Синтетическія основы плоской параболической геометріи.

В. Даватцъ.

§ 1.

Послѣ работъ *Cayley* [1]) и *Klein*'а [2]) является вполнѣ обоснованной точка зрѣнія, что метрическая геометрія можетъ быть разсматриваема, какъ спеціальный случай проективной: это осуществляется путемъ выдѣленія опредѣленнаго геометрическаго образа, такъ называемаго «*абсолюта*». Благодаря изслѣдованіямъ *v. Staudt*'а [3]) является полная возможность синтетическаго обоснованія «проективной метрики», что проведено даже въ элементарныхъ курсахъ проективной геометріи, примыкающихъ къ воззрѣніямъ *Staudt*'а [4]). Въ этомъ направленіи можно указать на работы *Grossmann*'а [5]), а также на опытъ изложенія плоской параболической геометріи у *Wellstein*'а [6]).

Въ настоящей статьѣ мы задались цѣлью дать такое изложеніе плоской параболической геометріи, при которомъ указанное взаимоотношеніе метрической и проективной геометріи выступало бы съ наибольшей очевидностью. Обычно показывается, что введеніе метрическихъ представленій вызываетъ существованіе нѣкоторой эллиптической инволюціи на безконечно-удаленной прямой; при этомъ затушевывается самое существенное — что метрическія соотношенія могутъ быть введены не какъ нѣчто по существу новое, а какъ слѣдствіе нѣкоторой спеціализаціи введенныхъ ранѣе геометрическихъ проективныхъ образовъ. Это становится еще болѣе очевиднымъ, если выдѣлить не ту прямую, которую мы обычно выдѣляемъ вслѣдствіе нашихъ интуитивныхъ пред-

---

1) *Cayley.* Sixth Memoir upon Quantics, 1859 (Mathematical Papers, V. II).

2) *Klein.* Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Math. An. B. IV).

3) *v. Staudt.* Geometrie der Lage.

4) *Enriques.* Vorlesungen über projective Geometrie 1915.

5) *Grossmann.* Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie. Beilage zum Programm der thurgauischen Kantonsschule auf das Jahr. 1903/04.

Онъ-же. Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln (Math. Ann. B. 58), 1904.

6) *Веберъ* и *Велльштейнъ.* «Энциклопедія элементарной математики». Т. II, кн. 1, стр. 229. Тамъ-же богатая литература.

ставленій — безконечно-удаленную прямую, — но вообще любую прямую плоскости.

При такомъ методѣ изложенія мы меньше всего зависимъ отъ нашей интуиціи, и само изложеніе дѣлается по своему характеру догматическимъ. Отсюда вполнѣ естественно сравнить полученную геометрическую систему съ системой геометрическихъ аксіомъ *Hilbert'*а [1]), показать, что всѣ эти аксіомы удовлетворяются и что полученная такимъ образомъ плоская параболическая геометрія съ логической стороны равноправна съ геометрической системой *Евклида*. Такая геометрія по своей сущности будетъ проективной, такъ какъ метрическія соотношенія останутся неизмѣнными при любомъ проективномъ преобразованіи (по отношенію къ новому преобразованному абсолюту).

§ 2.

Основныя опредѣленія. *На плоскости мы выдѣляемъ произвольную прямую p, на которой устанавливаемъ произвольную инволюцію эллиптическаго типа* **I**.

Прямую p будемъ называть **абсолютной прямой;** *всѣ ея точки*— **абсолютными точками;** *инволюцію* **I—абсолютной инволюціей;** *прямую p, вмѣстѣ съ инволюціей* **I—абсолютомъ плоскости.**

Какъ видно изъ опредѣленія, абсолютъ плоскости совершенно произволенъ; однако, разъ принятъ абсолютъ, мы будемъ предполагать его неизмѣннымъ и постояннымъ.

«Выдѣленіе» абсолюта придаетъ плоскости характеръ незамкнутой совокупности. Точки плоскости — это всѣ точки, не лежащія на абсолютной прямой; прямыя—всѣ за исключеніемъ абсолютной прямой. Поэтому, когда мы говоримъ объ абсолютной точкѣ и абсолютной прямой, то эти понятія будутъ лишены прежняго содержанія: сохраненіе термина эквивалентно введенію въ геометрію «несобственныхъ» элементовъ. Вслѣдствіе этого пересѣченіе двухъ прямыхъ въ абсолютной точкѣ соотвѣтствуетъ понятію о «непересѣченіи» прямыхъ въ собственной точкѣ. По аналогіи съ обычной терминологіей, *назовемъ прямыя, встрѣчающіяся въ абсолютной точкѣ,* **параллельными.**

Всякое проективное соотвѣтствіе **K** *на абсолютной прямой, имѣющее тѣ-же двойныя точки, что и абсолютная инволюція* **I**, *мы будемъ называть* **абсолютной конгруэнціей.**

Двойныя точки абсолютной конгруэнціи **K** установлены при заданіи абсолюта; поэтому для опредѣленія абсолютной конгруэнціи достаточно знать пару соотвѣтственныхъ точекъ конгруэнціи. Такимъ образомъ, *абсолютная конгруэнція опредѣляется парой соотвѣтственныхъ элементовъ.*

---

[1]) *Hilbert*. Grundlagen der Geometrie. 1909. Мы будемъ цитировать эту книгу сокращенно: «H».

Очевидно, что абсолютная инволюція есть частный видъ абсолютныхъ конгруэнцій.

Совокупность точекъ на абсолютной прямой между двумя абсолютными точками опредѣляетъ нѣкоторый **абсолютный отрѣзокъ** l. *Совокупность прямыхъ, проектирующихъ абсолютный отрѣзокъ изъ нѣкоторой точки, опредѣляетъ* **уголъ, принадлежащій отрѣзку** l.

