Обобщенная формула Green'а для пространства n измѣреній.

Н. Θ. Спенглеръ.

Положимъ, что мы имѣемъ въ пространствѣ m измѣреній $(A_1, A_2 \ldots A_m)$ нѣкоторую ограниченную область B точекъ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$. Положимъ, что эта область преобразуется при помощи формулъ

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \\ x_2 &= x_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \end{aligned} \tag{1}$$

на протяженіе m-аго измѣренія Y въ пространствѣ n измѣреній $(X_1, X_2, \ldots X_n)$.

Пусть $A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ будутъ непрерывными функціями отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, имѣющими непрерывныя частныя производныя перваго порядка по всѣмъ перемѣннымъ. Составимъ m-кратный интегралъ въ области B

$$S_B \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_{\lambda_m}} \frac{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m. \quad (\lambda_1 \ldots \lambda_m = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

Наша задача состоитъ въ томъ, чтобы преобразовать этотъ интегралъ въ выраженіе, содержащее только интегралы $m-1$-й кратности. При этомъ мы наложимъ на протяженія B и Y слѣдующія ограниченія.

1. Функціи x_i—однозначныя аналитическія функціи въ области B.
2. Преобразованіе (1) взаимно однозначно въ области B, за исключеніемъ нѣкоторыхъ точекъ, ансамбль которыхъ имѣетъ протяженіе нуль.
3. Опредѣлители

$$\frac{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m = 1, 2, \ldots n)$$

сохраняютъ знакъ въ области B и обращаются въ нуль только въ точкахъ, ансамбль которыхъ имѣетъ протяженіе нуль.

4. Область B точекъ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ составлена такимъ образомъ, что къ элементамъ точекъ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1})$ односвязной области P въ пространствѣ $m-1$-го измѣренія $(A_1, A_2, \ldots A_{m-1})$ присоединяется элементъ α_m, получающій для каждой точки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1})$ всѣ значенія изъ промежутка (β_1, β_2).

Если въ формулахъ (1) положимъ $\alpha_m = \beta_1$, то эти формулы опредѣлятъ преобразованіе области P на протяженіе $m-1$-аго измѣренія R въ пространствѣ $(X_1, X_2, \ldots X_n)$. Проэкціи протяженія R на координатныя протяженія $m-1$-го измѣренія $(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \ldots X_{\lambda_{m-1}})$ являются также областями, которыя обозначимъ черезъ $Q_{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}}$. Границу области $Q_{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}}$ обозначимъ черезъ $G_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m-1}}$.

5. Точки, лежащія внутри области P, соотвѣтствуютъ взаимно однозначно точкамъ протяженія R. Различнымъ же точкамъ, лежащимъ на границѣ области P, можетъ соотвѣтствовать одна точка протяженія R.

6. Въ точкахъ границы области P, которыя соотвѣтствуютъ одной точкѣ протяженія R, совпадаютъ также первыя частныя производныя функцій x_i по перемѣннымъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.

7. Среди точекъ границы области P, соотвѣтствующихъ одной точкѣ протяженія R, существуютъ по крайней мѣрѣ двѣ $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{m-1})$ и $(\alpha''_1, \alpha''_2, \ldots \alpha''_{m-1})$ такихъ, что въ области P можно къ нимъ провести полупрямыя

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 = \alpha'_1 + l_1 t, & & \alpha_1 = \alpha''_1 + l_1 t, \\ \alpha_2 = \alpha'_2 + l_2 t, & \text{и} & \alpha_2 = \alpha''_2 + l_2 t. \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m-1} = \alpha'_{m-1} + l_{m-1} t & & \alpha_{m-1} = \alpha''_{m-1} + l_{m-1} t, \end{array}$$

при чемъ параметръ t измѣняется отъ отрицательныхъ значеній до нуля для одной изъ этихъ полупрямыхъ и отъ нуля до положительныхъ значеній для другой. Такихъ прямыхъ можно провести по меньшей мѣрѣ $m-1$, при чемъ опредѣлитель, составленный изъ ихъ угловыхъ коэффиціентовъ l, не равенъ нулю.

