# Опытъ аксіоматическаго обоснованія теоріи вѣроятностей.

L'esprit humain éprouve moins (de difficultés) à se porter en avant, qu'à se replier sur lui-même.

*Laplace*. Théorie analytique des probabilités.

Вычисленіе вѣроятностей опирается на нѣсколько аксіомъ и опредѣленій. Однако эти основныя аксіомы обыкновенно не формулируются достаточно отчетливо, и вмѣстѣ съ тѣмъ вопросъ о томъ, какія допущенія необходимы и не находятся ли они въ противорѣчіи между собой, остается открытымъ.

Само опредѣленіе математической вѣроятности неявно содержитъ въ себѣ допущеніе [1]), эквивалентное, по существу, теоремѣ сложенія вѣроятностей, которая нѣкоторыми авторами [2]) принимается за аксіому. Поэтому я считаю не безполезнымъ изложить здѣсь свою попытку аксіоматическаго обоснованія теоріи вѣроятностей. Я буду стоять на чисто математической точкѣ зрѣнія, требующей только точной исчерпывающей формулировки независимыхъ и не противорѣчащихъ другъ другу правилъ, на основаніи которыхъ должны строиться всѣ выводы теоріи вѣроятностей, какъ абстрактной математической дисциплины. Разумѣется, эти правила диктуются намъ потребностями нашего духа, познающаго внѣшній міръ. Но, чтобы не нарушать строго логическаго характера изложенія, я предпочитаю лишь въ концѣ статьи, въ особомъ добавленіи, коснуться вопроса о философскомъ и практическомъ значеніи принциповъ теоріи вѣроятностей.

---

[1]) См. *Лапласъ* «Опытъ философіи теоріи вѣроятностей», стран. 12 русскаго перевода А. К. Власова.

[2]) *Bohlmann* «Technique de l'assurance sur la vie», Encyclopédie des sciences mathématiques, t. I, vol. 4, p. 497.

Глава I.

# Конечныя совокупности предложеній.

## § 1.

### Предварительныя опредѣленія и аксіомы.

**1. Равнозначныя и неравнозначныя предложенія.**

Разсмотримъ конечную или безконечную совокупность символовъ $A$, $B$, $C$ и т. д. Эти символы будемъ называть предложеніями. Мы будемъ писать $M = N$ $(N = M)$, и будемъ называть предложенія $M$ и $N$ *равнозначными*, если условимся, что, при всѣхъ далѣе опредѣленныхъ дѣйствіяхъ надъ нашими символами, всегда возможно символъ $M$ замѣнить черезъ $N$, и наоборотъ. Въ частности, если $M = N$ и $M = L$, то $N = L$.

Допустимъ, что не всѣ данныя предложенія равнозначны, т. е. что *существуетъ два предложенія $A$ и $B$ такія, что $A \neq B$. Если число неравнозначныхъ предложеній конечно, то данную совокупность предложеній мы называемъ конечною.* Въ противномъ случаѣ, совокупность предложеній называется безконечной.

Въ этой главѣ мы разсматриваемъ только *конечныя* совокупности.

**2. Аксіомы, характеризующія операцію (раздѣленія), выражаемую знакомъ „или“.**

a) *Конструктивный принципъ: если существуютъ (въ данной совокупности) предложеніе $A$ и предложеніе $B$, то существуетъ предложеніе $C = (A$ или $B)$.*

b) *Коммутативный принципъ:* $A$ или $B = B$ или $A$.

c) *Ассоціативный принципъ:* $A$ или $(B$ или $C) = (A$ или $B)$ или $C = A$ или $B$ или $C$.

d) *Принципъ тожественности*: $A$ или $A = A$.

Примѣняя первые три принципа мы можемъ, вообще, утверждать существованіе вполнѣ опредѣленнаго предложенія $H = (A$ или $B$ или $\ldots E)$, которое назовемъ *объединеніемъ* предложеній $A, B, \ldots E$. Каждое изъ предложеній $A, B, \ldots E$ называется *частнымъ случаемъ* $H$.

*Слѣдствіе* 1. *Если* $y$ *есть частный случай* $A$, *т. е.* ($x$ или $y$)$=A$, *то* ($A$ или $y$) $= A$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ $x$ или $y = A$, заключаемъ, что

$$x \text{ или } [y \text{ или } y] = A \text{ или } y,$$

откуда $x$ или $y = A$ или $y = A$, ч. и т. д.

*Слѣдствіе* 2. *Если* $y$ *есть частный случай* $A$, *гдѣ* $A$ *есть частный случай* $B$, *то* $y$ *есть частный случай* $B$.

*Слѣдствіе* 3. *Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы* $H$ *было объединеніемъ предложеній* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *состоитъ въ томъ, что* 1) *если для нѣкотораго* $i$ ($i=1, 2, \ldots n$), *имѣемъ* $A_i$ или $y=A_i$, *то* $H$ или $y = H$, 2) *если для всякаго* $i$, $A_i$ или $M = M$, *то* $H$ или $M = M$.

Въ самомъ дѣлѣ, если $H = (A_1$ или $A_2 \ldots$ или $A_n)$, то изъ $A_1$ или $y = A_1$, выводимъ немедленно $H = H$ или $y$, точно также изъ $A_1$ или $M = M$, $A_2$ или $M = M$ и т. д. находимъ [$A$ или $M$ или $A_2$ или $M$ или $\ldots A_n$ или $M$] $= M$, откуда $H$ или $M = M$.

Допустимъ теперь, что кромѣ объединенія $H$ существуетъ предложеніе $H_1$, обладающее тѣми же двумя свойствами. Въ такомъ случаѣ, т. к. $A_i$ или $A_i = A_i$, то для всякаго $i$ имѣемъ

$$H_1 \text{ или } A_i = H_1,$$

откуда

$$H_1 \text{ или } H = H_1.$$

Но такъ какъ, съ другой стороны, для всякаго $i$, $A_i$ или $H = H$, то по второму условію, $H_1$ или $H = H$; слѣдовательно, $H_1 = H$, ч. и т. д.

*Слѣдствіе* 4. *Если* $A$ *есть частный случай* $B$, *а* $B$—*частный случай* $A$, *то* $A = B$.

Въ самомъ дѣлѣ, по условію: $A$ или $x = B$, $B$ или $y = A$. Слѣдовательно, по слѣдствію 1, $A$ или $B = B = A$, ч. и т. д.

*Слѣдствіе* 5. *Всякое предложеніе равнозначно объединенію всѣхъ своихъ частныхъ случаевъ.*

**3. Теорема существованія достовѣрнаго (истиннаго) предложенія.**

*Въ данной совокупности всегда существуетъ предложеніе* $\Omega$, *обладающее свойствомъ, что, каково бы ни было предложеніе* $A$,

$$\Omega \text{ или } A = \Omega; \qquad \text{(I)}$$

*предложеніе* $\Omega$ *называется истиннымъ или достовѣрнымъ.*

Дѣйствительно, составимъ объединеніе $\Omega$ всѣхъ предложеній совокупности: согласно опредѣленію понятія объединенія, $\Omega$ удовлетворяетъ условію (I).

Данное опредѣленіе истиннаго предложенія означаетъ, что утверждать правильность истиннаго предложенія или другого, тоже самое, что утверждать истинное предложеніе.

*Слѣдствіе* 6. *Всѣ истинныя предложенія равнозначны.*

**4. Аксіома существованія невозможнаго (ложнаго) предложенія.**

*Въ данной совокупности существуетъ предложеніе* $O$, *называемое ложнымъ* или *невозможнымъ, удовлетворяющее условію, что для всякаго* $A$,

$$A \text{ или } O = A \tag{II}$$

Такимъ образомъ утвержденіе ложнаго предложенія или предложенія $A$, равнозначно утвержденію $A$.

*Слѣдствіе* 7. *Всѣ ложныя предложенія равнозначны.*

Въ самомъ дѣлѣ, если $O$ и $O'$ два ложныхъ предложенія, то

$$O \text{ или } O' = O = O'.$$

*Слѣдствіе* 8. *Истинное предложеніе не можетъ быть равнозначно ложному.*

Дѣйствительно, еслибы мы имѣли $\Omega = O$, то, для всякаго $A$, $(A$ или $O) = (A$ или $\Omega) = A = \Omega = O$, т. е. всѣ предложенія совокупности были бы равнозначны.

**5. Совмѣщеніе предложеній.**

Если даны два предложенія $A$ и $B$, то всегда существуетъ предложеніе $x$, удовлетворяющее условію, что

$$x \text{ или } A = A, \quad x \text{ или } B = B; \tag{III}$$

дѣйствительно, этому условію удовлетворяетъ во всякомъ случаѣ невозможное предложеніе $O$.

Предложенія $A$ и $B$ называются *несовмѣстимыми,* если $O$ является единственнымъ предложеніемъ, удовлетворяющимъ условію (III). Предложенія $A$ и $B$ называются *совмѣстимыми*, если, кромѣ $O$, есть другія предложенія, удовлетворяющія условію (III).

Всякое предложеніе $x$, удовлетворяющее (III), можно назвать *частнымъ совмѣстнымъ случаемъ* предложеній $A$ и $B$.

*Объединеніе* $H$ *всѣхъ частныхъ совмѣстныхъ случаевъ* $A$ *и* $B$, *т. е. всѣхъ предложеній* $x$, *удовлетворяющихъ условію (III), называется совмѣщеніемъ предложеній* $A$ и $B$, что выражается символомъ $H = (A$ и $B)$. Формально $H = (A$ и $B)$ опредѣляется условіями: $H$ или $A = A$, $H$ или $B = B$, при чемъ, если $x$ или $A = A$, $x$ или $B = B$, то $x$ или $H = H$.

*Слѣдствіе* 9. *Операція (совмѣщенія), выражаемая символомъ* «и» *коммутативна*: $(A$ и $B)=(B$ и $A)$.

*Слѣдствіе* 10. *Операція, выражаемая символомъ* «и», *ассоціативна*: $A$ и $(B$ и $C)=(A$ и $B)$ и $C$.