Такимъ образомъ, принадлежность угла α нѣкоторому абсолютному отрѣзку l обусловлена не только тѣмъ обстоятельствомъ, что стороны угла α проходятъ черезъ концы отрѣзка l. При нашемъ опредѣленіи вертикальные углы всегда принадлежатъ одному и тому же абсолютному отрѣзку; напротивъ, смежные углы вообще принадлежатъ различнымъ абсолютнымъ отрѣзкамъ.

Два абсолютныхъ отрѣзка AA' *и* BB' *назовемъ* **конгруэнтными**, *если точкамъ* A *и* B *соотвѣтствуютъ точки* A' *и* B' *по одной и той же абсолютной конгруэнціи* **K**.

Отрѣзокъ AA' (если конгруэнція **K** не дана) и точка B могутъ быть даны по произволу. Тогда точка B' опредѣлится вообще двузначно: одно опредѣленіе соотвѣтствуетъ направленію AA', другое—противоположному направленію.

Если отрѣзокъ AA' *опредѣляется двумя соотвѣтственными точками абсолютной инволюціи, мы будемъ называть его* **инволюціоннымъ отрѣзкомъ**.

Изъ самого опредѣленія слѣдуетъ, что *абсолютная прямая распадается на два смежныхъ инволюціонныхъ отрѣзка.*

§ 3.

Мѣроопредѣленіе угловъ. *Мы называемъ* **равными** *углы, принадлежащіе двумъ конгруэтнымъ отрѣзкамъ. Мы называемъ* **прямыми** *углы, принадлежащіе инволюціоннымъ отрѣзкамъ.*

Изъ введенныхъ опредѣленій слѣдуетъ, что величина угла тѣсно связана съ абсолютной конгруэнціей: каждая абсолютная конгруэнція **K** (въ томъ числѣ и абсолютная инволюція **I**) опредѣляетъ совокупность равныхъ между собою угловъ. Неравные углы соотвѣтствуютъ различнымъ абсолютнымъ конгруэнціямъ. Прямые углы соотвѣтствуютъ абсолютной инволюціи, а потому всѣ прямые углы равны между собою.

§ 4.

Дальнѣйшія опредѣленія. *Мы называемъ* **кругомъ** *геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ отрѣзокъ* AB *виденъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.*

Основываясь на этомъ опредѣленіи, докажемъ слѣдующія предложенія.

Теорема I. *Три точки, не лежащія на одной прямой, вполнѣ опредѣляютъ кругъ, проходящій черезъ нихъ.*

Пусть даны точки A, B, C, не лежащія на одной прямой. Лучи AC и BC опредѣляютъ абсолютный отрѣзокъ MM'. Всѣ лучи, выходящіе изъ A и B и пересѣкающіеся подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, должны опредѣлять на абсолютной прямой отрѣзки, конгруэнтные отрѣзку MM'. Такъ какъ пара точекъ M и M' вполнѣ опредѣляютъ абсолютную конгруэнцію **K**, то для каждаго направленія луча, выходящаго изъ A, найдется одно и только одно направленіе луча, выходящаго изъ B[1]), точка пересѣченія которыхъ будетъ принадлежать искомому геометрическому мѣсту.

Теорема II. *Кругъ есть кривая второго порядка.* Пучки прямыхъ, опредѣляющіе кругъ, проективны, ибо всякій разъ проектируются соотвѣтственныя точки абсолютной конгруэнціи **K**. По теоремѣ *Steiner*'а, точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей принадлежатъ коническому сѣченію.

Мы называемъ **центромъ** *круга его полюсъ по отношенію къ абсолютной прямой;* **радіусомъ**—*любой отрѣзокъ, соединяющій точку круга съ его центромъ;* **діаметромъ**—*любой отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки круга и проходящій черезъ центръ.*

Введенныя опредѣленія вполнѣ законны послѣ доказательства теоремы II; пользуясь ими мы докажемъ слѣдующее предложеніе:

Теорема III. *Діаметръ круга виденъ изъ любой его точки подъ прямымъ угломъ.*

Пусть AB—діаметръ круга, C—его центръ, O—пересѣченіе продолженнаго діаметра съ абсолютной прямой. Проведемъ въ точкахъ A и B пару касательныхъ, пересѣкающихся въ точкѣ O'. Такъ какъ точка O' будетъ полюсомъ для AB, то она должна лежать на полярѣ точки C, т. е. на абсолютной прямой. Итакъ точки O и O' будутъ двумя абсолютными точками.

Пусть D—нѣкоторая движущаяся точка на окружности. Лучи AD и BD будутъ проектировать соотвѣтственныя точки абсолютной конгруэнціи, слѣдовательно будутъ проективны. Но въ этой абсолютной конгруэнціи точки O и O' будутъ соотвѣтствовать другъ другу взаимно, откуда заключаемъ, что абсолютная конгруэнція, опредѣляющая величину угла ADB имѣетъ инволюціонный характеръ, является слѣдовательно абсолютной инволюціей, и всѣ углы, подъ которыми виденъ діаметръ изъ точекъ круга, будутъ прямыми.

[1]) Мы имѣемъ въ виду вполнѣ опредѣленное *направленіе* конгруэнтныхъ отрѣзковъ.

Теорема IV. *Центръ и радіусъ вполнѣ опредѣляютъ кругъ.*

Пусть данъ центръ C и радіусъ AC. Точка B, принадлежащая кругу и лежащая по направленію даннаго радіуса, будетъ, по опредѣленію центра, четвертой гармонической между сопряженной парой O, C и точкой A, если O — точка встрѣчи продолженнаго радіуса AC съ абсолютной прямой. Такимъ образомъ діаметръ AB будетъ однозначно опредѣленъ. Проведя два луча изъ A и изъ B, пересѣкающіеся подъ прямымъ угломъ, получимъ точку C, лежащую на искомомъ кругѣ, согласно теоремѣ III. Но три точки A, B, C, по теоремѣ I, вполнѣ опредѣляютъ кругъ.

