:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x, x_1 \ldots x_n \;\; u_1 \ldots u_m, \;\; \varrho_{1,1}, \ldots \varrho_{m,n})$$

$$\frac{\partial \varrho_{i\varkappa}}{\partial x} = \frac{\partial F_i}{\partial x_\varkappa} + \sum_1^m \lambda \frac{\partial F_i}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} + \sum \alpha, \beta \, \frac{\partial F_i}{\partial \varrho_{\alpha,\,\beta}} \frac{\partial \varrho_{\alpha,\,\beta}}{\partial x_\varkappa}. \qquad i=1.2.m, \quad \varkappa=1,2 \ldots n$$

Наконецъ, въ послѣднемъ мемуарѣ «Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordres quelconques et sur leur réduction à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre» (ib., p. 131) Cauchy даетъ указанія, какъ привести къ тому же вопросу вопросъ объ опредѣленіи системы голоморфныхъ интеграловъ системы m дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ какого угодно порядка съ m неизвѣстными функціями, полагая, что они разрѣшимы относительно производныхъ найвысшихъ порядковъ, взятыхъ по одному и тому же перемѣнному, т. е. уравненій вида

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x^{n_i}} = F_i\left(x, x_1, \ldots x_n, u_1 \ldots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\cdot+\alpha_n} u_i}{\partial x^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right),$$

$$\alpha_0 \leq n_i - 1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \cdot + \alpha_n \leq u_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots m.$$

обращающихся при $x = a$ вмѣстѣ съ производными $\frac{\partial u_i}{\partial x}, \ldots \frac{\partial^{n_i - 1} u_i}{\partial x^{n_i - 1}}$ въ данныя голоморфныя функціи $\varphi_i(x_1 \ldots x_n)$, $\varphi_i^{(1)}(x_1 \ldots x_n), \ldots \varphi_i^{(n_i - 1)}(x_1 \ldots x_n)$. Для этого должно принять всѣ функціи, входящія въ правыя части, за искомыя: $u_1 \ldots u_m$, $\varrho_{1,1} \ldots \varrho_{i \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} \ldots$ Эта редукція была имъ показана на случаѣ одного уравненія второго порядка.

Оставалось такимъ образомъ въ однихъ случаяхъ упростить, если возможно, методъ Cauchy, а въ другихъ примѣнить его во всѣхъ подробностяхъ.

Это было сдѣлано Briot и Bouquet и, почти независимо отъ Cauchy, С. В. Ковалевской.

Briot и Bouquet въ мемуарѣ: «Sur les fonctions définies par les équations différentielles», представленномъ Парижской Академіи Наукъ въ 1854 г. [1]) и напечатанномъ въ 1856 г. въ Jour. de l'Ec. Pol. (t. 31), доказываютъ, между прочимъ, существованіе голоморфныхъ интеграловъ одного и системы совокупныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій $\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x, u_1 \ldots u_m)$ помощью метода Cauchy въ той формѣ, какую онъ далъ ему въ первомъ изъ упомянутыхъ мемуаровъ 1842 г., т. е. путемъ сравненія ихъ съ уравненіями вышеприведеннаго вида, но изложеніе отличается бо́льшей простотой.

Оставалось упростить методъ Cauchy въ случаѣ системы линейныхъ дифференціальныхъ уравноній перваго порядка и примѣнить его въ случаѣ уравненій нелинейныхъ какого угодно порядка. Это сдѣлала и, какъ я выше замѣтилъ, почти независимо отъ Cauchy, С. В. Ковалевская въ вышеприведенномъ мемуарѣ, представленномъ Геттингенскому университету на степень доктора философіи.

---

[1]) Отзывъ объ этомъ мемуарѣ представленъ Cauchy въ мартѣ 1855 г. (C. R. XL; Oeuvres, t. XII, I série).