Для случая $m=2$ и односвязной области P это условіе всегда выполняется. Изъ этого слѣдуетъ, что проэкціи x_i могутъ принять экстремальное значеніе внутри или на границѣ области P только тогда, когда всѣ первыя частныя производныя отъ x_i по $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ обратятся въ нуль. Для насъ необходимо только послѣднее свойство, и потому послѣдующія разсужденія будутъ имѣть мѣсто, когда это свойство существуетъ, хотя бы условіе 7 и не выполнялось, какъ напр. для шара $x_1 = \alpha_3 \operatorname{Cos}\alpha_1 \operatorname{Cos}\alpha_2$, $x_2 = \alpha_3 \operatorname{Cos}\alpha_1 \operatorname{Sin}\alpha_2$, $x_3 = \alpha_3 \operatorname{Sin}\alpha_1$ на прямыхъ $\alpha_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, $\alpha_3 = \beta_1$.

8. На протяженіи R первыя производныя отъ функцій x_i по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ не могутъ одновременно обращаться въ нуль.

9. Каждой точкѣ $(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$ внутри области $Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ соотвѣтствуютъ двѣ и только двѣ различныхъ точки $(x'_1 \ldots x_{\lambda_1 - 1}, x_{\lambda_1}, x'_{\lambda_1+1}, \ldots x_{\lambda_2}, \ldots x'_n)$ и $(x''_1, \ldots x''_{\lambda_1-1}, x_{\lambda_1}, x''_{\lambda_1+1}, \ldots x_{\lambda_2}, \ldots x''_n)$ протяженія R. Каждой же точкѣ границы $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ соотвѣтствуетъ только одна точка протяженія R.

Совокупность точекъ области P, соотвѣтствующихъ протяженію $G_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$, обозначимъ черезъ $\Gamma_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$.

10. Если фиксируемъ $m-1$ элементовъ $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ точекъ $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ протяженія Y, то значенія каждаго изъ остальныхъ элементовъ x_μ образуютъ промежутки (x'_μ, x''_μ).

Выведемъ нѣкоторыя слѣдствія изъ перечисленныхъ условій. Условимся значенія функціи x_i, соотвѣтствующія точкѣ $(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$, лежащей внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$, обозначать черезъ x'_i и x''_i такъ, что $x'_i < x''_i$. Тогда x'_i и x''_i являются однозначными функціями отъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Докажемъ, что x'_i и x''_i являются также и непрерывными функціями внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Условимся всѣ точки $(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})$ границы области P, которыя соотвѣтствуютъ одной точкѣ протяженія R, считать за одну, а точки, лежащія вблизи одной изъ упомянутыхъ точекъ, условимся считать за точки, лежащія вблизи послѣдней точки. Тогда всякой точкѣ $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$ соотвѣтствуютъ двѣ точки $(\alpha'_1, \ldots \alpha'_{m-1})$ и $(\alpha''_1, \ldots \alpha''_{m-1})$ области P, изъ которыхъ первая даетъ значеніе $(x'_i)_0$, а вторая значеніе $(x''_i)_0$ функціи x_i. Окружимъ точку $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$ областью (q), содержащей внутри себя эту точку и лежащей на столько близко къ ней, что (q) лежитъ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Тогда нижняя граница разности $x''_i - x'_i$ въ области (q) будетъ больше нуля. Если бы функція x'_i не была непрерывна вблизи разсматриваемой точки, то существовалъ бы рядъ точекъ $(x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$, расположенныхъ внутри (q) и стремящихся къ предѣльной точкѣ $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$, такихъ, что значенія функціи x'_i стремились бы къ предѣлу, отличному отъ $(x'_i)_0$, т. е., въ силу условія 5, къ предѣлу $(x''_i)_0$. Этотъ рядъ точекъ можно выбрать такъ, что соотвѣтствующія точки $(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})$ стремились бы также къ предѣльной точкѣ, которой можетъ быть только точка $(\alpha''_1, \ldots \alpha''_{m-1})$. Отсюда слѣдуетъ, что существуютъ точки вблизи точки $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$, для которыхъ значенія функціи x'_i какъ угодно мало отличаются отъ $(x''_i)_0$. Разсматриваемому ряду точекъ $(x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$ соотвѣтствуютъ еще другія точки $(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})$, дающія функціи x_i значенія x''_i, и имѣющія предѣльной точкой точку $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{m-1})$. Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ ряду точекъ можно найти такія точки, въ которыхъ значенія функцій x_i' и x_i'' будутъ какъ угодно мало отличаться, соотвѣтственно, отъ $(x_i'')_0$ и $(x_i')_0$, что противорѣчитъ тому, что нижняя граница разности $x_i''-x_i'$ для этихъ точекъ больше нуля и $(x_i'')_0 > (x_i')_0$. Изъ предыдущихъ разсужденій вытекаетъ, что и $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ являются непрерывными функціями отъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$.