§ 5.

Мѣроопредѣленіе отрѣзковъ. Мы будемъ различать здѣсь два случая, въ зависимости отъ того, будутъ-ли сравниваемые отрѣзки параллельны, или нѣтъ. Въ соотвѣтствіи съ этимъ мы даемъ слѣдующія опредѣленія:

Два отрѣзка AB и $A'B'$ на двухъ параллельныхъ прямыхъ **равны** *между собою, если прямыя AA' и BB' параллельны.*

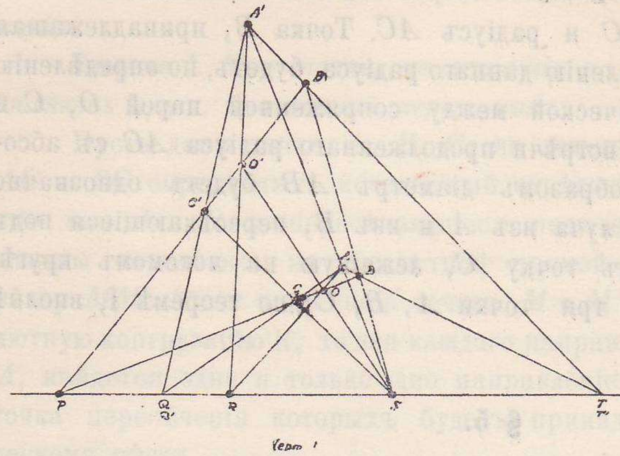
Два отрѣзка AB и $A'B'$ **равны** *между собою, если взявъ точки A и A' за центры круговъ съ радіусами AB и $A'B'$, получимъ два круга* **C** *и* **C'**, *въ которыхъ найдется пара параллельныхъ между собою равныхъ радіусовъ.*

Покажемъ, что общее опредѣленіе равенства отрѣзковъ не противорѣчитъ опредѣленію равенства въ случаѣ параллельности. Для этого достаточно показать: 1⁰ что всѣ радіусы круговъ **C** и **C'** опредѣлятся вполнѣ единственнымъ образомъ; 2⁰ что въ случаѣ существованія въ кругахъ **C** и **C'** пары параллельныхъ равныхъ радіусовъ, всѣ другіе радіусы, соотвѣтственно параллельные, будучи равными по второму опредѣленію, будутъ равны и по первому опредѣленію.

Положеніе 1⁰ вытекаетъ непосредственно изъ теоремы IV. Второе положеніе становится очевиднымъ послѣ доказательства слѣдующаго предложенія:

Теорема V. *Даны два круга* **C** *и* **C'** *съ центрами O, O', въ которыхъ проведены радіусы OA, OB и $O'A'$, $O'B'$, причемъ OA и OB соотвѣтственно параллельны радіусамъ $O'A'$ и $O'B'$. Если отрѣзки OO' и AA' параллельны, то будутъ параллельными и отрѣзки OO' и BB'.*

По условію $OA \parallel O'A'$ и $OO' \parallel AA'$; слѣдовательно, точка встрѣчи прямыхъ OA и $O'A'$ (точка R) и прямыхъ OO' и AA' (точка S) лежатъ на абсолютной прямой. Точно также изъ условія $OB \parallel O'B'$



слѣдуетъ, что ихъ точка встрѣчи (точка P) лежитъ также на абсолютной прямой. Проведемъ діаметры BC и $B'C'$; точки C и C' опредѣлятся изъ условія, что $(POCB)$ и $(PO'C'B')$ составляютъ гармоническія группы; очевидно, что точки C, C' и S будутъ лежать на одной прямой.

Изъ точекъ A и A' спроектируемъ діаметры BC и $B'C'$ на абсолютную прямую. Согласно теор. III абсолютные отрѣзки QT и $Q'T'$ должны быть инволюціонными отрѣзками. Такъ какъ

$$(POCB)\,\overline{\wedge}\,(PRQT)$$
$$(PO'C'B')\,\overline{\wedge}\,(PRQ'T')$$

то $(PRQT)$ и $(PRQ'T')$ составляютъ гармоническія группы. Итакъ, *точки Q, T и Q', T' принадлежатъ къ соотвѣтственнымъ точкамъ инволюціи* **I** *и гармонически раздѣляютъ точки P и R.*

Легко показать, что пары QT и $Q'T'$ совпадаютъ. Въ самомъ дѣлѣ, какъ раздѣляющія гармонически точки P и R, онѣ принадлежатъ къ нѣкоторому инволюціонному соотвѣтствію гиперболическаго типа **I'** (съ двойными точками P и R). Такъ какъ кромѣ того пары эти принадлежатъ къ абсолютной инволюціи **I**, то онѣ являются общими парами двухъ инволюціонныхъ соотвѣтствій **I** и **I'**, изъ которыхъ одно эллиптическаго типа. Какъ извѣстно, существуетъ единственная пара точекъ, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ [1]).

Итакъ, точки Q и T соотвѣтственно совпадаютъ съ точками Q' и T'. Но тогда треугольники ABC и $A'B'C'$ будутъ гомологическими, а потому прямыя AA', BB' и CC' пересѣкутся въ одной точкѣ S. Слѣдовательно прямыя OO' и BB' будутъ параллельны, что и требовалось доказать.

Въ связи съ этимъ докажемъ слѣдующее предложеніе:

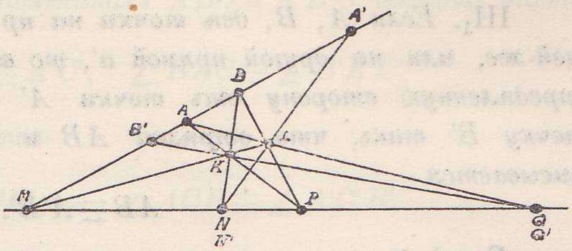
Теорема VI. *Концы отрѣзка AB примемъ за центры двухъ круговъ, радіусы которыхъ равны самому отрѣзку AB, и проведемъ пару параллельныхъ радіусовъ AK и BL. Прямая KL будетъ параллельна линіи центровъ AB* [2]).