Въ самомъ дѣлѣ, если $z$ удовлетворяетъ условіямъ

$$z \text{ или } A=A, \quad z \text{ или } B=B, \quad z \text{ или } C=C,$$

то это означаетъ, что

$$z \text{ или } (A \text{ и } B)=(A \text{ и } B), \quad z \text{ или } C=C.$$

Поэтому объединеніемъ $H$ всѣхъ $z$ будетъ

$$H=(A \text{ и } B) \text{ и } C,$$

но такимъ же точно образомъ убѣждаемся, что

$$H=A \text{ и } (B \text{ и } C), \text{ ч. и т. д.}$$

*Слѣдствіе* 11. *Если* $A$ или $B=A$, *то* $A$ и $B=B$, *и наоборотъ.*

Дѣйствительно, если $A$ или $B=A$, то условія

$$z \text{ или } A=A, \quad z \text{ или } B=B,$$

равнозначны условію $z$ или $B=B$, поэтому $A$ и $B=B$.

Обратно, если $A$ и $B=B$, это означаетъ, что равенство $z$ или $B=B$ всегда имѣетъ слѣдствіемъ $z$ или $A=A$, т. е., въ частности, $B$ или $A=A$.

*Слѣдствіе* 12. $A$ и $O=O$, $A$ и $\Omega=A$.

*Слѣдствіе* 13. *Операція, выражаемая символомъ* «и», *удовлетворяетъ принципу тожественности*: $A$ и $A=A$.

**6. Ограничительный принципъ (ограничительная аксіома).**

*Всякій частный случай* $(A$ или $B)$ *есть объединеніе нѣкотораго частнаго случая* $A$ *и нѣкотораго частнаго случая* $B$.

**Первая теорема распредѣлительности.**

$$A \text{ и } (B \text{ или } C)=(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C).$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ

$$(A \text{ и } B) \text{ или } A=A, \quad (A \text{ и } C) \text{ или } A=A,$$

заключаемъ, что

$$[(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)] \text{ или } A=A.$$

Точно также изъ

$$(A \text{ и } B) \text{ или } B = B,\ (A \text{ и } C) \text{ или } C = C,$$

выводимъ

$$[(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)] \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C.$$

Такимъ образомъ $[(A \text{ и } B)$ или $(A \text{ и } C)]$ есть совмѣстный частный случай предложенія $A$ и предложенія $(B$ или $C)$.

Теперь нужно еще показать, что и наоборотъ, если

$$z \text{ или } A = A,\quad z \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C,$$

то

$$z \text{ или } [(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)] = (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C).$$

Для этого замѣчаемъ, что, на основаніи ограничительнаго принципа,

$$z = x \text{ или } y,$$

гдѣ $x$ есть частный случай $B$, а $y$ есть частный случай $C$. Тогда $x$ или $A = A$, $x$ или $B = B$, откуда

$$x \text{ или } (A \text{ и } B) = A \text{ и } B.$$

Точно также

$$y \text{ или } (A \text{ и } C) = A \text{ и } C.$$

Слѣдовательно

$$x \text{ или } y \text{ или } (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C) = (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C),$$

т. е.

$$z \text{ или } [(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)] = (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C), \text{ ч. и т. д.}$$

**Вторая теорема распредѣлительности.**

$$A \text{ или } (B \text{ и } C) = (A \text{ или } B) \text{ и } (A \text{ или } C).$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$(A \text{ или } B) \text{ и } (A \text{ или } C) = \{[A \text{ или } B] \text{ и } A\} \text{ или } \{[A \text{ или } B] \text{ и } C\} =$$
$$= A \text{ или } [(A \text{ или } B) \text{ и } C] = A \text{ или } [(A \text{ и } C) \text{ или } (B \text{ и } C)] =$$
$$= A \text{ или } (B \text{ и } C), \text{ ч. и т. д.}$$

**7.** Этими теоремами вмѣстѣ съ принципами ассоціативности и коммутативности, относящимися къ операціямъ «или» и «и», исчерпываются всѣ правила вычисленій съ этими символами.

Важно отмѣтить, что *всѣ правила, касающіяся совмѣщенія предложеній* (символа «и»), *являются необходимымъ слѣдствіемъ правилъ, относящихся къ объединенію предложеній* (символъ «или»). При этомъ весьма замѣчательнымъ является наблюдаемый здѣсь дуализмъ: *правила, относящіяся къ символамъ* «или» и «и» *совершенно тождественны, такъ что всѣ формулы остаются въ силѣ, если эти символы взаимно* *перемѣстить, при условіи одновременной взаимной замѣны невозможнаго предложенія O и истиннаго предложенія Ω.* Дѣйствительно, достаточно обозрѣть все вышеизложенное, чтобы замѣтить, что единственная разница между правилами, опредѣляющими объединеніе предложеній и ихъ совмѣщеніе та, что $A$ и $\Omega = A$, $A$ и $O = O$, между тѣмъ какъ $A$ или $\Omega = \Omega$, $A$ или $O = A$.

**8. Принципъ (аксіома) единственности.**

Для завершенія нашей системы мы введемъ еще одинъ принципъ, лежащій въ основѣ понятія *отрицанія*. Этому принципу, который мы назовемъ *принципомъ единственности*, можно придать слѣдующую форму: *Если предложеніе $\alpha$ совмѣстимо со всѣми предложеніями совокупности (кромѣ O), оно истинно: $\alpha = \Omega$.*

**Опредѣленіе отрицанія.** *Объединеніе $\overline{A}$ всѣхъ несовмѣстимыхъ съ $A$ предложеній называется отрицаніемъ $A$.*

*Слѣдствіе* 14. $\overline{\Omega} = O$.

*Слѣдствіе* 15. $\overline{O} = \Omega$.

*Слѣдствіе* 16. *Если* $\overline{x} = O$, *то* $x = \Omega$.

Дѣйствительно, всѣ предложенія (кромѣ O) совмѣстимы съ $x$, слѣдовательно, на основаніи принципа единственности, $x = \Omega$.

*Слѣдствіе* 17. *Если* $x = \Omega$, *то* $\overline{x} = o$.

Въ самомъ дѣлѣ, т. к. $\overline{\Omega}$ есть объединеніе несовмѣстимыхъ съ $x$ предложеній, то и $\overline{\Omega}$ (вслѣдствіе ограничительнаго принципа) несовмѣстимо съ $x$; слѣдовательно, $\overline{x} = O$.

Назовемъ *единственно возможными* всякія нѣсколько предложеній, объединеніе которыхъ есть $\Omega$.

Теорема. *Предложенія $A$ и $\overline{A}$ единственно возможны и несовмѣстимы, т. е.* $A$ или $\overline{A} = \Omega$, $A$ и $\overline{A} = O$.

Дѣйствительно, всякое предложеніе есть либо частный случай $\overline{A}$, либо совмѣстимо съ $A$; поэтому, на основаніи принципа единственности [1]) $A$ или $\overline{A} = \Omega$. Съ другой стороны, т. к. $\overline{A}$ есть объединеніе несовмѣстимыхъ съ $A$ предложеній, то $A$ и $\overline{A} = O$.

Теорема. *Отрицаніе предложенія $\overline{A}$ равнозначно $A$, т. е.* $\overline{\overline{A}} = A$.

Для этого достаточно показать, что изъ условій

$$A \text{ или } B = A_1 \text{ или } B, \quad A \text{ и } B = A_1 \text{ и } B$$

вообще вытекаетъ $A = A_1$.

[1]) Обратно, если мы примемъ, что $A$ или $\overline{A} = \Omega$, т. е., что предложеніе и его отрицаніе единственно возможны, то отсюда вытекаетъ принципъ единственности. Дѣйствительно, если $\alpha$ совмѣстимо со всякимъ предложеніемъ (кромѣ $O$), то $\overline{\alpha} = O$; откуда $\alpha$ или $O = \Omega$; слѣдовательно, $\alpha = \Omega$.

Дѣйствительно,

$$A_1 = [A_1 \text{ и } (B \text{ или } A_1)] = [A_1 \text{ и } (B \text{ или } A)] =$$
$$= [(A_1 \text{ и } B) \text{ или } (A_1 \text{ и } A)] = [(A \text{ и } B) \text{ или } (A_1 \text{ и } A)] =$$
$$= [A \text{ и } (B \text{ или } A_1) = [A \text{ и } (B \text{ или } A)] = A.$$

*Опредѣленіе. Если* $(A$ или $B) = B$, *то объединеніе* $C$ *всѣхъ предложеній, несовмѣстимыхъ съ* $A$ *и являющихся частными случаями* $B$, *называется дополненіемъ* $A$ до $B$. Такимъ образомъ $C = (B$ и $\overline{A})$. Обратно, $A$ есть дополненіе $C$ до $B$. Дѣйствительно, $A$ или $C = B$, $A$ и $C = O$. Еслибы дополненіемъ $C$ до $B$ было $A_1$ то мы имѣли бы тоже $A_1$ или $C{=}B$, $A_1$ и $C{=}O$, откуда $A{=}A_1$. Поэтому $A{=}(B$ и $\overline{C})$.

*Слѣдствіе* 18. $\overline{(A \text{ и } B)} = \overline{A}$ или $\overline{B}$.

Дѣйствительно,

$$[(A \text{ и } B) \text{ или } \overline{A}] \text{ или } \overline{B} = [\Omega \text{ и } B] \text{ или } \overline{B} = \Omega;$$
$$(A \text{ и } B) \text{ и } (\overline{A} \text{ или } \overline{B}) = (A \text{ и } B \text{ и } \overline{A}) \text{ или } (A \text{ и } B \text{ и } \overline{B}) = O.$$

### 9. Рѣшеніе символическихъ уравненій.

Вышеизложенные принципы позволяютъ рѣшать или убѣждаться въ неразрѣшимости соотношеній между предложеніями, связанными при помощи символовъ «или» и «и».