Докажемъ теперь, что протяженіе $\Gamma_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$ раздѣляетъ область P на двѣ группы областей такъ, что точки первой группы областей даютъ значенія x_i' для функціи $x_i(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1)$, а точки второй группы даютъ значенія x_i'' для этой функціи. Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ можно было бы двѣ точки области P, дающія одна значеніе x_i', а другая значеніе x_i'' для функціи x_i, соединить непрерывнымъ рядомъ точекъ, не пересѣкающимъ протяженія $\Gamma_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Точки протяженія R, соотвѣтствующія этому ряду, проэктируются на координатное протяженіе $(X_{\lambda_1}, \ldots X_{\lambda_{m-1}})$ непрерывнымъ рядомъ точекъ, расположенныхъ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Для этого ряда точекъ нижняя граница разности $x_i''-x_i'$ больше нуля. Если точка $(x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$ пробѣгаетъ предыдущій рядъ значеній, то функція x_i измѣняется непрерывно и, выйдя изъ начальной точки со значеніемъ x_i', приходитъ въ конечную точку со значеніемъ x_i''. Слѣдовательно, въ нашемъ ряду точекъ существуетъ такая точка, въ которой функція x_i переходитъ сразу отъ значенія x_i' къ значенію x_i'', т. е. претерпѣваетъ разрывъ, что не возможно.

Обозначимъ области первой группы черезъ $P'_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$, а области второй черезъ $P''_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$.

Возьмемъ какую либо точку α_0 протяженія $\Gamma_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$, лежащую внутри P. Въ этой точкѣ должно быть

$$\frac{D(x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})} = 0, \tag{3}$$

ибо иначе область достаточно малая, заключающая внутри точку α_0, преобразовывалась бы въ область координатнаго протяженія $(X_{\lambda_1}, \ldots X_{\lambda_{m-1}})$, заключающую также внутри точку $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$, соотвѣтствующую точкѣ α_0, что не возможно. Ансамбль $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, а слѣдовательно, и $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ являются замкнутыми ансамблями и не содержатъ изолированныхъ точекъ, а потому вблизи точки α_0 расположены непрерывнымъ образомъ еще и другія точки границы $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$. Всѣ эти точки лежатъ на протяженіи Δ, опредѣляемомъ уравненіемъ (3). Среди нихъ можно выбрать такую, вблизи которой $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ являются голоморфными функціями отъ нѣкоторыхъ параметровъ $\sigma_1, \ldots \sigma_{m-2}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1(\sigma_1, \ldots \sigma_{m-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m-1} &= \alpha_{m-1}(\sigma_1, \ldots \sigma_{m-1}), \end{aligned} \tag{4}$$

и вблизи которой нѣтъ точекъ пересѣченія $\varDelta$ съ самимъ собою, а также выполняются условія

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=m-1} \left[\frac{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{m-1})}{D(\sigma_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{m-2})}\right]^2 \neq 0, \\ &\sum_{i=1}^{i=m-1} \left[\frac{(Dx_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{i-1}} x_{\lambda_{i+1}} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\sigma_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{m-2})}\right]^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ $x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ являются функціями отъ $\sigma_1 \ldots \sigma_{m-2}$ черезъ посредство функцій (4).

Обозначимъ черезъ (δ) часть протяженія $\varDelta$, лежащую вблизи выбранной точки, опредѣляемую формулами (4) и на столько малую, что для всѣхъ точекъ ея выполняются условія (5), а также и условіе, что какъ (δ), такъ и соотвѣтствующее протяженіе пространства $(X_{\lambda_1}, X_2, \ldots X_{\lambda_{m-1}})$ не пересѣкаютъ сами себя. Протяженіе (δ) можно окружить областью (γ) на столько близкой къ (δ), что внутри (γ) не будетъ другихъ точекъ протяженія $\varDelta$ кромѣ точекъ, принадлежащихъ (δ). Очевидно, что всѣ точки (δ) принадлежатъ протяженію $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, ибо иначе двѣ точки, одна изъ области $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, а другая изъ области $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, лежащія внутри (γ) можно было бы соединить непрерывной линіей, не пересѣкающей протяженія $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$.