---

[1]) *Enriques.* Vorles. über project. Geometrie. S. 118.

[2]) Отсюда вытекаетъ, что два смежныхъ равныхъ отрѣзка на прямой AB и BC обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что $(OBAC)$ составляютъ гармоническую группу, если O— абсолютная точка прямой.

Построимъ діаметры нашихъ круговъ AA' и BB'; очевидно, что группы $(MAB'B)$ и $(MBAA')$ будутъ гармоническими. Спроектировавъ изъ K группу $(MAB'B)$ получимъ гармоническую группу $(MPQN)$; спроектировавъ изъ L группу $(MBAA')$ получимъ гармоническую группу $(MPQ'N')$, т. е. NQ и $N'Q'$ гармонически дѣлятъ отрѣзокъ MP. Такъ какъ по теоремѣ III § 4 оба эти отрѣзка инволюціонны, то примѣняя разсужденія доказательства теоремы V § 5, заключаемъ, что NQ и $N'Q'$ совпадаютъ.



Черт 2

Прямая KL должна быть осью коллинеаціи при построеніи проективныхъ рядовъ по соотвѣтственнымъ элементамъ ABA' и NPQ; такъ какъ, далѣе, $(MNPQ) \barwedge (MA'BA)$ (центръ проекціи L) и $(MA'BA) \barwedge (MABA')$ (т. к. эти точки составляютъ гармоническую группу), то

$$(MNPQ) \barwedge (MABA')$$

т. е. въ данной проективности точка M соотвѣтствуетъ сама себѣ, что возможно только тогда, когда черезъ нее проходитъ ось коллинеаціи. Такимъ образомъ KL и AB пересѣкаются въ абсолютной точкѣ, что доказываетъ предложеніе.

§ 6.

Установивъ такимъ образомъ мѣроопредѣленія угловъ и отрѣзковъ, мы изслѣдуемъ полученную систему съ точки зрѣнія *Hilbert*'овскихъ аксіомъ геометріи.

Аксіомы *Hilbert*'а распадаются, какъ извѣстно, на пять группъ (Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz, der Parallelen, der Stetigkeit). Такъ какъ наша система построена на основѣ проективной геометріи, безъ привнесенія новыхъ понятій, но лишь путемъ спеціализаціи нѣкоторыхъ геометрическихъ образовъ и соотвѣтствующихъ опредѣленій, то ясно, что всѣ аксіомы, лежащія въ основѣ проективной геометріи, будутъ сохраняться при введеніи проективной метрики. Таковыми будетъ: 1°. Вся первая группа аксіомъ (A. der Verknüpfung). 2°. Вся вторая группа аксіомъ (A. der Anordnung). 3°. Аксіома «замкнутости» пятой группы (A. der Vollständigkeit, V_2) [1]).

---

[1]) H. S. 22. Послѣднее обстоятельство тѣмъ болѣе очевидно, что мы не только не *добавляемъ* «новыхъ» элементовъ въ проективную геометрію, но какъ разъ наоборотъ, *устраняемъ* несобственные элементы.

Остается, слѣдовательно, провѣрить справедливость слѣдующихъ аксiомъ:

Третья группа. (Axiome der Kongruenz).

III_1. *Если A, B, двѣ точки на прямой a и далѣе A' точка на той-же, или на другой прямой a', то всегда можно на прямой a' по опредѣленную сторону отъ точки A' найти одну и только одну точку B' такъ, что отрѣзки AB и $A'B'$ будутъ равны, что записывается*

$$AB \equiv A'B'.$$

Каждый отрѣзокъ равенъ самъ себѣ, т. е. всегда

$$AB \equiv AB \quad \text{и} \quad AB \equiv BA.$$

III_2. *Если отрѣзокъ AB равенъ какъ отрѣзку $A'B'$ такъ и отрѣзку $A''B''$, то отрѣзокъ $A'B'$ равенъ отрѣзку $A''B''$, т. е. если*

$$AB \equiv A'B' \quad \text{и} \quad AB \equiv A''B''$$

то

$$A'B' \equiv A''B''.$$

III_3. *Если AB и BC два отрѣзка безъ общихъ точекъ на прямой a и $A'B'$ и $B'C'$ два отрѣзка на той-же или на другой прямой тоже безъ общихъ точекъ; если далѣе*

$$AB \equiv A'B' \quad \text{и} \quad BC \equiv B'C'$$

то всегда

$$AC \equiv A'C'.$$

III_4. *Пусть данъ уголъ $\angle(h, k)$ на плоскости α и прямая a' на той-же плоскости, равнымъ образомъ опредѣленная сторона прямой a'* [1]. *Пусть h' — полупрямая на α, исходящая изъ точки O': тогда на плоскости α будетъ существовать одна и только одна полупрямая k' такая, что уголъ $\angle(h, k)$ будетъ равенъ углу $\angle(h', k')$ и кромѣ того всѣ внутреннiя точки угла $\angle(h', k')$ будутъ лежать по заданной сторонѣ a', что записывается:*

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k.);$$

каждый уголъ равенъ самому себѣ, т. е.

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k) \quad \text{и} \quad \angle(h, k) \equiv \angle(k, h).$$

III_5. *Если уголъ $\angle(h, k)$ равенъ какъ углу $\angle(h', k')$, такъ и углу $\angle(h'', k'')$, то уголъ $\angle(h', k')$ равенъ углу $\angle(h'', k'')$, т. е. если*

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k') \quad \text{и} \quad \angle(h, k) \equiv \angle(h'', k'')$$

[1]) Мы модифицируемъ эту аксiому на случай плоской геометрiи, т. к. у *Hilbert*'а она формулирована по отношенiю къ пространству 3-хъ измѣренiй. (H. S. 11).