Легко убѣдиться, что всякое выраженіе, въ которое входятъ предложенія $x$ и $x$, приводится, на основаніи предыдущихъ правилъ, къ формѣ

$$A \text{ или } (a \text{ и } x) \text{ или } (b \text{ и } \overline{x}).$$

Мы называемъ символическимъ уравненіемъ съ однимъ неизвѣстнымъ $x$ утвержденіе равнозначности двухъ выраженій, изъ которыхъ одно по крайней мѣрѣ зависитъ отъ $x$. Такимъ образомъ всякое уравненіе приводится къ виду

$$A \text{ или } (a \text{ и } x) \text{ или } (b \text{ и } \overline{x}) = A' \text{ или } (a' \text{ и } x) \text{ или } (b' \text{ и } \overline{x}). \qquad (1)$$

Это уравненіе равнозначно, вообще, двумъ различнымъ уравненіямъ, которыя должны быть одновременно удовлетворены:

$$[A \text{ или } (a \text{ и } x) \text{ или } (b \text{ и } \overline{x})] \text{ или } [\overline{A'} \text{ и } \overline{(a' \text{ и } x)} \text{ и } \overline{(b' \text{ и } \overline{x})}] = \Omega \qquad (2)$$

и

$$[A' \text{ или } (a' \text{ и } x) \text{ или } (b' \text{ и } \overline{x})] \text{ или } [\overline{A} \text{ и } \overline{(a \text{ и } x)} \text{ и } \overline{(b \text{ и } \overline{x})}] = \Omega \qquad (3)$$

т. к. уравненіе (2) выражаетъ, что въ уравненіи (1) вторая часть есть частный случай первой части; уравненіе же (3) выражаетъ, что первая часть уравненія (1) есть частный случай второй части. При помощи теоремы распредѣлительности уравненіе (2) преобразуемъ въ

$$[A \text{ или } (\overline{A'} \text{ и } \overline{a'} \text{ и } \overline{b'})] \text{ или } \{[a \text{ или } (\overline{A'} \text{ и } \overline{a'})] \text{ и } x\} \text{ или}$$
$$\text{или } \{[b \text{ или } (\overline{A'} \text{ и } \overline{b'})] \text{ и } \overline{x}\} = \Omega. \qquad (2 \text{ bis})$$

Такимъ образомъ каждое изъ уравненій (2) и (3) приведется къ виду

$$B \text{ или } (C \text{ и } x) \text{ или } (D \text{ и } \overline{x}) = \Omega, \qquad (4)$$

т. е.

$$[B \text{ или } C \text{ или } D] \text{ и } [B \text{ или } x \text{ или } D] \text{ и } [B \text{ или } C \text{ или } \overline{x}] = \Omega,$$

откуда

$$B \text{ или } C \text{ или } D = \Omega, \; B \text{ или } D \text{ или } x = \Omega, \; B \text{ или } C \text{ или } \overline{x} = \Omega. \qquad (5)$$

Равенство

$$B \text{ или } C \text{ или } D = \Omega \qquad (6)$$

есть необходимое и достаточное условіе [1]) разрѣшимости уравненія (4). Дѣйствительно, равенство

$$B \text{ или } D \text{ или } x = \Omega$$

означаетъ, что

$$x \text{ или } (\overline{B} \text{ и } \overline{D}) = x. \qquad (7)$$

Точно также равенство $B$ или $C$ или $\overline{x} = \Omega$ означаетъ, что

$$x \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C; \qquad (8)$$

но для одновременнаго осуществленія (7) и (8) необходимо и достаточно, чтобы

$$(\overline{B} \text{ и } \overline{D}) \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C;$$

т. е.

$$\overline{D} \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C, \qquad (9)$$

что эквивалентно условію (6).

Если условіе (9), эквивалентное условію (6), соблюдено, то уравненія (7) и (8) означаютъ, что $x$ есть частный случай ($B$ или $C$), включающій въ себѣ ($\overline{B}$ и $\overline{D}$), т. е. общее рѣшеніе уравненія (4) есть

$$x = (\overline{B} \text{ и } \overline{D}) \text{ или } [(B \text{ или } C) \text{ и } \delta], \qquad (10)$$

гдѣ $\delta$ есть произвольное предложеніе.

---

[1]) Примѣняя это условіе къ данному уравненію (1), находимъ, что для его разрѣшимости необходимо и достаточно, чтобы были соблюдены условія:

$$[A \text{ или } a \text{ или } b] \text{ или } [\overline{A'} \text{ и } (\overline{a'} \text{ или } \overline{b'})] = \Omega,$$
$$[A' \text{ или } a' \text{ или } b'] \text{ или } [\overline{A} \text{ и } (\overline{a} \text{ или } \overline{b})] = \Omega.$$

Въ частности, условіе (6) соблюдено, если $B$ или $D = \Omega$, тогда уравненіе (4) обращается въ $[B$ или $(C$ и $x)$ или $\bar{x}] = \Omega$, имѣющее рѣшеніемъ $x = [(B$ или $C)$ и $\delta]$.

Равенство (4) будетъ тождествомъ въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда: $B$ или $D = \Omega$, $B$ или $C = \Omega$. Напротивъ уравненіе (4) допускаетъ только одно рѣшеніе лишь при условіи, что $\bar{B}$ и $\bar{D} = B$ или $C$, откуда $B = O$, $C = \bar{D}$; такимъ образомъ получимъ:

*Слѣдствіе* 19. *Уравненіе*

$$(C \text{ и } x) \text{ или } (\bar{C} \text{ и } \bar{x}) = \Omega$$

*имѣетъ единственнымъ рѣшеніемъ* $x = C$.

Мы не будемъ останавливаться на дальнѣйшемъ изложеніи примѣненія выше указанныхъ правилъ символическаго счисленія [1]). Для насъ теперь болѣе важно перейти къ доказательству независимости и отсутствія противорѣчій между этими правилами.

## § 2.

### Непротиворѣчивость и независимость аксіомъ.

#### 10. Система чиселъ, соотвѣтствующая совокупности предложеній.

Въ настоящей статьѣ я не ставлю себѣ цѣлью обоснованіе ариѳметики; напротивъ, цѣлое число и его основныя свойства являются для насъ здѣсь простыми понятіями, лишенными противорѣчія. Поэтому для установленія непротиворѣчивости предлагаемой нами системы опредѣленій и аксіомъ, достаточно будетъ построить систему чиселъ, удовлетворяющихъ всѣмъ аксіомамъ, а для доказательства независимости, мы построимъ системы чиселъ, удовлетворяющихъ однимъ аксіомамъ, но нарушающихъ другія.

Съ этою цѣлью положимъ, что наши символы $A$, $B$,... означаютъ какія-нибудь цѣлыя числа, знакъ равнозначности $(=)$ означаетъ равенство; объединеніе ($A$ или $B$) общій наибольшій (среди разсматриваемыхъ чиселъ) дѣлитель чиселъ $A$ и $B$. Изъ свойства наибольшаго дѣлителя вытекаетъ, что принципы *ассоціативный*, *коммутативный* и принципъ *тожественности* соблюдены. Ничто не мѣшаетъ намъ выбрать такъ наши числа, чтобы общій дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ всегда находился среди данныхъ чиселъ: напр., 1, 2, 3; такимъ образомъ мы осуществляемъ и *конструктивный* принципъ. Напротивъ, мы нарушимъ конструктивный принципъ, если возьмемъ систему чиселъ: 2, 3, 4;

---

[1]) См. также «Algebra der Logik» Schröder.

(сюда необходимо было бы прибавить число 1, еслибъ мы хотѣли возстановить конструктивный принципъ). Существованіе истиннаго предложенія, т. е. общаго дѣлителя всѣхъ данныхъ чиселъ вытекаетъ, какъ мы видѣли, изъ конструктивнаго принципа [1]). Но существованіе ложнаго предложенія налагаетъ новое ограниченіе на нашу систему чиселъ, ибо ложному предложенію должно соотвѣтствовать число, кратное всѣмъ даннымъ; такимъ образомъ въ системѣ чиселъ: 1, 2, 3, мы не имѣемъ числа, представляющаго ложное предложеніе, и для осуществленія аксіомы существованія ложнаго предложенія нужно добавить число 6 или любое число кратное 6.

**11. Независимость ограничительнаго принципа.**

Совмѣщенію $(A$ и $B)$ двухъ предложеній соотвѣтствуетъ наименьшее изъ чиселъ кратныхъ числамъ $A$ и $B$, принадлежащихъ данной системѣ чиселъ. Въ виду существованія ложнаго предложенія, т. е. числа, кратнаго всѣмъ даннымъ числамъ, совмѣщеніе $(A$ и $B)$ всегда существуетъ въ данной системѣ и удовлетворяетъ, какъ было установлено, коммутативному и ассоціативному принципу. Но для доказательства теоремъ дистрибутивности, мы ввели еще одну аксіому, подъ названіемъ ограничительнаго принципа: *если $\beta$ есть частный случай $(A$ или $B)$, то онъ долженъ быть объединеніемъ нѣкотораго частнаго случая $A$ съ нѣкоторымъ частнымъ случаемъ $B$.* Въ нашей системѣ чиселъ этотъ принципъ гласитъ: *если $\beta$ есть число, кратное общему наибольшему дѣлителю $A$ и $B$, то оно представляетъ собой общаго наибольшаго дѣлителя нѣкоторыхъ двухъ чиселъ, соотвѣтственно кратныхъ $A$ и $B$.*

Этому условію удовлетворитъ система чиселъ: $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, гдѣ $p_i$ суть какія-нибудь простыя числа, а показатели $k_i$ суть *всѣ* цѣлыя не отрицательныя числа, не превышающія нѣкоторыхъ данныхъ чиселъ $c_i$. Напротивъ, если напримѣръ, мы возьмемъ систему, удовлетворяющую всѣмъ предшествующимъ условіямъ, кромѣ послѣдняго: $1,\ p_1,\ p_2 \ldots,\ p_n,\ p_1 p_2 \ldots p_n$, гдѣ $n \geqq 3$, то ограничительный принципъ не будетъ соблюденъ, ибо общій наибольшій дѣлитель $p_1$ и $p_2$ есть 1, но $p_3$ не является общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ вида $x_1 p_1$ и $x_2 p_2$, принадлежащихъ нашей системѣ.

**12. Принципъ единственности и совершенныя совокупности.**

Остается, наконецъ, разсмотрѣть принципъ единственности, посредствомъ котораго мы установили понятіе отрицанія. Для осуществленія

[1]) Можно было бы доказать, что и обратно, допущеніе существованія истиннаго предложенія имѣетъ слѣдствіемъ конструктивный принципъ; поэтому въ конечной совокупности конструктивный принципъ и аксіома существованія истиннаго предложенія являются эквивалентными.