На второй страницѣ своего труда С. В. указываетъ, какъ на автора теоремы о существованіи голоморфнаго интеграла обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія n-аго порядка, на Weierstrass'a, совершенно не упоминая Cauchy; именно, въ примѣчаніи мы читаемъ: «Dieser Satz findet sich zuerst in der Weierstrass'schen Abhandlung «Zur Theorie der analytischen Facultäten» (Crelle's Journal, Bd 51, s. 43) ausgesprochen und ist bald darauf auch von den Herrn Briot und Bouquet bewiesen worden (J. de l'Ec Pol, cah 36)». Но, какъ мы видѣли выше, Cauchy доказалъ её уже въ 1835 г., а мемуаръ Weierstrass'a появился въ 1856 г.; что же касается указанія на работу Briot и Bouquet, то едва ли справедливо утвержденіе «bald darauf», такъ какъ хотя мемуаръ Weierstrass'a, опубликованный въ 1856 г., помѣченъ маемъ 1854 г., но и работа Briot и Bouquet, напечатанная тоже въ 1856 г. представлена была Парижской Академіи Наукъ въ августѣ того же 1854 года; вѣрнѣе сказать: «gleichzeitig». Отсутствіе указанія на Cauchy и указаніе при ссылкѣ на работу Briot и Bouquet только на Jour. de l'Ec. Pol. заставляютъ думать, что С. В. въ то время не была достаточно ознакомлена съ французской литературой вопроса, что и весьма понятно, если обратить вниманіе на то, что она писала эту работу 23-хъ лѣтъ отъ роду, когда она была еще новичкомъ въ наукѣ, и на то, что она была подъ несомнѣннымъ вліяніемъ Weierstrass'a [1]). Правда, въ работѣ Briot и Bouquet есть ссылка на Cauchy, но очень скудная, съ лаконическимъ указаніемъ только на уравненіе $\frac{du}{dx}=f(x,u)$ (ib., p. 133).

Прежде всего С. В. разсматриваетъ систему линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_1^m{}_\varkappa\sum_1^n{}_\lambda G^i_{\varkappa\lambda}(u_1,\ldots u_m)\frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda}\qquad i=1.2\ldots m, \tag{4}$$

гдѣ $G^i_{\varkappa\lambda}(u_1\ldots u_m)$ суть голоморфныя функціи въ нѣкоторой области точки $(0,\ldots 0)$. Показавши существованіе формальныхъ рядовъ, распо-

[1]) Въ одномъ изъ писемъ Wierstrass'a къ L. Fuchs'y по поводу присужденія ей in absentia степени доктора философіи (Jahrbr. d. M.-Ver., 1909, Bd 18, Heft 2), именно въ первомъ, опубликованномъ M. Wentscher'омъ, Weierstrass пишетъ: «Eine dieser Abhandlungen beschäftigt sich mit der Frage, ob und wie weit sich die Sätze über die Integration eines Systems gewöhnlieher Differentialgleichungen dureh Potenzreihen, welche ich zuerst in meiner Abhandlung über die analytischen Facultäten (Crelle's Journal, 51, s. [43, 44]) aufgestellt habe und die bald darauf auch von den Herrn Briot und Bouquet bewiesen worden sind, auf den Fall ausdehnen lassen, wo zur Bestimmung von Functionen mehrerer Veränderlichen die erforderliche Anzahl von partiellen Differentialgleichungen gegeben ist». Такимъ образомъ, С. В. повторяла въ этомъ случаѣ мнѣніе Weierstrass'a.

ложенныхъ по цѣлымъ положительнымъ восходящимъ степенямъ перемѣнныхъ независимыхъ x, $x_1 \dots x_n$, однозначно опредѣленныхъ, формально удовлетворяющихъ системѣ уравненій (4) и обращающихся при $x=0$ въ данныя напередъ функціи $\varphi_1(x_1 \dots x_n), \dots \varphi_m(x_1 \dots x_n)$, голоморфныя въ области точки $(0, \dots 0)$ и обращающіяся въ послѣдней въ нуль, С. В. доказываетъ существованіе области сходимости точки $(0 \dots 0)$ этихъ рядовъ, представляющихъ такимъ образомъ въ этой области голоморфные интегралы дифференціальныхъ уравненій (4), путемъ сравненія ихъ съ другими рядами, формально удовлетворяющими дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{G}{1 - \frac{v_1 + \dots + v_n}{g}} \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial v_\varkappa}{\partial x_\lambda}$$