то всегда

$$\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'')$$

III$_6$. *Если въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ имѣютъ мѣсто равенства*

$$AB \equiv A'B'. \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

то удовлетворяются и равенства

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \quad и \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'.$$

Четвертая группа. (Euklidisches Axiom).

IV. *Пусть a произвольная прямая и A точка внѣ a: тогда существуетъ только одна прямая b, проходящая черезъ A и не пересѣкающая a* [1]).

Пятая группа. (Axiome der Stetigkeit).

V$_1$. *Пусть A_1 произвольная точка на прямой между произвольно выбранными точками A и B; мы строимъ точки A_2, A_3 A_4. . .такъ, чтобы A_1 была между A и A_2, A_2 — между A_1 и A_3, A_3 — между A_2 и A_4 и т. д. кромѣ того, чтобы отрѣзки*

$$AA_1, \quad A_1A_2, \quad A_2A_3, \quad A_3A_4 \ldots$$

были равны другъ другу: тогда въ ряду точекъ A_2, A_3, A_4 . . всегда найдется такая точка A_n, что B будетъ лежать межу A и A_n [2]).

Справедливость всѣхъ этихъ аксіомъ для нашей геометрической системы мы покажемъ въ той же послѣдовательности, которая здѣсь указана, т. е. въ порядкѣ III$_{1-6}$; IV; V$_1$.

§ 7.

Аксіома III$_1$. Въ справедливости первой части аксіомы убѣждаемся путемъ *возможности однозначнаго построенія равныхъ данному отрѣзковъ, на основаніи введенныхъ въ § 5 опредѣленій.*

Пусть AB — данный отрѣзокъ. Мы строимъ отрѣзокъ CD, равный AB, — 1^0 на прямой, полученной путемъ продолженія AB; 2^0 на прямой, параллельной AB; 3^0 на прямой, не параллельной AB.

[1]) *Hilbert* излагая эту аксіому опредѣляетъ существованіе b въ плоскости (A, a), что при изложенія плоской геометріи излишне; кромѣ того, въ формулировку аксіомы онъ вводитъ опредѣленіе параллельности, что мы сдѣлали раньше въ § 2. (H. S. 20).

[2]) *Hilbert* называетъ эту аксіому «Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom» (H. S. 22).

Построеніе 1°. Назовемъ черезъ O абсолютную точку на прямой AB и изъ точки B проведемъ произвольную прямую, абсолютная точка которой пусть будетъ O'. Примемъ B за центръ круга съ радіусомъ AB; кругъ этотъ пересѣчется съ прямой BO' въ точкѣ K. Прямыя OK и CO' пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ K'.

Примемъ C за центръ круга съ радіусомъ CK'; прямую AB онъ пересѣчетъ (если, какъ требуется въ аксіомѣ, дается направленіе прямой отъ точки C) въ единственной точкѣ D. Отрѣзокъ CD будетъ искомымъ.

Дѣйствительно, отрѣзки AB и CD будутъ служить радіусами двухъ круговъ, въ которыхъ имѣются два параллельныхъ радіуса BK, CK', равныхъ между собою. Согласно опредѣленію § 5, $AB = CD$.

Единственность построенія вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній. Если-бы изъ точки B мы провели другую прямую BO'', то мы получили-бы тотъ-же самый кругъ съ центромъ B (теорема IV, § 4), а потому въ направленіи BO' мы получили-бы въ пересѣченіи ту-же точку K. Такъ какъ новый кругъ съ центромъ C будетъ имѣть съ кругомъ съ центромъ B по равному и параллельному радіусу (въ направленіи CO''), то всякая пара параллельныхъ радіусовъ въ этихъ двухъ кругахъ будетъ равна другъ другу (теорема V, § 5); слѣдовательно, въ направленіи CO' мы получимъ тотъ-же радіусъ CK', т. е. новый кругъ съ центромъ C будетъ тождественъ съ прежнимъ, а потому точка D опредѣлится однозначно.

Если вмѣсто того, чтобы проводить линію BO', мы провели-бы прямую AO' и построили-бы кругъ съ центромъ A, опредѣляющій на направленіи AO' радіусъ AK'', то мы могли-бы замѣнить это построеніе прежнимъ, на основаніи теоремы VI § 5. И въ этомъ случаѣ однозначность опредѣленія D доказана.

Построеніе 2°. Пусть AB — отрѣзокъ на прямой p и точка C находятся на прямой p', ей параллельной. Пусть O' — абсолютная точка прямой AC. Пересѣченіе BO' и прямой p' опредѣлитъ точку D.

Правильность такого построенія вытекаетъ изъ опредѣленія. Однозначность — очевидна. Если вмѣсто AC мы взяли-бы прямую BC съ абсолютной точкой на ней O'', то мы получили-бы отрѣзокъ CD, отвѣчающій другому направленію полупрямой p'. При заданномъ направленіи, какъ это требуется аксіомой, опредѣленіе D однозначно.

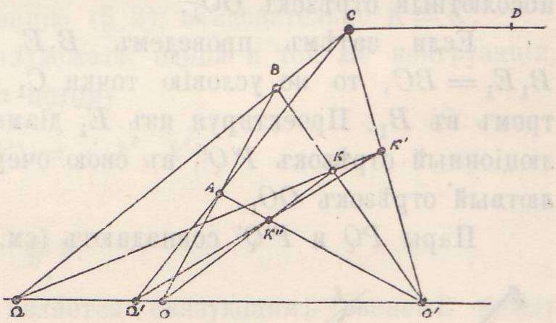
Построеніе 3°. Назовемъ черезъ O абсолютную точку на прямой AB и отъ точки B проведемъ произвольную прямую, абсолютная точка которой пусть будетъ O'. Примемъ B за центръ круга съ радіусомъ AB; кругъ этотъ пересѣчется съ прямой BO' въ точкѣ K. Пусть далѣе Ω абсолютная точка прямой BC. Прямыя ΩK и CO' пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ K'.