этого принципа, (выражающаго, что 1 есть единственное число, имѣющее со всякимъ числомъ наименьшее кратное, отличное отъ общаго кратнаго всѣхъ чиселъ) вмѣстѣ со всѣми предыдущими, необходимо и достаточно взять въ предшествующей системѣ чиселъ всѣ $c_i = 1$. Дѣйствительно, наименьшее кратное чиселъ $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ и $L = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ есть $p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_n^{h_n}$, гдѣ $h_i$ равно наибольшему изъ чиселъ $\alpha_i$ и $k_i$. Нашъ принципъ означаетъ, что всѣ $\alpha_i = 0$, если изъ неравенства $\sum_1^n (c_i - k_i) > 0$ вытекаетъ $\sum_1^n (c_i - h_i) > 0$; такимъ образомъ, онъ будетъ соблюденъ, если всѣ $c_i = 1$, и не будетъ соблюденъ, если хоть одно $c_i > 1$. (Напримѣръ, въ системѣ: 1, 2, 3, 4, 6, 12 принципъ единственности не соблюденъ— предложеніе, соотвѣтствующее числу 2, было бы совмѣстимо со всѣми предложеніями, поэтому его отрицаніемъ служило бы только ложное предложеніе, и не будучи истиннымъ, оно обладало бы однако важнѣйшимъ аттрибутомъ истиннаго предложенія).

Необходимо замѣтить, что *ограничительный принципъ также независимъ и отъ принципа единственности*, какъ это видно изъ примѣра: 1, $p_1$, $p_2$, $\ldots p_n$, $p_1 p_2 \ldots p_n$, гдѣ принципъ единственности, очевидно, осуществленъ, между тѣмъ какъ мы видѣли, что ограничительный принципъ здѣсь нарушенъ.

Итакъ мы видимъ, что *принятыя нами послѣдовательно аксіомы независимы и другъ другу не противорѣчатъ,* ибо системѣ предложеній, подчиненной имъ, соотвѣтствуетъ система цѣлыхъ чиселъ, лишенныхъ квадратныхъ дѣлителей: 1; $p_1$; $p_2 \ldots$; $p_k$; $p_1 p_2$; $\ldots$; $p_1 p_2 p_3$; $\ldots$; $p_1 p_2 \ldots p_k$, представляющихъ всевозможныя произведенія изъ простыхъ чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

*Совокупность предложеній, удовлетворяющихъ всѣмъ нашимъ аксіомамъ, мы назовемъ совершенною совокупностью, и только съ такого рода совокупностями мы и будемъ имѣть дѣло въ дальнѣйшемъ.*

Примѣчаніе. Наше доказательство независимости аксіомъ, т. е. невозможности получить послѣдовательно вводимыя аксіомы, какъ слѣдствіе изъ остальныхъ, не должно, мнѣ кажется, вызвать никакихъ принципіальныхъ возраженій. Вопросъ о непротиворѣчивости аксіомъ, напротивъ, требуетъ разъясненія. Если мы беремъ, напримѣръ, систему чиселъ: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 и выражаемъ словесно всѣ соотношенія дѣлимости между этими числами, то, какъ можно провѣрить непосредственно, мы получаемъ рядъ не противорѣчащихъ другъ другу словесныхъ утвержденій, (т. е. мы не приходимъ къ равенствамъ не равныхъ чиселъ) при чемъ для насъ не имѣетъ значенія смыслъ словъ наименьшее кратное, наибольшій дѣлитель и тѣ общіе разсужденія, изъ которыхъ наши утвержденія вытекаютъ; важно лишь то, что мы имѣемъ здѣсь опредѣленную систему объектовъ, взаимоотношенія между которыми удовлетворяютъ всѣмъ аксіомамъ. Такимъ образомъ числа являются для насъ только удобнымъ и нагляднымъ пріемомъ для осуществленія системы символовъ, удовлетворяющихъ всѣмъ аксіомамъ. Чтобы убѣдиться въ существованіи системы съ сколь угодно большимъ числомъ предложеній, нужно лишь понятіе о счетѣ, какъ взаимно однозначномъ соотвѣтствіи между элементами двухъ конечныхъ совокупностей, и принципъ математической индукціи.

Слѣдуетъ также отмѣтить независимость аксіомъ b, c, d. Не останавливаясь на этомъ вопросѣ, который для дальнѣйшаго не имѣетъ значенія, ограничимся лишь слѣдующими указаніями. Принципъ тожественности (d) въ *конечной* совокупности занимаетъ особое мѣсто, потому что необходимо, чтобы всякая операція, произведенная конечное число разъ надъ каждымъ даннымъ символомъ, снова возвращала насъ къ тому же символу. Вслѣдствіе этого всегда возможно операцію «или» замѣнить операціей $(\text{или})^n$, т. е. повтореніемъ операціи «или» $n$ разъ такъ, чтобъ принципъ былъ соблюденъ. Это замѣчаніе въ то же время даетъ возможность легко построить систему чиселъ, для которыхъ принципъ (d) не соблюдается. Дѣйствительно, возьмемъ числа: 1, 2, —2, 3, —3, 6. Пусть операція «или» для положительныхъ чиселъ сохраняетъ прежнее значеніе; съ другой стороны, если оба числа отрицательны, то операція «или» приводитъ къ ихъ наибольшему дѣлителю со знакомъ $+$, если же числа имѣютъ разные знаки, то наибольшій дѣлитель берется со знакомъ $-$, при чемъ, т. к. въ нашей совокупности нѣтъ числа $-1$, мы условливаемся замѣнять $-1$ черезъ $+1$. Принципъ тожественности при этомъ нарушается ($-2$ или $-2$)$=2$, но всѣ остальные принципы соблюдены безъ противорѣчій. Разумѣется, цѣлый рядъ теоремъ, при этомъ нарушается, и въ частности, изъ принципа единственности не вытекаетъ уже единственность отрицанія всякаго предложенія.

## § 3.

## Структура и преобразованіе конечныхъ совершенныхъ совокупностей предложеній.

### 13. Элементарныя предложенія.

Всякое предложеніе совокупности отличное отъ $O$, не имѣющее иныхъ частныхъ случаевъ кромѣ себя и $O$, называется *элементарнымъ* предложеніемъ.

*Слѣдствіе* 1. *Въ совершенной совокупности каждое предложеніе имѣетъ частнымъ случаемъ по крайней мѣрѣ одно элементарное предложеніе.*

Дѣйствительно, если $A \neq O$ не элементарное предложеніе, то оно имѣетъ частный случай $B \neq O$, отличный отъ $A$; если $B$ не элементарное предложеніе, то оно имѣетъ частный случай $C$ и т. д.

Такъ какъ число предложенiй ограничено, то такимъ путемъ мы должны наконецъ дойти до элементарнаго предложенiя.

*Слѣдствiе* 2. *Если въ совершенной совокупности есть два различныхъ элементарныхъ предложенiя, то они несовмѣстимы.*

Теорема. *Всякое предложенiе (кромѣ O) представляетъ объединенiе элементарныхъ предложенiй.*

Въ самомъ дѣлѣ, если $\alpha$ есть элементарное предложенiе, являющееся частнымъ случаемъ нѣкотораго предложенiя $A$, то $A = (\alpha$ или $A_\alpha)$, гдѣ $A_\alpha$ есть дополненiе $\alpha$ до $A$; если $A_\alpha$ элементарное предложенiе, то для $A$ теорема справедлива; въ противномъ случаѣ $A_\alpha$ имѣетъ элементарное предложенiе $\beta$, и $A = (\alpha$ или $\beta$ или $A_{\alpha\beta})$, гдѣ $A_{\alpha\beta}$ есть дополненiе $\beta$ до $A_\alpha$; продолжая тоже разсужденiе, мы дойдемъ наконецъ до послѣдняго элементарнаго предложенiя $A$, такъ что $A = (\alpha$ или $\beta$ или ... ... или $\lambda)$, гдѣ $\alpha$, $\beta$, ..., $\lambda$ — элементарныя предложенiя.

*Слѣдствiе* 3. *Если въ совокупности n элементарныхъ предложенiй, то общее число неравнозначныхъ предложенiй равно* $2^n$.

Дѣйствительно, если $A$ содержитъ по крайней мѣрѣ одно элементарное предложенiе, не входящее въ $B$, то $A \neq B$. Слѣдовательно, число различныхъ предложенiй (не считая $O$) равно $C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$; если же сюда присоединить $O$, то получимъ [1]) общее число предложенiй $2^n$.

Теорема. *Существуютъ совершенныя совокупности со всякимъ числомъ n элементарныхъ предложенiй.*

Въ самомъ дѣлѣ, если имѣемъ невозможное предложенiе $O$ и $n$ несовмѣстимыхъ предложенiй: $a_1$, $a_2$, ... $a_n$, то, составляя всевозможныя объединенiя по 2, по 3 и т. д., можемъ считать ихъ предложенiями, при чемъ всѣ аксiомы тогда будутъ соблюдены: въ частности, отрицанiе каждаго есть объединенiе изъ остальныхъ данныхъ предложенiй.

Примѣчанiе. Непосредственное введенiе элементарныхъ предложенiй могло бы упростить обоснованiе теорiи *конечныхъ* совершенныхъ совокупностей; но такой порядокъ изложенiя, какъ будетъ видно изъ дальнѣйшаго, долженъ быть отвергнутъ, имѣя въ виду *безконечныя* совокупности.

---

[1]) Можно условиться для того, чтобы не исключать ложнаго предложенiя, говорить, что оно есть объединенiе изъ $O$ элементарныхъ предложенiй, т. е. ложное предложенiе не содержитъ ни одного элементарнаго предложенiя.

**14. Разложеніе и соединеніе совершенныхъ совокупностей.**

Если изъ данной совершенной совокупности $H$ выдѣлить какія-нибудь $k$ несовмѣстимыхъ и единственно возможныхъ предложеній $B_1$, $B_2$, $\ldots B_k$ и ихъ всевозможныя объединенія, число которыхъ (включая $O$ и $\Omega$) равно $2^k$, то мы составимъ новую совершенную совокупность $G$, которую назовемъ частью $H$. Предложенія $B_1$, $B_2$, $\ldots$, $B_k$ будутъ элементарными предложеніями $G$.