гдѣ g есть общій радіусъ области сходимости рядовъ $G^i_{\varkappa\lambda}\ (u_1 \dots u_m)$, а положительное число G выбрано такъ, чтобы въ разложеніи перваго множителя по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $v_1 \dots v_m$ положительный коэффиціентъ каждаго члена былъ больше модуля соотвѣтствующаго члена каждаго изъ рядовъ $G^i_{\varkappa\lambda}(u_1 \dots u_m)$; при чемъ эти ряды при $x=0$ обращаются въ голоморфную функцію

$$\varphi(x_1 \dots x_n) = \frac{g'(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\varrho}},$$

гдѣ g' и ϱ — положительныя числа и выбраны такъ, чтобы положительный коэффиціентъ каждаго члена въ ея разложеніи былъ больше модуля коэффиціента такого же члена въ каждомъ изъ рядовъ $\varphi_1(x_1 \dots x_n), \dots \varphi_n(x_1 \dots x_n)$. Вспомогательные ряды опредѣляются также однозначно.

Тогда положительный коэффиціентъ каждаго члена всякаго ряда $v_i(x, x_1 \dots x_n)$, будетъ больше модуля коэффиціента соотвѣтствующаго члена ряда $u_i(x_1, \dots x_n)$. Остается доказать существованіе области точки $(0, \dots 0)$, въ которой сходятся вспомогательные ряды.

Что касается интеграловъ вспомогательныхъ дифференціальныхъ уравненій, обращающихся при $x=0$ въ $\varphi(x_1 \dots x_n)$, то въ виду того, что $\frac{\partial(v_i - v_\varkappa)}{\partial x} = 0$, разность $v_i - v_\varkappa$ независитъ отъ x; а такъ какъ она обращается при $x=0$ въ нуль, ибо тогда $v_i = v_\varkappa = \varphi(x_1 \dots x_n)$, находимъ, что $v_1(x, x_1 \dots x_n) = \dots = v_m(x, x_1 \dots x_n) = v(x, x_1, \dots x_n)$, и

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{mG}{1 - \frac{m}{g} v.} \sum_1^n \lambda \frac{\partial v}{\partial x_\lambda}.$$

С. В. ищетъ v, какъ функцію x и $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{\varrho}$; полагая $t = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{\varrho}$, $\frac{mv}{g} = \psi(x, t)$, $a = \frac{mnG}{\varrho}$, $b = \frac{mg'}{g} \varrho$, находимъ простой интеграціей, что $ax + t - t\psi = \Theta(\psi)$; а такъ какъ при $x = 0$, $\psi(0,t) = = \frac{bt}{1-t}$, находимъ что $\Theta(\psi) \equiv \frac{1-\psi}{b+\psi}\psi$; и такимъ образомъ $\psi(x,t)$ опредѣляется изъ конечнаго уравненія

$$ax + t(1 - \psi) = \frac{1-\psi}{b+\psi}\psi,$$

откуда

$$\psi(x, t) = \frac{1 - (1-b)t - ax - \sqrt{[1-(1-b)t - ax]^2 - 4abx}}{2(1-t)},$$

гдѣ при разложеніи въ безконечный рядъ второй части свободный членъ разложенія корня квадратнаго долженъ быть взятымъ равнымъ 1; полученный рядъ имѣетъ нѣкоторую область сходимости; въ ней сходятся ряды $v = v_i(x, x_1 \ldots x_n)$, а, слѣдовательно, и ряды $u_1(x, x_1 \ldots x_n), \ldots u_n(x, x_1 \ldots x_n)$, представляющіе въ ней искомые голоморфные интегралы системы дифференціальныхъ уравненій (4).

Если функціи $\varphi_1(x_1 \ldots x_n) \ldots \varphi_m(x_1 \ldots x_n)$ обращаются въ точкѣ $(0, \ldots 0)$ не въ нуль, а въ $b_1, \ldots b_m$, то если только точка $(b_1 \ldots b_m)$ лежитъ въ области голоморфности функцій $G^i_{\varkappa\lambda}(u_1 \ldots u_m)$, этотъ случай приводится къ предыдущему преобразованіемъ искомыхъ функцій $u_1 \ldots u_m$ къ новымъ $v_1 \ldots v_m$ формулами $u_1 = v_1 + b_1, \ldots n_m = v_m + b_m$.