Примемъ C за центръ круга съ радiусомъ CK'; прямую, въ которой дана точка C, онъ пересѣчетъ (если, какъ требуется въ аксiомѣ, дается направленiе прямой отъ точки C) въ единственной точкѣ D. Отрѣзокъ CD будетъ искомымъ.

Доказательство правильности построенiя то же, что при построенiи 1-мъ.

Единственность построенiя вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображенiй. Если бы изъ точки B мы провели другую прямую BO'' и въ соотвѣтствiи съ этимъ модифицировали бы построенiе, то въ силу тѣхъ же обстоятельствъ, которыя указаны въ построенiи 1^0, мы должны были бы придти къ прежнему результату.

Мы пришли-бы къ прежнему построенiю, если бы вмѣсто прямой BO' и круга съ центромъ B взяли бы прямую AO' и кругъ съ центромъ A. Соотвѣтственный радiусъ AK' по теоремѣ VI § 5 былъ бы равенъ BK, т. е. AB и KK'' пересѣкались бы въ точкѣ O. Радiусъ круга съ центромъ C въ направленiи CO', какъ равный AK'', опредѣлился бы проектированiемъ AK'' изъ абсолютной точки Ω_1, лежащей на прямой AC. Вершины треугольниковъ ABC и $K''KK'$ лежали бы на трехъ лучахъ, выходящихъ отъ O', причемъ стороны AB, $K''K$ и AC, $K''K'$ пересѣкались бы въ двухъ точкахъ O и Ω_1 на абсолютной прямой; эти треугольники были бы гомологическими, а потому BC и KK' пересѣклись бы въ точкѣ Ω. Такимъ образомъ новый кругъ съ центромъ C имѣлъ бы въ направленiи CO' тотъ же самый радiусъ, что и старый, а потому точка D опредѣлилась-бы однозначно.



Черт. 5

Вторая часть аксiомы, что всякiй отрѣзокъ равенъ самому себѣ, вытекаетъ непосредственно изъ теоремы VI § 5. Въ самомъ дѣлѣ, описавъ изъ концовъ отрѣзка два круга, съ радiусами, равными длинѣ отрѣзка, мы получимъ въ любыхъ параллельныхъ направленiяхъ по равному радiусу, что согласно опредѣленiямъ § 5 достаточно для признанiя аксiомы справедливой.

Аксiома III$_2$. Справедливость аксiомы III$_2$ установимъ слѣдующимъ образомъ.

На отрѣзкахъ AB, $A'B'$ и $A''B''$ построимъ три круга съ центрами A, A' и A'' и съ радiусами, равными соотвѣтствующимъ отрѣзкамъ; назовемъ соотвѣтствующiе круги **C**, **C**$'$ и **C**$''$. Проведемъ въ кругѣ **C**$'$ радiусъ $A'K'$, параллельный AB. Такъ какъ $AB = A'B'$, то очевидно $AB = A'K'$ (по теоремѣ V § 5). Въ кругѣ **C″** проведемъ радіусъ $A''K''$, также параллельный AB; по тѣмъ же причинамъ, $A''K'' = AB$.

Мы получимъ три параллельныхъ отрѣзка AB, $A'K'$ и $A''K''$, причемъ

$$AB = A'K' \quad \text{и} \quad AB = A''K''.$$

Легко доказать, что въ этомъ случаѣ $A'K' = A''K''$. Пусть абсолютная точка прямыхъ AB, $A'K'$ и $A''K''$ будетъ O. По условію, прямыя BK' и AA' имѣютъ общую абсолютную точку O''. Треугольники $AA'A''$ и $BK'K''$ будутъ гомологическими, ибо вершины ихъ находятся на трехъ прямыхъ, выходящихъ отъ точки O, а стороны AA' и BK', AA'' и BK'' пересѣкаются на абсолютной прямой. Слѣдовательно $A'A''$ и $K'K''$ также пересѣкаются на абсолютной прямой, т. е. $A'K' = A''K''$.

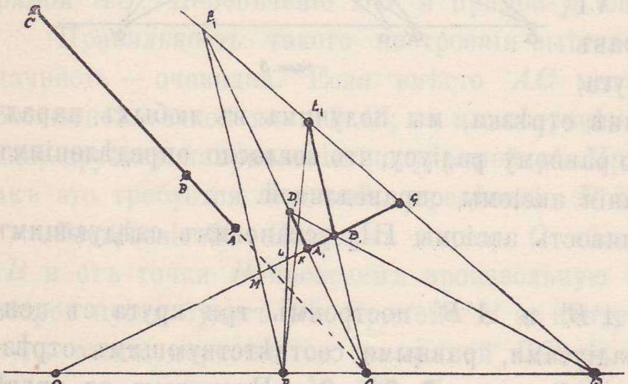
Изъ послѣдняго равенства обнаруживается, что круги **C′** и **C″** имѣютъ пару равныхъ параллельныхъ радіусовъ, а потому, въ силу опредѣленія, $A'B' = A''B''$, что и требовалось доказать.

Аксіома III$_3$. Справедливость аксіомы III$_3$ въ случаѣ параллельныхъ направленій слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія. *Остается доказать справедливость аксіомы, если прямыя, на которыхъ даны отрѣзки, не параллельны.*

Пусть $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Проведемъ A_1D_1 параллельно AB и отложимъ $A_1D_1 = AB$. По условію точки B_1 и D_1 должны лежать на кругѣ съ центромъ A_1. Поэтому проектируя изъ D_1 діаметръ LB_1, мы получимъ инволюціонный отрѣзокъ PQ, гармонически дѣлящій абсолютный отрѣзокъ OO_1.