Возьмемъ какой-нибудь другой рядъ несовмѣстимыхъ и единственно возможныхъ предложеній $B'_1$, $B'_2$, $\ldots B'_e$, изъ которыхъ составимъ новую совокупность $G_1$. *Совокупности* $G_1$ *и* $G$ *называются связанными, если существуетъ по крайней мѣрѣ одна пара предложеній* $B_i$ и $B'_j$ *несовмѣстимыхъ между собой* ($B_i$ и $B'_j$)$=0$. Напротивъ, если ($B_i$ и $B'_j$)$\neq 0$, для всѣхъ значеній $i$ и $j$, то совокупности $G_1$ и $G$ называются *не связанными* или *отдѣльными.*

Если въ $H$ не входитъ иныхъ предложеній, кромѣ тѣхъ, которыя получаются отъ совмѣщенія предложеній совокупностей $G_1$ и $G$, то совокупность $H$ называется *соединеніемъ* совокупностей $G$ и $G_1$. Точно также $H$ можетъ быть разложено и на 3, 4 и т. д. части, и $H$ будетъ называться соединеніемъ этихъ частей.

Замѣтимъ, что совокупность $H$ можетъ быть разложена на отдѣльныя (не связанныя) части тогда и только тогда, когда число $n$ ея элементарныхъ предложеній есть число не простое, а составное. Дѣйствительно, если $k$ элементарныхъ предложеній $B_i$ совокупности $G$ всегда совмѣстимы со всякимъ изъ $l$ элементарныхъ предложеній $B'_j$ совокупностности $G_1$, то ($B_i$ и $B'_j$) составятъ $k.l$ элементарныхъ предложеній соединенія $G$ и $G_1$.

Напримѣръ, если (какъ при бросаніи игральной кости) мы имѣемъ 6 элементарныхъ предложеній $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, то мы можемъ составить двѣ отдѣльныя части: совокупность $G$, у которой элементарными предложеніями служитъ ($A_1$ или $A_2$), ($A_3$ или $A_4$), ($A_5$ или $A_6$), и совокупность $G_1$, для которой элементарными предложеніями явятся ($A_1$ или $A_3$ или $A_5$) и ($A_2$ или $A_4$ или $A_6$). Еслибы вмѣсто $G_1$ мы составили бы совокупность $G_2$ изъ предложеній: ($A_1$ или $A_2$ или $A_3$) и ($A_4$ или $A_5$ или $A_6$), то $G$ и $G_2$ окажутся связанными, и ихъ соединеніемъ будетъ не $H$, а только часть $H$, у которой элементарными предложеніями будутъ: ($A_1$ или $A_2$), $A_3$, $A_4$, ($A_5$ или $A_6$).

Вообще, изъ двухъ совершенныхъ совокупностей предложеній $G$ и $G_1$ можно составить совершенную совокупность $H$, у которой элементарными предложеніями будутъ всѣ совмѣщенія ($B_i$ и $B'_j$) элементарныхъ предложеній $B_i$ совокупности $G$ съ элементарными предложеніями $B'_j$ совокупности $G_1$. При этомъ нѣкоторыя изъ предложенiй ($B_i$ и $B'_j$) могутъ быть приняты равнозначными $O$; тогда совокупности $G$ и $G_1$ будутъ связаны; необходимо только, чтобы по крайней мѣрѣ одно изъ совмѣщенiй ($B_i$ и $B'_j$), содержащихъ опредѣленное предложенiе $B_i$, не было $O$, такъ же какъ и одно совмѣщенiе, содержащее опредѣленное $B'_j$, ибо $[(B_i$ и $B'_1)$ или $(B_i$ и $B'_2)$ или $\ldots(B_i$ и $B'_e)] = B_i$.

Пусть, напр., $G$ составлено изъ 3 элементарныхъ предложенiй $B_1$, $B_2$, $B_3$, а $G_1$ — изъ 3 предложенiй $B'_1$, $B'_2$, $B'_3$; положимъ, что среди совмѣщенiй этихъ предложенiй $(B_1$ и $B'_1) = 0$, $(B_2$ и $B'_2) = 0$. Тогда соединенiе $H$ совокупностей $G$ и $G_1$ будетъ составлено изъ 7 остальныхъ $(3.3 - 2)$ элементарныхъ предложенiй отличныхъ отъ $O$.

Обозначая эти 7 предложенiй черезъ $A_1 = (B_1$ и $B'_2)$, $A_2 = (B_1$ и $B'_3)$, $A_3 = (B_2$ и $B'_1)$, $A_4 = (B_2$ и $B'_3)$, $A_5 = (B_3$ и $B'_1)$, $A_6 = (B_3$ и $B'_2)$, $A_7 = (B_3$ и $B'_3)$, видимъ, что элементами $G$ служатъ: $B_1 = (A_1$ или $A_2)$, $B_2 = (A_3$ или $A_4)$, $B_3 = (A_5$ или $A_6$ или $A_7)$; элементами же $G_1$ являются: $B'_1 = (A_3$ или $A_5)$, $B'_2 = (A_1$ или $A_6)$, $B'_3 = (A_2$ или $A_4$ или $A_7)$.

**15. Преобразованiе совершенныхъ совокупностей. Осуществленiе предложенiя.**

Теорема. *Данная совершенная совокупность можетъ быть преобразована въ новую совершенную совокупность предложенiй введенiемъ условiя, что опредѣленное, не равнозначное $O$, предложенiе $A = \Omega$. Такое преобразованiе называютъ осуществленiемъ предложенiя $A$ (или наступленiемъ событiя $A$).*

Въ самомъ дѣлѣ, если $A = \Omega$, то $\overline{A}$ и всѣ его частные случаи равнозначны $O$; поэтому два предложенiя $B$ и $C$, бывшiя взаимно дополнительными до $A$, дѣлаются взаимными отрицанiями; слѣдовательно, полученная совокупность совершена. Это преобразованiе было бы невозможно только, если $A = O$, ибо тогда всѣ предложенiя стали бы равнозначны одному и тому же предложенiю $O = \Omega$, что противорѣчитъ сдѣланному въ самомъ началѣ допущенiю.

Это преобразованiе, очевидно, не обратимо, т. к. совокупность не можетъ быть лишена достовѣрнаго предложенiя $\Omega$.

Теорема. *Всякое преобразованiе совокупности предложенiй, заключающееся въ введенiи условiя $A = B$, есть ничто иное, какъ осуществленiе нѣкотораго предложенiя $C$. Это преобразованiе возможно тогда и только тогда, когда $A$ и $B$ не служатъ взаимными отрицанiями.*

Въ самомъ дѣлѣ, для выполненiя условiя $A = B$ необходимо и достаточно, чтобы (§ 1, слѣдствiе 19)

$$C = (A \text{ и } B) \text{ или } (\overline{A} \text{ и } \overline{B}) = \Omega, \quad \text{ч. и т. д.}$$

Замѣчаніе. *Если предложенія* $A = B$ *несовмѣстимы, то* $C = (\overline{A}$ и $\overline{B}) = \Omega$, *т. е.* $\overline{A} = \overline{B} = \Omega$; *потому* $A = B = 0$.

Необходимо обратить вниманіе на существенную разницу между соединеніемъ двухъ совокупностей и преобразованіемъ, называемымъ осуществленіемъ. Соединеніе совокупностей (связанныхъ или несвязанныхъ) не вводитъ никакихъ измѣненій въ содержаніе *данныхъ* предложеній. Напротивъ, осуществленіе предложенія измѣняетъ его содержаніе, а именно, вводитъ новое условіе равнозначности.

Въ случаѣ связанныхъ совокупностей, связь между ними, выражающаяся условіями вида $(B_i$ и $B'_k) = 0$, не должна имѣть слѣдствіемъ, что какое-нибудь изъ *данныхъ* предложеній $B_i$ мѣняетъ содержаніе (поэтому невозможно, чтобы $(B_i$ и $B'_k) = 0$ при всякомъ $k$). Установленіе условія $(B_i$ и $B'_k) = 0$ можно однако также разсматривать, какъ преобразованіе совокупности, полученной отъ соединенія несвязанныхъ совокупностей. Такимъ образомъ та или иная связь между соединяемыми совокупностями приводитъ къ различнымъ по содержанію сложнымъ совокупностямъ, при чемъ первоначальныя составныя части у нихъ одинаковы.

## Глава II.

# Вѣроятности предложенiй конечныхъ совокупностей.

## § 4.

### Аксiомы и основныя теоремы теорiи вѣроятностей.

**16. Аксiомы.**

Какъ мы видѣли, равнозначныя предложенiя могутъ быть представлены однимъ и тѣмъ же символомъ или численнымъ коэффицiентомъ. Такимъ образомъ мы получили своего рода исчисленiе предложенiй, которое можетъ найти себѣ примѣненiе въ чистой логикѣ.

Основнымъ новымъ допущенiемъ теорiи вѣроятностей является положенiе, что *одинъ и тотъ же численный коэффицiентъ, называемый математической вѣроятностью, можетъ быть иногда приписываемъ и неравнозначнымъ предложенiямъ.* Этотъ коэффицiентъ не долженъ измѣняться отъ того, что мы присоединяемъ къ данной совокупности [1]) предложенiй другую совокупность. Вѣроятности предложенiй данной совокупности могутъ измѣняться только при преобразованiи совокупности, разсмотрѣнномъ въ § 3, состоящемъ въ осуществленiи нѣкотораго предложенiя.

Утвержденiе, что вѣроятность предложенiя $A$ равна вѣроятности предложенiя $B$ (вѣр. $A =$ вѣр. $B$), или, что $A$ и $B$ *равновозможны*, мы будемъ выражать краткой формулой:

$$A \backsim B,$$

изъ $A \backsim B$ и $A \backsim C$ вытекаетъ, слѣдовательно, $B \backsim C$.

*Если* $A = B$, *то, тѣмъ болѣе,* $A \backsim B$; поэтому, въ частности, *всѣ достовѣрныя предложенiя имѣютъ одну и ту же вѣроятность* (достовѣрность), *всѣ невозможныя предложенiя также имѣютъ одну и ту же вѣроятность* (невозможность).

---

[1]) Теорiя вѣроятностей разсматриваемъ только *совершенныя* совокупности предложенiй.