Случай системы дифференціальныхъ уравненій неоднородныхъ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_1^m \varkappa \sum_1^n \lambda G^i_{\varkappa\lambda}(u_1, \ldots u_m) \frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda} + G_i(u_1 \ldots u_m) \qquad i = 1.2 \ldots m$$

гдѣ $G^i_{\varkappa\lambda}$, G_i — голоморфныя функціи въ нѣкоторой области точки $(0, \ldots 0)$ приводится къ предыдущему введеніемъ новой функціи $u(x, x_1, \ldots x_n)$, удовлетворяющей вмѣстѣ съ данными однороднымъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_1^m \varkappa \sum_1^n \lambda G^i_{\varkappa\lambda}(u_1, \ldots u_m) \frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda} + G_i(u_1 \ldots u_m) \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

при условіи, что $u(0, x_1 \ldots x_n) \equiv x_1$; тогда $u \equiv x_1$.

Такимъ образомъ, С. В. Ковалевская примѣнила при этомъ изслѣдованіи методъ Cauchy, его «calcul des limites» и при томъ въ той формѣ, въ какой примѣнили его Briot и Bouquet и на какой окончательно остановился самъ Cauchy, но въ значительно упрощенной формѣ, благодаря спеціальному выбору вспомогательныхъ дифференціальныхъ уравненій и начальныхъ значеній ихъ интеграловъ.

Наконецъ, переходя къ самому общему случаю системы нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій какого угодно порядка, съ такимъ же членомъ неизвѣстныхъ функцій, С. В. Ковалевская полагаетъ, что эта система представлена въ т. н. нормальной формѣ, именно, что уравненія разрѣшены относительно производныхъ наивысшаго порядка отъ каждой функціи, взятыхъ по одному и тому же перемѣнному и, слѣдовательно, могутъ быть представлены въ формѣ:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x^{n_i}} = F_i\left(x, x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m, \ldots \frac{\partial^{\alpha_0} u_\varkappa}{\partial x^{\alpha_0}}, \ldots \frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u_\varkappa}{\partial x^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right),$$
$$\alpha_0 < n_\varkappa, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq n_\varkappa$$
$$\varkappa, i = 1, 2 \ldots m.$$

Если она этимъ свойствомъ не обладаетъ, можно дать ей этотъ видъ послѣ нѣкотораго линейнаго преобразованія перемѣнныхъ независимыхъ. С. В. Ковалевская разсматриваетъ случай, когда лѣвыя части — алгебраической формы, но, какъ сама замѣчаетъ въ концѣ мемуара, теорема остается вѣрной, если они суть вообще голоморфныя функціи.

