О вихряхъ въ жидкости съ мѣняющейся температурой.

Прапорщикъ **Фридманъ**.

---

1. Условія, полученныя Гельмгольтцемъ для вихрей, можно разсматривать, какъ результатъ исключенія изъ уравненій гидродинамики давленія p. При этомъ предполагается, что давленіе p есть функція удѣльнаго объема ω. Мы покажемъ, что и въ томъ случаѣ, когда p не есть функція ω, когда, слѣдовательно, въ общемъ случаѣ при движеніи жидкости мѣняется температура,—исключеніе функцій p и ω изъ уравненій гидродинамики приводитъ къ ряду условій, содержащихъ только составляющія внѣшнихъ силъ X, Y, Z, дѣйствующихъ на единицу массы, и составляющія скоростей u, v, w съ ихъ частными производными разныхъ порядковъ по времени t и координатамъ x, y, z.

Эти условія необходимы при разысканіи различныхъ частныхъ случаевъ движенія жидкости съ мѣняющейся температурой и позволяютъ рѣшить, въ случаѣ ея возможности, задачу объ опредѣленіи p и ω по скоростямъ u, v, w при условіи удовлетворенія уравненій гидродинамики.

2. При сдѣланныхъ выше предположеніяхъ уравненія гидродинамики будутъ:

$$(1)\qquad \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{X-\dfrac{du}{dt}}{\omega},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{Y-\dfrac{dv}{dt}}{\omega},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{Z-\dfrac{dw}{dt}}{\omega}$$

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{d\lg\omega}{dt}.$$

Введемъ обозначенія:

$$G_1=X-\frac{du}{dt},\quad G_2=Y-\frac{dv}{dt},\quad G_3=Z-\frac{dw}{dt}$$

$$H_1 = \frac{d\xi}{dt} + \Theta\xi - \left(\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

$$H_2 = \frac{d\eta}{dt} + \Theta\eta - \left(\xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$H_3 = \frac{d\zeta}{dt} + \Theta\zeta - \left(\xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\Theta}{2}G_1 + H_2 w - H_3 v}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}, \quad \beta_1 = -\frac{G_1}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{\Theta}{2}G_2 + H_3 u - H_1 w}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}, \quad \beta_2 = -\frac{G_2}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{\Theta}{2}G_3 + H_1 v - H_2 u}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}, \quad \beta_3 = -\frac{G_3}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} + \beta_2\frac{\partial \alpha_3}{\partial t} - \beta_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \quad \delta_1 = \frac{\partial \beta_2}{\partial z} - \frac{\partial \beta_3}{\partial y} + \beta_2\frac{\partial \beta_3}{\partial t} - \beta_3\frac{\partial \beta_2}{\partial t}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + \beta_3\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \beta_1\frac{\partial \alpha_3}{\partial t}, \quad \delta_2 = \frac{\partial \beta_3}{\partial x} - \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + \beta_3\frac{\partial \beta_1}{\partial t} - \beta_1\frac{\partial \beta_3}{\partial t}$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \beta_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \beta_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \quad \delta_3 = \frac{\partial \beta_1}{\partial y} - \frac{\partial \beta_2}{\partial x} + \beta_1\frac{\partial \beta_2}{\partial t} - \beta_2\frac{\partial \beta_1}{\partial t}$$

$$\lambda = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}, \quad \omega_i = \frac{\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i}{\delta_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Въ этихъ формулахъ

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

суть составляющія вихрей въ жидкости.