Совокупность предложенiй, въ которой каждому предложенiю приписана опредѣленная математическая вѣроятность, называется *ариөметизованной.* Если численный коэффицiентъ, являющiйся математической вѣроятностью $A$, не равенъ численному коэффицiенту—вѣроятности $B$, то одинъ изъ нихъ больше другого, что мы, для краткости, будемъ выражать неравенствами $A > B$ или $B > A$.

Слѣдующiя аксiомы являются единственными правилами, которыя должны соблюдаться при ариөметизацiи конечной совокупности предложенiй.

*Аксiома* 1 (о достовѣрномъ предложенiи). Если $A \neq \Omega$, то $\Omega > A$.

*Слѣдствiе* 1. $\Omega > O$.

*Аксiома* 2 (о несовмѣстимыхъ предложенiяхъ). a) Если $A \backsim A_1$, $B \backsim B_1$, и кромѣ того, ($A$ и $B$)=($A_1$ и $B_1$)$=O$, то ($A$ или $B$) $\backsim$ ($A_1$ или $B_1$); b) если же $A \backsim A_1$, $B > B_1$, то ($A$ или $B$) > ($A_1$ или $B_1$).

*Слѣдствiе* 2. Если $A \neq O$, то $A > O$.

Въ самомъ дѣлѣ, $\overline{A}$ или $A = \Omega$, $\overline{A}$ или $O = \overline{A}$; но $\Omega > \overline{A}$, поэтому $A > O$.

*Слѣдствiе* 3. Если $A$ есть частный случай $B$, при чемъ ($\overline{A}$ и $B$)$\neq O$, то $B > A$.

Дѣйствительно, $B =$ [$A$ или ($\overline{A}$ и $B$)], $A =$ ($A$ или $O$), и такъ какъ ($\overline{A}$ и $B$) $> O$, то $B > A$.

**17. Независимость и непротиворѣчивость аксiомъ.**

Очевидно, эти аксiомы не могутъ быть слѣдствiемъ ранѣе установленныхъ предварительныхъ аксiомъ, т. к. ничто не мѣшало бы намъ, напр., принять, вопреки аксiомѣ 1, всѣ предложенiя равновозможными, или напротивъ, только одну пару не равнозначныхъ предложенiй признать равновозможными (такъ что, при $A \backsim A_1$, $B = B_1$ будемъ имѣть ($A$ или $B$) $\gtrless$ ($A_1$ или $B$), (вопреки аксiомѣ 2). Покажемъ, что аксiома 1 не является также слѣдствiемъ изъ обѣихъ частей аксiомы 2. Для этого, возьмемъ какую-нибудь совокупность, составленную при помощи 3 элементарныхъ предложенiй; положимъ, вѣроятности этихъ предложенiй соотвѣтственно равными 1,—1,—2, а невозможному предложенiю дадимъ вѣроятность 0. Мы получимъ вполнѣ опредѣленныя значенiя для вѣроятности каждаго предложенiя совокупности, если соблюдая аксiому 2, допустимъ, въ частности, что ($A$ или $B$) $\backsim$ вѣр. $A +$ вѣр. $B$, когда ($A$ и $B$)=0. При этомъ, окажется, что ($a$ или $b$) $\backsim 0$. $c \backsim \Omega \backsim -2$, ($a$ или $c$) $\backsim b \backsim -1$, ($b$ или $c$) $\backsim -3$. Ясно, что первая часть аксiомы 2 также не можетъ быть слѣдствiемъ изъ аксiомы 1 и второй части аксiомы 2, ибо изъ конечнаго числа неравенствъ нельзя получить равенства.

Но и вторая часть аксіомы 2 не является слѣдствіемъ аксіомы 1 и первой части аксіомы 2. Дѣйствительно, возьмемъ какую-нибудь совершенную совокупность, составленную изъ $n$ элементарныхъ предложеній $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$. Условимся считать ихъ равновозможными; тогда равновозможными будутъ также всѣ ихъ объединенія по 2, и вообще всѣ объединенія, составленныя изъ $k$ элементарныхъ предложеній, будутъ между собой равновозможны. Это заключеніе вытекаетъ только изъ аксіомы 2(a). Допуская, что соблюдается также аксіома 1, мы должны будемъ прибавить, что объединеніе изъ $k$ предложеній не можетъ быть равновозможно объединенію изъ $l$ предложеній, если $k \neq l$. Всякая функція $f(k)$, удовлетворяющая условію, что $f(k) \gtrless f(l)$, если цѣлыя числа $k$ и $l$ не равны, и $f(n) > f(k)[k = n-1, \ldots, 1, 0]$ можетъ служить значеніемъ вѣроятности объединенія изъ $k$ предложеній. Мы можемъ допустить, напр., не противорѣча нашимъ допущеніямъ, что $f(1) < f(2) < \ldots < f(n-1) < f(0) < f(n)$. Но въ такомъ случаѣ, не будетъ соблюдена аксіома 2(b), т. к., въ силу этой послѣдней аксіомы, мы должны были бы имѣть $(A_1$ или $A_2) < (A_1$ или $O) = A_1$, т. к. $A_2 < O$ (потому что $f(1) < f(0)$), а между тѣмъ $f(2) > f(1)$, т. е. $(A_1$ или $A_2) > A_1$.

Напротивъ, если положимъ $f(0) < f(1) < f(2) \ldots < f(n)$, то окажутся выполнены и аксіома 1 и обѣ части аксіомы 2. Отсюда заключаемъ, что наши новыя аксіомы не только независимы между собой, но и не противорѣчатъ другъ другу.

Изъ принятыхъ нами аксіомъ вытекаетъ слѣдующая основная теорема теоріи вѣроятности.

**18. Основная теорема.**

*Если предложеніе $A$ есть объединеніе какихъ-нибудь $m$ предложеній изъ нѣкоторыхъ $n$ несовмѣстимыхъ единственно возможныхъ и равновозможныхъ предложеній, а предложеніе $B$ есть объединеніе какихъ-нибудь $m_1$ предложеній изъ нѣкоторыхъ $n_1$ несовмѣстимыхъ, единственно и равновозможныхъ предложеній, то $A \backsim B$, когда* $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m_1}{n_1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{\mu}{\nu}$, гдѣ $\dfrac{\mu}{\nu}$ есть несократимая дробь. Въ такомъ случаѣ $m = k\mu$, $n = k\nu$, $m_1 = k_1\mu$, $n_1 = k_1\nu$, гдѣ $k$ и $k_1$ цѣлыя числа. Обозначаемъ черезъ $c_1$, $c_2$, ..., $c_m$, ..., $c_n$, несовмѣстимыя единственно и равновозможныя предложенія, изъ которыхъ первыя $m$ имѣютъ объединеніемъ $A$. Полагая далѣе $d_1 = (c_1$ или $c_2$ или $\ldots c_k)$, $d_2 = (c_{k+1}$ или $\ldots c_{2k})$ и т. д., мы составимъ $\nu$ несовмѣстимыхъ единственно- и равновозможныхъ (аксіома 2(a)) предложеній $d_1$,

$d_2, \ldots, d_\nu$, при чемъ первыя $\mu$ изъ нихъ имѣютъ объединеніемъ $A$. Точно также, обозначая черезъ $c'_1, c'_2, \ldots c'_{n_1}$ не совмѣстимыя, равно и единственно возможныя предложенія, изъ которыхъ $m_1$ имѣютъ объединеніемъ $B$, составимъ $\nu$ предложеній $d'_1, d'_2, \ldots d'_\mu$, несовмѣстимыхъ, единственно- и равновозможныхъ, изъ которыхъ $\mu$ имѣютъ объединеніемъ $B$. Но ясно, что $d_i \backsim d'_k$, ибо, допустивши, напримѣръ, что $d_1 > d'_1$, мы имѣли бы вообще $d_i > d'_i$, а потому, примѣняя аксіому 2(b), $\Omega > \Omega$, что невозможно; такимъ образомъ, $d_1 \backsim d'_1$, $d_2 \backsim d'_2$ и т. д., откуда

$$(d_1 \text{ или } d_2 \text{ или } \ldots d_\mu) \backsim (d'_1 \text{ или } d'_2 \text{ или } \ldots d'_\mu),$$

т. е.

$$A \backsim B \quad \text{ч. и т. д.}$$

### 19. Опредѣленіе математической вѣроятности.

Такимъ образомъ, коэффиціентъ, названный нами математической вѣроятностью $A$, вполнѣ опредѣленъ дробью $\frac{m}{n}$, гдѣ $n$ есть число единственно- и равновозможныхъ несовмѣстимыхъ предложеній, изъ коихъ $m$ имѣютъ объединеніемъ $A$. Этотъ коэффиціентъ является, слѣдовательно, функціей $\frac{m}{n}$, которую обозначимъ черезъ $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$. Функція $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$, на основаніи предыдущаго, должна быть *возрастающей*, и это необходимое условіе вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно для соблюденія всѣхъ принятыхъ нами аксіомъ, лишь бы функція $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ была бы зафиксирована разъ на всегда для всѣхъ совокупностей, которыя могутъ быть присоединены къ данной. Такъ какъ возрастающую функцію $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$, которую нужно зафиксировать, можно выбрать произвольно, то для нея принимаютъ наиболѣе простое значеніе $\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$, т. е. *математической вѣроятностью $A$ называютъ* $\frac{m}{n}$. Однако въ согласіи съ основными аксіомами, мы съ одинаковымъ правомъ могли бы также назвать вѣроятностью $\frac{m^2}{n^2}$, $\frac{m}{n-m}$ и т. д. Очевидно, что принятіе того или иного словеснаго опредѣленія также мало повліяло бы на выводы теоріи вѣроятностей, какъ измѣненіе единицы мѣры на выводы геометріи или механики. Измѣнилась бы только форма теоремъ, а не ихъ содержаніе; мы получили бы не новую теорію вѣроятностей, а изложеніе той же теоріи въ новой терминологіи. Такимъ образомъ соглашеніе, которое мы вводимъ здѣсь, носитъ чисто техническій характеръ[1]), въ противоположность основнымъ аксіомамъ, принятымъ выше, характеризующимъ сущность понятья вѣроятности: нарушеніе этихъ основныхъ аксіомъ, напротивъ, совершенно измѣнило бы содержаніе теоріи вѣроятностей.