Если затѣмъ проведемъ B_1E_1 параллельно BC и отложимъ $B_1E_1 = BC$, то по условію точки C_1 и E_1 лежатъ на кругѣ съ центромъ въ B_1. Проектируя изъ E_1 діаметръ KC_1, получимъ новый инволюціонный отрѣзокъ $P'Q'$, въ свою очередь дѣлящій гармонически абсолютный отрѣзокъ OO_1.

Пары PQ и $P'Q'$ совпадаютъ (см. доказ. теор. V, § 5).



Чер. 4

Продолжимъ теперь E_1C_1 до пересѣченія съ A_1D_1 въ точкѣ F_1 и соединимъ F_1 съ P. Точки

$$(O_1A_1MC_1) \barwedge (O_1OPQ),$$

т. е. $(O_1A_1MC_1)$ составляютъ гармоническую группу, а потому

$$A_1M = A_1C_1.$$

Уголъ MF_1C_1, какъ

соотвѣтствующій инволюціонному отрѣзку PQ,—прямой, а потому точки M, F_1, C_1 лежатъ на одномъ и томъ же кругѣ и

$$A_1C_1 = A_1F_1.$$

Такъ какъ радіусъ A_1F_1, параллельный AC, оказался равнымъ A_1C_1, то по опредѣленію

$$AC = A_1C_1.$$

что и требовалось доказать.

§ 8.

Аксіома III_4. Пусть уголъ $\angle(h, k)$ принадлежитъ абсолютному отрѣзку HK, который опредѣляетъ абсолютную конгруэнцію **K** (§ 2), и пусть лучъ h' имѣетъ абсолютной точкой H'. Для построенія угла $\angle(h', k')$, равнаго $\angle(h, k)$, мы должны построить отрѣзокъ $H'K'$, конгруэнтный HK. Для точки H' найдется по данной конгруэнціи **K** единственная соотвѣтствующая ей точка K' (если, какъ требуется аксіомой, дается направленіе), а потому *первая часть аксіомы III_4 имѣетъ мѣсто*.

Вторая часть аксіомы III_4 очевидна.

Аксіома III_5. Если $\angle(h, k) = \angle(h', k')$, то принадлежащіе имъ абсолютные отрѣзки HK и $H'K'$ конгруэнтны, т. е. опредѣляются одной и той же абсолютной конгруэнціей **K**. Если $\angle(h, k) = \angle(h'', k'')$, то принадлежащіе имъ абсолютные отрѣзки HK и $H''K''$ принадлежатъ нѣкоторой конгруэнціи **K'**. Но пара соотвѣтственныхъ элементовъ вполнѣ опредѣляетъ абсолютную конгруэнцію (§ 2); слѣдовательно **K** = **K'**.

Итакъ, $H'K'$ и $H''K''$ принадлежатъ одной и той же конгруэнціи, т. е. являются конгруэнтными, а потому

$$\angle(h', k') = \angle(h'', k''),$$

что и требовалось доказать.

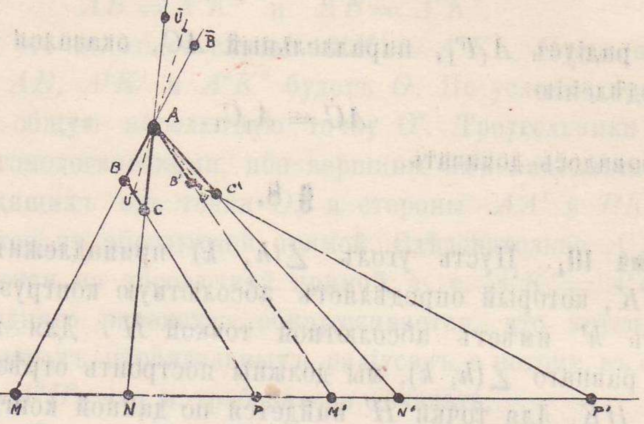
§ 9.

Аксіома III_6. Аксіома эта является связующимъ звеномъ между аксіомами III_{1-3} и III_{4-5}.

Для доказательства предположимъ сперва, что оба треугольника имѣютъ общую вершину A.

Каждому лучу, выходящему изъ A и образующему нѣкоторый отрѣзокъ AU можно поставить въ соотвѣтствіе лучъ AU_1 такой, что $AU = AU_1$: тогда, если $AU = A\overline{U}$, то лучи UU_1 и $\overline{U}U_1$ пересѣкутъ абсолютную прямую въ двухъ точкахъ абсолютной инволюціи. Поэтому, если изъ точекъ U и $\overline{U}$ проектировать соотвѣтственные точки абсолютной инволюціи, получимъ на прямой $B'C'$ проективность π, причемъ U_1 будетъ одной изъ двойныхъ ея точекъ.

Если точка U занимаетъ послѣдовательныя положенія на прямой BC, то $\overline{U}$ двигается по прямой $P\overline{B'}$. Если изъ новыхъ положеній точекъ U и $\overline{U}$ спроектировать соотвѣтственныя точки абсолютной инволюціи, то



Черт. 5

они спроектируются теперь на $B'C'$ въ другую проективность π', отличную отъ π, трансформированную изъ π при помощи нѣкоторой проективности Ω [1]). Двойныя точки подвергнуты въ этомъ случаѣ тому же проективному преобразованію Ω, которое создается перемѣщеніемъ точки U по прямой BC: другими словами ряды U и U_1 проективны.