При этихъ обозначеніяхъ условія возможности опредѣленія p и ω изъ уравненій гидродинамики (1) будутъ:

$$G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 = 0$$

(2)

$$\frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2} = \frac{\gamma_3}{\delta_3}$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial y}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x},\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial z}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x},\quad \frac{\partial\omega_2}{\partial z}=\frac{\partial\omega_3}{\partial y}$$

(2)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\omega_1}{\partial t},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{\partial\omega_2}{\partial t},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=\frac{\partial\omega_3}{\partial t}$$

если условія (2) выполнены, то ω и p опредѣляются квадратурами.

$$\omega=e^{2\int\omega_1 dx+\omega_2 dy+\omega_3 dz+\lambda.dt}$$

(3)

$$p=\int\frac{G_1dx+G_2dy+G_3dz}{\omega}$$

Формулы (2) справедливы въ общемъ случаѣ, когда ни одинъ изъ знаменателей, входящихъ въ нихъ, не обращаются въ 0; тѣ случаи, когда это обстоятельство встрѣчается, приводятъ къ условіямъ, аналогичнымъ условіямъ (2), но при этомъ ω опредѣляется не квадратурой, а линейнымъ уравненіемъ съ частными производными перваго порядка.

Введенныя нами обозначенія и условія (2) принимаютъ весьма простой видъ, если ихъ выразить въ векторіальной формѣ.

Какъ слѣдствіе одного изъ условій (2), мы получимъ предложеніе: *Векторъ G съ составляющими G_1, G_2, G_3 есть векторъ незакручивающійся, т. е. онъ ортогоналенъ своему вихрю.*

Какъ частный случай, мы получаемъ условія Гельмгольтца, выражающіяся тѣмъ, что вихрь вектора G равенъ 0.

3. Укажемъ нѣсколько приложеній условій (2). Положимъ, что мы разсматриваемъ движеніе тяжелой жидкости, скорости частицъ которой параллельны между собой, ортогональны направленію силы тяжести и зависятъ только отъ t и z, причемъ ось z'овъ направлена противоположно дѣйствующей силѣ тяжести.

Рѣшеніе вопроса о движеніи жидкости при указанныхъ предположеніяхъ распадается на слѣдующіе частные случаи:

I. v удовлетворяетъ уравненію:

$$g\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{g}{2c}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^3 v}{\partial z\partial t^3}\right)=\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2$$

гдѣ c постоянная, g ускореніе силы тяжести;

$$\omega_1=0,\quad \omega_2=\frac{c}{g},\quad \omega_3=\frac{c+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial t}},\quad \lambda=-\frac{c}{g}v$$

p и ω опредѣляются уравненіями (3). Слѣдующій случай можетъ имѣть приложенія въ динамикѣ атмосферы.

$$v = -\frac{g}{c} F(t+z)$$

$$\omega = e^{\frac{2c}{g}y + 2\int_0^{t+z} F(m)dm}$$

$$p = -\frac{g^2}{2c^2} \frac{F'(t+z)}{\omega}$$

гдѣ F выражается черезъ дробную Бесселеву функцію и опредѣляется уравненіемъ:

$$F'' = 2FF' + \frac{2c^2}{g}$$

II. $$v = \sqrt{c_1 z + c_2} f(t) + c$$

$$\omega = \sqrt{c_1 z + c_2}\, \phi \left(k(y - \sqrt{c_1 z + c_2} \int_0^t f dt - ct) + \frac{2}{c_1} \sqrt{c_1 z + c_2} \right)$$

здѣсь c_1, c_2, c произвольныя постоянныя, изъ коихъ c_1 не$=0$, ф произвольная функція своего аргумента, $f(t)$ опредѣляется соотношеніемъ:

$$\vartheta\left(\sqrt{\frac{c_1}{4g}} f\right) = c_3 t + c_4$$

гдѣ

$$\vartheta(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx,$$

c_3, c_4 — произвольныя постоянныя; величина k опредѣляется равенствомъ $k = \frac{f'(0)}{g}$.

Также просто рѣшается задача и въ остальныхъ случаяхъ, въ коихъ v есть функція одной только перемѣнной t и z или въ коихъ $v = c_1 z - \frac{g}{c_1} \lg(c_2 t + c_3)$, гдѣ c_1, c_2, c_3 произвольныя постоянныя и c_1 не$=0$.

Дѣйствующая Армія.
10 сентября 1915.