Примѣчаніе. Дробь $\frac{m}{n-m}$, т. е. отношеніе числа благопріятныхъ случаевъ къ числу неблагопріятныхъ, или $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{n-m}{n}}$, т. е. отношеніе вѣроятности предложенія къ вѣроятности его отрицанія, можно было бы вмѣстѣ съ Борелемъ (Le hasard, p. 58) назвать относительной вѣроятностью предложенія.

*Замѣчаніе.* Замѣтимъ, что, присоединяя къ данной совокупности новую, мы всегда должны и можемъ такъ распредѣлить, въ согласіи съ аксіомами, значенія вѣроятностей вновь вводимыхъ предложеній, чтобы въ соединенной совокупности данныя предложенія сохранили ту же вѣроятность, что и въ первоначальной. Дѣйствительно, пусть въ данной совокупности элементарныя предложенія $A_1$, $A_2$, $\ldots A_n$, равновозможны; слѣдовательно, всѣ предложенія этой совокупности послѣ выбора функціи $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ имѣютъ вполнѣ опредѣленныя значенія. Присоединимъ вторую совокупность, построенную изъ элементарныхъ предложеній $B_1$, $B_2$, $\ldots B_k$. Условимся, напримѣръ, считать равновозможными въ соединенной совокупности всѣ совмѣщенія ($A_i$ и $B_j$); въ такомъ случаѣ всѣ предложенія соединенной совокупности, при сохраненіи той же функціи $\varphi$, получатъ опредѣленныя вѣроятности, при чемъ всякое объединеніе вида ($A_1$ или $A_2$ или $\ldots A_m$), имѣвшее прежде вѣроятность, равную $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$, разсматриваемое, какъ объединеніе [($A_1$ и $B_1$) или ($A_1$ и $B_2$) или ... или ($A_m$ и $B_k$)], должно получить вѣроятность $\varphi\left(\frac{km}{kn}\right) = \varphi\left(\frac{m}{n}\right)$; т. е. не измѣняетъ своего значенія. При этомъ всѣ предложенія $B_j$ также окажутся равновозможными.

---

[1]) Если бы мы назвали вѣроятностью $\frac{m}{n-m}$, то напр., въ теоремѣ Бернулли, нужно было бы замѣнить отношеніе числа появленій событія къ общему числу опытовъ отношеніемъ числа появленій къ числу непоявленій. Соотвѣтствующее измѣненіе получила бы и формулировка теоремы сложенія вѣроятности: вѣроятность ($A$ или $B$) была бы равна не суммѣ вѣроятностей $p+p_1$, а выраженію $\frac{p+p_1+2pp_1}{1-pp_1}$.

Такимъ образомъ въ данной совокупности предложенiй можно условиться считать равновозможными любыя несовмѣстимыя и единственно возможныя предложенiя $A_1, A_2, \ldots A_k$. Послѣ такого соглашенiя опредѣленныя значенiя получатъ вѣроятности тѣхъ и только тѣхъ предложенiй, которыя являются объединенiями предложенiй $A_1, A_2, \ldots, A_k$, или иными словами, которыя входятъ въ совокупность $G$, имѣющую элементарными предложенiями $A_1, A_2, \ldots A_k$. Послѣ этого другую группу единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ предложенiй $B_1$, $B_2, \ldots, B_l$ можно будетъ также принять за равновозможныя, если совокупность $G_1$, составленная изъ нихъ, *не* связана съ совокупностью $G$ и т. д.

Дѣйствительно, никакое предложенiе $\alpha$ (кромѣ $\Omega$) не является одновременно объединенiемъ элементарныхъ предложенiй $G$ и $G_1$. Если же $\alpha$ и $\beta$ суть два несовмѣстимыя между собой предложенiя $G$, и $\alpha_1$ и $\beta_1$—два несовмѣстимыя предложенiя $G_1$, то, благодаря принятому опредѣленiю вѣроятности, соглашенiе, что $\alpha \backsim \alpha_1$, $\beta \backsim \beta_1$ повлечетъ ($\alpha$ или $\beta$) $\backsim$ $\backsim$ ($\alpha_1$ или $\beta_1$), и $\alpha \backsim \alpha_1$, $\beta > \beta_1$ повлечетъ ($\alpha$ или $\beta$) $>$ ($\alpha_1$ или $\beta_1$), т. е. наши аксiомы не будутъ нарушены.

Что касается совмѣщенiй и объединенiй совмѣстимыхъ предложенiй, то ихъ вѣроятности не вполнѣ опредѣлены, и для ихъ опредѣленiя нужно будетъ новое соглашенiе, о которомъ рѣчь будетъ впереди. Во всякомъ случаѣ выше была отмѣчена возможность такого соглашенiя.

### 20. Теорема сложенiя.

Аксiома 2(а) можетъ быть формулирована иначе: если $p$ есть вѣроятность $A$, $p_1$—вѣроятность $B$, то вѣроятность ($A$ или $B$) есть функцiя $f(p, p_1)$, при $A$ и $B$ несовмѣстимыхъ между собой. Видъ функцiи $f(p, p_1)$ зависитъ отъ выбора функцiи $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$; не трудно вывести общую связь между этими функцiями, но, послѣ выше сказаннаго, для насъ вполнѣ достаточно ограничиться случаемъ, когда $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$, что приводитъ, какъ увидимъ, къ $f(p, p_1)=p+p_1$. Обратно, если бы мы зафиксировали функцiю $f$, которая, въ силу аксiомъ, должна быть только возрастающей, симметричной и удовлетворять уравненiю $f[p, f(p_1, p_2)]=$ $=f(p_1, f(p, p_2)]$, мы бы получили соотвѣтствующую функцiю $\varphi$, и въ частности, изъ $f(p, p_1)=p+p_1$, можно бы также вывести $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}H$, гдѣ $H$ произвольное положительное число.

Теорема. *Если два несовмѣстимыя предложенія $A$ и $B$ имѣютъ соотвѣтственно вѣроятности $p$ и $p_1$, то предложеніе ($A$ или $B$) имѣетъ вѣроятность $p+p_1$.*

Эта теорема доказывается обыкновенно (см. А. А. Марковъ «Исчисленіе вѣроятностей» стр. 11 и 172) для случая, когда $A$ и $B$ представляютъ несовмѣстимыя объединенія единственно- и равновозможныхъ несовмѣстимыхъ предложеній, т. е. для того случая, когда непосредственное примѣненіе опредѣленія вѣроятности дѣлаетъ ее почти излишней. Въ дѣйствительности же теорема важна именно въ тѣхъ случаяхъ, для которыхъ она не доказывается. Для полноты доказательства необходима только новая ссылка на аксіому (2): на первую часть, если оба числа $p$ и $p_1$ раціональны, и на вторую часть, если эти числа нераціональны.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ сначала, что числа $p$ и $p_1$ раціональны, такъ что $p=\frac{m}{n}$, $p_1=\frac{m_1}{n_1}$. Если мы присоединимъ къ нашей совокупности какую нибудь совокупность, несвязанную съ ней и содержащую $nn_1$ равновозможныхъ элементарныхъ предложеній, то предложеніе $A'$, являющееся объединеніемъ какихъ-нибудь $mn_1$ изъ этихъ элементарныхъ предложеній, будетъ имѣть ту же вѣроятность $\frac{mn_1}{nn_1}=\frac{m}{n}=p$, что̀ и $A$, предложеніе же $B'$, являющееся объединеніемъ другихъ [1]) какихъ-нибудь $m_1n$ изъ элементарныхъ предложеній, имѣетъ ту же вѣроятность $\frac{m_1n}{n_1n}=\frac{m_1}{n_1}=p_1$, что̀ $B$. Въ такомъ случаѣ, ($A'$ или $B'$) будетъ объединеніемъ $m_1n+n_1m$ изъ $nn_1$ элементарныхъ предложеній, а потому, согласно опредѣленію вѣроятности, $\frac{m_1n+n_1m}{nn_1}=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m}{n}=p_1+p$ будетъ вѣроятностью ($A'$ или $B'$), и въ силу аксіомы 2(а), будетъ также вѣроятностью ($A$ или $B$), ч. и т. д.

Положимъ теперь, что числа $p$ и $p_1$ (или только одно изъ нихъ) ирраціональны. Въ такомъ случаѣ, число $p$ является предѣломъ раціональныхъ чиселъ: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$ и $\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_n>\ldots$, а число $p_1$—предѣломъ раціональныхъ чиселъ $\lambda'_1<\lambda'_2<\ldots<\lambda'_n<\ldots$, и $\mu'_1>\mu'_2>\ldots>\mu'_n>\ldots$

Обозначимъ черезъ $A_n$ нѣкоторое предложеніе, имѣющее вѣроятность $\lambda_n$, и черезъ $B_n$—несовмѣстимое съ нимъ предложеніе, имѣющее

[1]) Если бы $p_1+p>1$, то вмѣсто $B'$ пришлось бы взять предложеніе $\overline{A'}$, и такимъ образомъ мы убѣдились бы въ недопустимости такого предположенія.

вѣроятность [1]) $\lambda'_n$. Тогда, благодаря аксіомѣ 2(b), имѣемъ $(A_n$ или $B_n) <$ $< (A$ или $B)$, т. е. $\lambda_n + \lambda'_n < (A$ или $B)$. Точно также обозначаемъ черезъ $A'_n$ и $B'_n$ предложенія, имѣющія соотвѣтственно вѣроятностью $\mu_n$ и $\mu'_n$; въ такомъ случаѣ получимъ, по той же аксіомѣ, $(A$ или $B) <$ $< \mu_n + \mu'_n$. А потому, на основаніи извѣстной теоремы о предѣлахъ, находимъ $(A$ или $B) \backsim p + p_1$, ч. и т. д.

**21. Слѣдствіе.** Изъ предыдущаго вытекаетъ, что

*Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы числа* $p_1, p_2, \ldots$ *могли быть соотвѣтственными вѣроятностями предложеній* $A_1, A_2, \ldots$ *данной конечной совокупности, заключается въ томъ, чтобы вѣроятность объединенія двухъ или нѣсколькихъ несовмѣстимыхъ предложеній была равна суммѣ вѣроятностей этихъ послѣднихъ, чтобы достовѣрное предложеніе имѣло вѣроятность* 1 (а слѣдовательно, невозможное — вѣроятность 0), *остальныя же предложенія — вѣроятности, заключенныя между* 0 и 1 $(0 < p < 1)$.