Область, расположенная по обѣ стороны протяженія (δ), преобразуется при помощи формулъ

$$\begin{aligned} x_{\lambda_1} &= x_{\lambda_1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\lambda_{m-1}} &= x_{\lambda_{m-1}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1) \end{aligned} \tag{6}$$

въ область, расположенную только по одну сторону протяженія, соотвѣтствующаго протяженію (δ), а потому, благодаря ограниченіямъ, наложеннымъ на (δ), заключаемъ, что при переходѣ черезъ (δ) опредѣлитель

$$\frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} \tag{7}$$

мѣняетъ знакъ[1].

---

[1] См. «О преобразованіи плоскости на плоскость вблизи особыхъ линій». Сообщенія Х. М. Общ. (2) XIV.

Внутри каждой изъ областей $P'_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$, $P''_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$ этотъ опредѣлитель не можетъ мѣнять знака. Дѣйствительно, пусть въ одной изъ нихъ, напр. въ $P'_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$, существуютъ двѣ точки α' и α'', въ которыхъ опредѣлитель (7) имѣетъ различные знаки. На любой кривой, соединяющей эти двѣ точки и расположенной внутри области $P'_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$, существуетъ точка, въ которой опредѣлитель (7) обращается въ нуль и мѣняетъ знакъ. Ансамбль этихъ точекъ образуетъ протяженіе, раздѣляющее разсматриваемую область, по меньшей мѣрѣ, на двѣ части. На этомъ протяженіи можно найти участокъ (δ) такъ же, какъ было сдѣлано выше. Вблизи этого участка $\alpha_1,\ldots\alpha_{m-1}$ являются двузначными функціями отъ $x_{\lambda_1},\ldots x_{\lambda_{m-1}}$ [1]), и, такъ какъ въ области $P''_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$ существуетъ точка, дающая тѣ же значенія $x_{\lambda_1},\ldots x_{\lambda_{m-1}}$, что и въ области $P'_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$, то точкѣ $(x_{\lambda_1}\ldots x_{\lambda_{m-1}})$ соотвѣтствуютъ, по меньшей мѣрѣ, три точки $(\alpha_1,\ldots\alpha_{m-1})$, а слѣдовательно, и три точки на протяженіи K, что противорѣчитъ условію (9).

Легко видѣть, что въ каждой точкѣ границы $\Gamma_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$ опредѣлитель (7) мѣняетъ знакъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ двѣ смежныя области $P'_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$ и $P''_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$. Въ этихъ областяхъ, какъ видѣли, существуютъ точки, соотвѣтственно, α' и α'', въ которыхъ опредѣлитель (7) имѣетъ противоположные знаки. Соединимъ эти точки съ любой точкой границы $\Gamma_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$, принадлежащей обѣимъ областямъ, кривыми, расположенными внутри этихъ областей. Мы получимъ кривую, соединяющую точки α' и α''. На этой кривой опредѣлитель (7) долженъ обратиться въ нуль и перемѣнить знакъ. Такъ какъ это не можетъ произойти внутри разсматриваемыхъ областей, то должно произойти на ихъ границѣ.

Изъ предыдущаго вытекаетъ, что во всѣхъ областяхъ $P'_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$ опредѣлитель (7) сохраняетъ знакъ такъ же, какъ и въ областяхъ $P''_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}$, и при томъ знаки этого опредѣлителя въ первыхъ и вторыхъ областяхъ противоположны.

Теперь мы можемъ приступить къ преобразованію интеграла (2). Возьмемъ сначала интегралъ

$$J_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}=\mathrm{S}_B\sum_{\lambda_m}\frac{\partial A_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}}{\partial x_{\lambda_m}}\frac{D(x_{\lambda_1}\ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1\ldots\alpha_m)}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_m, \tag{8}$$

гдѣ указатели $\lambda_1,\ldots\lambda_{m-1}$ фиксированы, а λ_m пробѣгаетъ всѣ значенія отъ 1 до n, кромѣ значеній $\lambda_1,\ldots\lambda_{m-1}$. Пусть одно изъ значеній λ_m будетъ μ. Преобразуемъ интегралъ (8) къ новымъ перемѣннымъ при помощи формулъ

[1]) Тамъ же.

$$x_{\lambda_1} = x_{\lambda_1}(\alpha_1, \ldots \alpha_m)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{\lambda_{m-1}} = x_{\lambda_{m-1}}(\alpha_1, \ldots \alpha_m) \quad (9)$$
$$x_\mu = x_\mu(\alpha_1, \ldots \alpha_m),$$

что въ силу сдѣланныхъ ограниченій возможно. Получимъ

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \mathsf{S}_{Y_1} \sum_{\lambda_m} \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_{\lambda_m}} \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} \left| \frac{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m)}{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}} x_\mu)} \right| dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}} dx_\mu$$

или

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \eta \mathsf{S}_{Y_1} \sum_{\lambda_m} \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_{\lambda_m}} \frac{\partial x_{\lambda_m}}{\partial x_\mu} dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}} dx_\mu,$$

гдѣ η есть единица со знакомъ опредѣлителя $\dfrac{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m)}{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}} x_\mu)}$, а Y_1 проэкція протяженія Y, опредѣленнаго формулами (1), на координатное протяженіе $(X_{\lambda_1}, \ldots X_{\lambda_{m-1}}, X_\mu)$.