Полагая функціи $F_i(x, x_1, \ldots x_m, u_1, \ldots u_m \ldots, \varrho_{\varkappa, \alpha_0, 0 \ldots 0}, \ldots \varrho_{\varkappa, \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}, \ldots)$ функціями голоморфными перемѣнныхъ независимыхъ $x, x_1 \ldots x_n$, $u_1 \ldots u_m$, $\varrho_{\varkappa, \alpha_0, 0 \ldots 0}, \ldots \varrho_{\varkappa, \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n}$ въ области точки $x = a$, $x_1 = a_1 \ldots u_1 = b_1, \ldots u_m = b_m, \ldots \varrho_{\varkappa, \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n} = b_{\varkappa \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} \ldots$, отысканіе системы голоморфныхъ интеграловъ $u_i(x, x_1 \ldots x_n)$, обращающихся при $x = a$ вмѣстѣ съ производными $\frac{\partial^{\alpha_0} u_i}{\partial x^{\alpha_0}}$ $(\alpha_0 \leq n_i - 1)$ въ данныя функціи $\varphi_i(x_1 \ldots x_n)$, $\varphi_i^{(\alpha_0)}(x_1 \ldots x_n)$, голоморфныя въ области точки $(a_1 \ldots a_n)$ и обращающіяся въ послѣдней вмѣстѣ съ производными $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} \varphi_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} \varphi_i^{(\alpha_0)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ въ b_i, $b_{i_1, \alpha_0, 0 \ldots 0}$, $b_{i, 0, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$, $b_{i \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}$, сводится къ рѣшенію предыдущей задачи слѣдующимъ образомъ: вводя новыя независимыя перемѣнныя $t,\ t_1, \ldots t_n$ по формуламъ: $x=a+t,\ \ x_i=a_i+t_i$, $i=1,\ 2, \ldots n$ и означая $u_\varkappa$, $\dfrac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u_\varkappa}{\partial x^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ чрезъ $v_\varkappa,\ q_{\varkappa,\, \alpha_0,\, \alpha_1 \ldots \alpha_n}$ $(\varkappa=1, 2 \ldots m)$ ищемъ систему голоморфныхъ интеграловъ въ области точки $(0_1 \ldots 0)$, системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій предыдущаго типа:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=1,\ \frac{\partial x_1}{\partial t}=\ldots=\frac{\partial x_n}{\partial t}=0;\ \ \frac{\partial v_i}{\partial t}=q_{i,\,1,\,0\ldots 0};$$

$$\frac{\partial q_{i,\,\alpha_0,\,0\ldots 0}}{\partial t}=q_{i,\,\alpha_0+1,\,0\ldots 0}(0<\alpha_0\leq n_i-1),$$

$$\frac{\partial q_{i,\,\alpha_0,\,\alpha_1,\,0\ldots 0}}{\partial t}=\frac{\partial q_{i,\,\alpha_0+1,\,\alpha_1-1,\,0\ldots 0}}{\partial t_1}\ (\alpha_0+\alpha_1\leq n_i,\ 0<\alpha_1)$$

. . . .

$$\frac{\partial q_{i,\,\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial t}=\frac{\partial q_{i,\,\alpha_0+1,\,\alpha_1\ldots\alpha_n-1}}{\partial t_n}(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leq n_i,\ 0<\alpha_n),$$

$$\frac{\partial q_{i,\,n_i,\,0\ldots 0}}{\partial t}=\frac{\partial F_i}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial v_\varkappa}q_{\varkappa,\,1,\,0\ldots 0}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial q_{\varkappa,\,\alpha_0,\,0,\ldots 0}}q_{\varkappa,\,\alpha_0+1,\,0\ldots 0}+$$
$$+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial q_{\varkappa\alpha_0\alpha_1 0\ldots 0}}\frac{\partial q_{\varkappa,\,\alpha_0+1,\,\alpha_1-1,\,0\ldots 0}}{\partial t_1}+\ldots+$$
$$+\frac{\partial F_i}{\partial q_{\varkappa,\,\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n}}\frac{\partial q_{\varkappa,\,\alpha_0+1,\,\alpha_1\ldots\alpha_n-1}}{\partial t_n}+\ldots$$

и обращающихся при $t=0$ въ функціи: $x=a,\ x_1=a_1+t_1 \ldots x_n=a_n+t_n$;

$$v_i=\varphi_i(a_1+t_1, \ldots a_n+t_n);\ q_{i,\,\alpha_0,\,0\ldots 0}=\varphi_i^{(\alpha_0)}(a_1+t_1\ldots a_n+t_n);$$

$$q_{i,\,\alpha_0,\,\alpha_1,\,0\ldots 0}=\frac{\partial^{\alpha_1}\varphi_i^{(\alpha_0)}}{\partial t_1^{\alpha_1}};\ldots q_{i,\,\alpha_0,\,\alpha_1,\ldots\alpha_n}=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\varphi_i^{(\alpha_0)}}{\partial t_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_n^{\alpha_n}};$$

$$q_{i,\,n_i,\,0\ldots 0}=F_i[a,\ a_1+t_1, \ldots a_n+t_n, \ldots \varphi_\varkappa, \ldots \varphi_\varkappa^{(\alpha_0)}, \ldots \frac{\partial^{\alpha_1}\varphi_\varkappa^{(\alpha_0)}}{\partial t_1^{\alpha_1}}, \ldots$$
$$\ldots\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\varphi_i^{(\alpha_0)}}{\partial t_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_n^{\alpha_n}}, \ldots],$$