Такъ какъ длина $AP = AP' = \infty$, то въ этихъ проективныхъ рядахъ точки P и P' являются соотвѣтствующими другъ другу въ абсолютной конгруэнціи, въ которой точкамъ M, N, P... соотвѣтствуютъ M', N', P', откуда по опредѣленію

$$\left.\begin{aligned}\angle ACB &= \angle AC'B'\\ \angle ABC &= \angle AB'C'\end{aligned}\right\}\text{I.}$$

Если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, удовлетворяющіе условіямъ теоремы, расположены какъ угодно, то при вершинѣ A строимъ $\triangle AB'C'$ такъ, чтобы $AB' \parallel A_1B_1$ и $AC' \parallel A_1C_1$, причемъ $AB' = A_1B_1$ и $AC' = A_1C_1$. Такъ какъ треугольники эти гомологичны, то на абсолютной прямой пересѣкутся попарно стороны AB' и A_1B_1, AC' и A_1C_1, $B'C'$ и B_1C_1, т. е. въ треугольникахъ $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ углы будутъ соотвѣтственно равны.

Но, какъ показано выше, въ этомъ случаѣ имѣютъ мѣсто равенства (I), которыя, въ силу сказаннаго дадутъ намъ

$$\left.\begin{aligned}\angle ACB &= \angle A_1C_1B_1\\ \angle ABC &= \angle A_1B_1C_1\end{aligned}\right\}\text{II,}$$

что и является содержаніемъ аксіомы III_6.

[1]) *Enriques.* Project. G. S. 113.

§ 10.

Аксіома IV. Построеніе прямой черезъ точку A, которая не пересѣкалась бы съ a, сводится къ построенію прямой, проходящей черезъ точку A и абсолютную точку O на прямой a: т. е. къ задачѣ проведенія прямой черезъ двѣ данныхъ точки.

Такая задача, какъ извѣстно, разрѣшается однозначно, что *подтверждаетъ справедливость аксіомы IV*.

§ 11.

Аксіома V$_1$. Прежде всего замѣтимъ, что построеніе равныхъ другъ другу и смежныхъ отрѣзковъ

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4\ldots$$

сводится къ послѣдовательному нахожденію четвертой гармонической по отношенію къ абсолютной точкѣ на прямой, O: [1])

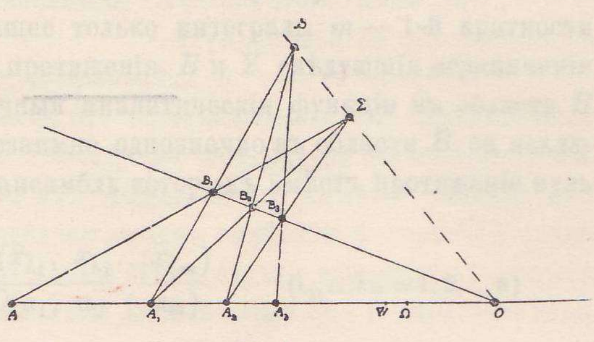
$$(OA_1AA_2)\overline{\wedge}(OA_2A_1A_3)\overline{\wedge}(OA_3A_2A_4)\ldots \text{ и т. д.}$$

Разсмотримъ два ряда: $(AA_1A_2A_3\ldots)$ и $(A_1A_2A_3A_4\ldots)$. Такъ какъ $(A_{k-1}A_{k+1}A_kO)$ и $(A_kA_{k+2}A_{k+1}O)$ при всякомъ k составляютъ гармоническія группы, то ясно, что ряды

$$AA_1A_2\ldots\ (\mathbf{A})$$
$$A_1A_2A_3\ldots\ (\mathbf{A}')$$

проективны и имѣютъ двойной точкой точки O. Проективные ряды опредѣляются тремя парами соотвѣтственныхъ элементовъ: за таковые примемъ A, A_1, A_2 и $A_1A_2A_3$.

Спроектируемъ $A_1A_2A_3$ изъ произвольной точки S на прямую, проходящую черезъ O; рядъ $B_1B_2B_3\ldots$ (**B**) будетъ проективенъ ряду (**A'**), а потому и (**A**) и даже перспективенъ, вслѣдствіе того, что общая имъ точка O соотвѣтствуетъ сама себѣ. Отсюда заключаемъ, что лучи AB_1, A_1B_2 и A_2B_3 пересѣкутся въ общей точкѣ Σ. Изъ разсмо-



Чер. 6

[1]) См. примѣчаніе къ теор. VI § 5.

трѣнія четыреугольника $B_1S\Sigma B_2$ и условія, что (AA_2A_1O) есть гармоническая группа, слѣдуетъ, что *точки* S, Σ *и* O *лежатъ на одной прямой.*

Возьмемъ теперь любую точку A ряда (A). Чтобы построить ей соотвѣтственную въ ряду (A'), строимъ сперва точку, соотвѣтствующую ей въ ряду (B), для чего проектируемъ A изъ центра Σ; полученную точку B проектируемъ изъ центра S, послѣ чего получаемъ точку A' въ ряду (A'). Изъ конструкціи построенія видно, что для любой точки A, не совпадающей съ O, мы получимъ соотвѣтственную точку A', отличную отъ A; другими словами *соотвѣтствія* (A) *и* (A') *принадлежатъ къ параболическому типу.*

Допущеніе, что аксіома V_1 не имѣетъ мѣста, сводится къ тому, что сколько бы мы ни продолжали рядъ $AA_1A_2\ldots$, всѣ точки этого ряда окажутся лѣвѣе точки Ω, находящейся между A и O. Тогда въ этомъ ряду окажется точка сгущенія W, или совпадающая съ Ω, или лежащая между A и Ω. Точкѣ W, какъ точкѣ ряда A (если разсматривать его какъ непрерывный рядъ точекъ) не можетъ соотвѣтствовать точка W', правѣе W, или лѣвѣе W: и то, и другое противорѣчило бы опредѣленію точки W. Такимъ образомъ, точка W должна соотвѣтствовать сама себѣ, т. е. является двойной; а такъ какъ W не совпадаетъ съ O, то *проективность была бы гиперболическаго типа,* что противно доказанному.

Итакъ, точки W, обладающей указанными свойствами, не существуетъ, что доказываетъ предложеніе.

Харьковъ. 26 февраля 1916 г.