Въ послѣднемъ интегралѣ подъинтегральная функція есть частная производная по перемѣнному x_μ отъ функціи $A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, разсматриваемой, какъ функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}, x_\mu$, а потому имѣемъ

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \eta \mathsf{S}_{Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} \left(\int_{x'_\mu}^{x''_\mu} \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_\mu} dx_\mu \right) dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}} =$$
$$= \eta \mathsf{S}_{Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} (A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}})'' dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}} -$$
$$- \eta \mathsf{S}_{Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} (A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}})' dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}},$$

гдѣ выраженія $(A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}})''$ и $(A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}})'$ показываютъ, что въ функцію $A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, разсматриваемую, какъ функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}}, x_\mu$, вмѣсто x_μ подставлены, соотвѣтственно, значенія x''_μ и x'_μ, являющіяся однозначными функціями отъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ внутри области $Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$.

Преобразуемъ два послѣдніе интеграла къ перемѣннымъ $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ при помощи формулъ (6), опредѣленныхъ для перваго интеграла въ области $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, для второго въ области $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$. При этомъ x''_μ и x_μ перейдутъ въ функцію $x_\mu(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1)$, опредѣленную, соотвѣтственно, въ тѣхъ же областяхъ. Будемъ имѣть

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \eta \mathsf{S}_{P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} \left| \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} \right| d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m-1} -$$
$$- \eta \mathsf{S}_{P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} \left| \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} \right| d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m-1},$$

гдѣ $A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ выражено въ функціи отъ $x_1, \ldots x_n$, а послѣднія выражены въ функціяхъ $\alpha_1, \ldots \alpha_m$, при чемъ положено $\alpha_m = \beta_1$.

Если обозначимъ черезъ ε единицу со знакомъ опредѣлителя (7) въ области $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, то получимъ

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \varepsilon\eta \mathbf{S}'_P A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m-1},$$

гдѣ положено $\alpha_m = \beta_1$.

Остается опредѣлить произведеніе $\varepsilon\eta$. Функція $x_\mu(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1)$ имѣетъ максимумъ. Этотъ максимумъ она получаетъ въ области $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$. Въ точкахъ, въ которыхъ x_μ получаетъ максимальныя значенія, въ силу условій 7 и 8 имѣемъ

$$\frac{dx_\mu}{d\alpha_1} = 0, \ldots \frac{dx_\mu}{d\alpha_{m-1}} = 0, \frac{dx_\mu}{d\alpha_m} \mp 0,$$

а потому въ этихъ точкахъ

$$\frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}} x_\mu)}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} \alpha_m)} = \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} \frac{dx_\mu}{d\alpha_m}.$$

Такъ какъ въ разсматриваемыхъ точкахъ $\alpha_m = \beta_1$ и при измѣненіи α_m отъ β_1 къ β_2 функція x_μ вначалѣ уменьшается, то знакъ производной $\frac{dx_\mu}{d\alpha_m}$ тождественень со знакомъ разности $\beta_1 - \beta_2$, а слѣдовательно,

$$\eta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{|\beta_1 - \beta_2|} \varepsilon$$

или

$$\varepsilon\eta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{|\beta_1 - \beta_2|}.$$

Итакъ,

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{|\beta_1 - \beta_2|} \mathbf{S}_P A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m-1}.$$

Суммируя полученное выраженіе для $J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ по $\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}$, получимъ

$$\mathbf{S}_{B_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}} \Sigma \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial \lambda_m} \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m =$$

$$= \frac{\beta_1 - \beta_2}{|\beta_1 - \beta_2|} \mathbf{S}_{P_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} \Sigma A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m-1},$$

при чемъ въ правой части положено $\alpha_m = \beta_1$, а λ какъ въ лѣвой, такъ и въ правой части получаютъ всѣ различныя значенія отъ 1 до n.