обращающіяся въ точкѣ $(0, \ldots 0)$ въ : $b_i,\ b_{i,\,\alpha_0,\,0\ldots 0}, \ldots b_{i,\,\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n},\ F_i(a, a_1, \ldots a_n, \ldots b_\varkappa, \ldots b_{\varkappa,\,\alpha_0,\,0\ldots 0}, \ldots b_{\varkappa,\,\alpha_0\alpha_1\alpha_n})$.

Тогда $x=a+t, \ldots x_n=a_n+t_n;\ q_{i,\,\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n}\equiv\dfrac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n}v_i}{\partial t^{\alpha_0}\partial t_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_n^{\alpha_n}}$

и

$$\frac{\partial^{n_i} v_i}{\partial t^{n_i}} \equiv F_i[a + t,\ a_1 + t_1,\ \ldots a_n + t_n, \ldots v_\varkappa, \ldots$$

$$\ldots \frac{\partial^{\alpha_0} v_\varkappa}{\partial t^{\alpha_0}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n} v_i}{\partial t^{\alpha_0} \partial t^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}}, \ldots].$$

Если, наконецъ, преобразуемъ перемѣнныя независимыя $t_0, t_1, \ldots t_n$ къ $x, x_1, \ldots x_n$, получимъ систему m интеграловъ $u_i(x, x_1 \ldots x_n)$, данныхъ дифференціальныхъ уравненій, голоморфныхъ въ области точки $(a, a_1 \ldots a_n)$ и обращающихся при $x = a$ съ своими производными $\frac{\partial^{\alpha_0} u_i}{\partial x^{\alpha_0}}$ $(\alpha_0 \leq n_i - 1)$ въ данныя голоморфныя функціи $\varphi_i(x_1 \ldots x_n)$, $\varphi_i^{(\alpha_0)}(x_1 \ldots x_n)$.

Мы видимъ, что и въ этомъ случаѣ С. В. Ковалевская поступала такъ, какъ если бы хотѣла выполнить указанія Cauchy.

Я полагаю, что чтобы произвести правильную оцѣнку достоинства этого труда и математическаго таланта С. В. Ковалевской, по сколько послѣдній обнаружился въ немъ, должно стать на ту точку зрѣнія, что ей не были извѣстны труды Cauchy, развѣ по работѣ Briot и Bouquet; и если она шла по тому же совершенно пути, что и Cauchy, упрощала и обобщала съ такой легкостью его методъ, то это потому, что по этому пути вела ея собственная интуиція.

Если мы обратимъ вниманіе на сложность вопроса[1]), очевидную даже изъ этого бѣглаго очерка, на простоту и стройность доказательства, заставившихъ Poincaré признать, что С. В. Ковалевская дала методу Cauchy «sa forme définitive»; что, наконецъ. ей было тогда только 23 года отъ роду, мы должны признать за ней крупный математическій талантъ, сильный и ясный умъ, давшій ей возможность не только не потеряться среди массы подробностей, но привести ихъ въ стройное цѣлое, и, что еще важнѣе, недюжинную интуицію. Среди мужчинъ-математиковъ она занимаетъ почетное мѣсто, а среди женщинъ—первое, показавши, что женщина можетъ не уступить мужчинѣ даже въ такой трудной, отвлеченной области, какъ математика.

---

[1]) Въ вышеприведенномъ письмѣ Weierstrass говоритъ про этотъ вопросъ такъ: «Die Frage musste unbedingt einmal gründlich erörtert werden; ich selbst habe, offen gestanden, Scheu gehabt mich darauf einzulassen,... Schwierigkeiten die sich zunächst darboten... sind durch Scharfsinn der Verfasserin auf die einfachste und befriedigenste Weise beseitigt werden». Итакъ, самъ Weierstrass считалъ труднымъ этотъ вопросъ, который съ такой легкостью былъ рѣшенъ С. В. Ковалевской.