Отсюда слѣдуетъ, въ частности, что, если двѣ совокупности $G$ и $G_1$ не связаны, то вѣроятности, приписываемыя предложеніямъ $G$, не связаны логически съ вѣроятностями предложеній $G_1$, т. е. *ариѳметизація* одной совокупности не зависитъ отъ ариѳметизаціи другой. Напротивъ, если совокупности $G$ и $G_1$ связаны, то предложеніямъ $G_1$ нельзя давать вполнѣ произвольныя вѣроятности послѣ того, какъ вѣроятности предложеній $G$ установлены.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ даются вѣроятности не всѣхъ предложеній совокупности. Тогда необходимо только, чтобы оставалась возможность располагать неопредѣленными еще вѣроятностями такъ, чтобы соблюсти указанное выше основное условіе [2]).

## § 5.

### Совмѣщеніе и осуществленіе предложеній.

**22. Совмѣщеніе предложеній.**

Очевидно, что вѣроятность $(A$ и $B)$, вообще, не можетъ быть опредѣленной функціей вѣроятности $A$ и вѣроятности $B$; достаточно

[1]) Два такія предложенія только въ томъ случаѣ не могутъ быть конструированы, если $\lambda_n + \lambda'_n > 1$. Замѣняя тогда предложеніе $B_n$ черезъ $\overline{A}_n$ (т. е. отрицаніе $A_n$), мы нашли бы, примѣняя аксіому 2, что предложеніе $(A$ или $B)$ имѣетъ вѣроятность больше единицы, т. е. больше $\Omega$, что противорѣчитъ аксіомѣ 1; слѣдовательно, числа $p$ и $p_1$ не могутъ въ этомъ случаѣ быть вѣроятностями несовмѣстимыхъ предложеній.

[2]) Замѣтимъ, что аксіомы 1 и 2(b), вмѣстѣ взятыя, равнозначны слѣдующей одной аксіомѣ: *неравенство* $A > B$ *означаетъ, что существуетъ* (или можетъ быть присоединено) *предложеніе* $B_1 \backsim B$, *являющееся частнымъ случаемъ* $A$.

замѣтить, что, если $A$ и $B$ несовмѣстимы, то ($A$ и $B$) $\backsim O$, напротивъ, если $A = B$, то ($A$ и $B$) $\backsim A$. Единственное общее положенie, которое можно высказать это то, что вѣр. ($A$ и $B$) + вѣр. ($A$ и $\overline{B}$) = вѣр. $A$, а потому, въ частности, вѣр. ($A$ и $B$) $\leqq$ вѣр. $A$.

Вообще можно принять, что

$$\text{вѣр. } (A \text{ и } B) = \lambda p p_1,$$

гдѣ $p$ и $p_1$ представляютъ соотвѣтственно вѣроятности $A$ и $B$, а $\lambda$ называется *коэффицiентомъ совмѣстимости* $A$ съ $B$. Въ частности, $\lambda = 0$ въ томъ случаѣ, когда предложенія $A$ и $B$ несовмѣстимы.

Допустимъ, что мы имѣемъ ариѳметизованную совокупность, составленную изъ элементарныхъ предложенiй $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вѣроятности которыхъ $p_1, p_2, p_n, \ldots$ удовлетворяютъ условiю $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Присоединяя къ этой совокупности совокупность $O$, $C$, $\overline{C}$, $\Omega$, въ которой вѣр. $C = p$, вѣр. $\overline{C} = q$ $(p + q = 1)$, мы ариѳметизуемъ соединенную совокупность, полагая

$$\text{вѣр. } (A_1 \text{ и } C) = \lambda_1 p_1 p, \quad \text{вѣр. } (A_2 \text{ и } C) = \lambda_2 p_2 p, \ldots$$
$$\ldots \text{вѣр. } (A_n \text{ и } C) = \lambda_n p_n p,$$

гдѣ

$$0 \leqq \lambda_i \leqq \frac{1}{p}$$

и

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \ldots + \lambda_n p_n = 1;$$

въ такомъ случаѣ

$$\text{вѣр. } (A_i \text{ и } \overline{C}) = p_i - \lambda_i p_i p = p_i (1 - \lambda_i p).$$

Поэтому, обозначая черезъ $\mu_i$ коэффицiентъ совмѣстимости $A_i$ съ $\overline{C}$, имѣемъ

$$\lambda_i p + \mu_i q = 1.$$

Обстоятельство, что данныя совокупности не связаны между собой, выражалось бы тѣмъ, что $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$. Особаго вниманiя заслуживаетъ случай, когда совокупности *независимы*.

**23. Независимыя предложенiя.**

Предложенiе $A$ называется *независимымъ* отъ $B$, если коэффицiентъ совмѣстимости $A$ съ $B$ равенъ коэффицiенту совмѣстимости $A$ съ $\overline{B}$.

Теорема. *Если предложенiе $A$ независимо отъ $B$, то предложенiе $B$ независимо отъ $A$, и коэффицiентъ совмѣстимости $A$ съ $B$ равенъ единицѣ.*

Дѣйствительно, если

$$\text{вѣр.}\ (A\ \text{и}\ B) = \lambda p_1 p,\quad \text{вѣр.}\ (A\ \text{и}\ \overline{B}) = \lambda p_1 q,$$

гдѣ $p + q = 1$, то

$$\text{вѣр.}\ (A\ \text{и}\ B) + \text{вѣр.}\ (A\ \text{и}\ \overline{B}) = \lambda p_1 = p_1,$$

откуда $\lambda = 1$. Но, если $\lambda = 1$, то

$$\text{вѣр.}\ (\overline{A}\ \text{и}\ B) = p - p_1 p = q_1 p,$$

т. е. $B$ независимо отъ $A$.

Слѣдствіе. *Если несовмѣстимыя между собой предложенія $A$ и $A_1$ оба независимы отъ $B$, то ($A$ или $A_1$) также независимо отъ $B$.* Вообще, если коэффиціенты совмѣстимости $A$ и $A_1$ съ $B$ оба равны $\lambda$, то коэффиціентъ совмѣстимости ($A$ или $A_1$) съ $B$ также равенъ $\lambda$. Если всѣ элементарныя предложенія совокупности $H$ независимы отъ элементарныхъ предложеній совокупности $H_1$, то вообще каждое предложеніе $H$ независимо отъ каждаго предложенія $H_1$. Такія двѣ совокупности называютъ независимыми между собой. Очевидно, независимыми могутъ быть только не связанныя совокупности; но, разумѣется, не связанныя совокупности не всегда независимы.

Не останавливаясь на дальнѣйшемъ развитіи этихъ соображеній, укажемъ лишь вкратцѣ, какъ опредѣляется независимость $n$ предложеній $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Предложенія $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вѣроятности которыхъ соотвѣтственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$, называются *попарно* независимыми, если совмѣщеніе ($A_i$ и $A_k$) имѣетъ вѣроятность $p_i p_k$; они называются независимыми *по три*, если каждое совмѣщеніе ($A_i$ и $A_k$ и $A_l$) имѣетъ вѣроятность $p_i p_k p_l$ и т. д. Если данныя предложенія независимы попарно, по три, ... и по $n$, то они называются (совершенно) независимыми. Для совершенной независимости $n$ предложеній требуется, слѣдовательно, $C_n^2 + C_n^3 + \ldots \ldots + C_n^n = 2^n - n - 1$ условій; при этомъ можно показать, что ни одно изъ этихъ условій не является слѣдствіемъ изъ остальныхъ [1]) (напр., если 3 предложенія попарно независимы, то изъ этого не вытекаетъ, что они совершенно независимы).

---

[1]) Исходя изъ понятія осуществленія одного или нѣсколькихъ предложеній, А. А. Марковъ въ «Исчисленіи вѣроятностей» (стр. 19) даетъ другое опредѣленіе: «нѣсколько событій $E_1, E_2, \ldots E_n$ мы называемъ независимыми другъ отъ друга, если

**24. Осуществленіе предложенія.**

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что для вычисленія вѣроятности совмѣщенія предложеній нѣтъ необходимости вводить новыя допущенія; потому важнѣйшіе отдѣлы теоріи вѣроятностей (теорема Бернулли и всѣ ея обобщенія, извѣстныя подъ названіемъ закона большихъ чиселъ) вытекаютъ исключительно изъ принятыхъ нами аксіомъ. Однако на практикѣ вмѣсто *коэффиціента совмѣстимости* часто бываетъ удобнѣе пользоваться другимъ понятіемъ—понятіемъ вѣроятности одного предложенія при условіи осуществленія другого, существенно необходимымъ только для построенія отдѣла вѣроятностей гипотезъ. Для этого мы введемъ новое допущеніе, которое дополнитъ данное ранѣе (§ 3) опредѣленіе преобразованія совокупности, которое мы назвали *осуществленіемъ предложенія*.

**Аксіома осуществленія.**

*При осуществленіи предложенія $A$ данной совокупности $H$, всякое предложеніе $\alpha$, бывшее частнымъ случаемъ $A$, въ преобразованной совокупности получаетъ вѣроятность, которая зависитъ только отъ вѣроятностей $A$* и *$\alpha$ въ данной совокупности $H$.*

Такимъ образомъ, по опредѣленію, вѣроятность $\alpha_A$ предложенія $\alpha$ послѣ осуществленія $A$ есть

$$\alpha_A = f(\text{вѣр.}\, \alpha,\ \text{вѣр.}\, A). \tag{11}$$

Данное нами въ § 3 опредѣленіе осуществленія предложенія $A$ опредѣляетъ только логическую структуру преобразованной совокупности; а, такъ какъ вѣроятности предложеній не вполнѣ опредѣляются логи-

вѣроятность каждаго изъ нихъ не зависитъ отъ существованія или несуществованія остальныхъ, такъ что никакое указаніе на существованіе или несуществованіе какихъ нибудь изъ событій $E_1$, $E_2$, ..., $E_n$ не мѣняетъ вѣроятности прочихъ». Не трудно убѣдиться въ равнозначности обоихъ опредѣленій; но слѣдуетъ замѣтить, что въ послѣднемъ опредѣленіи нѣкоторыя условія являются необходимымъ слѣдствіемъ изъ остальныхъ, какъ это видно изъ того, что число этихъ условій равно $n(2^{n-1}-1)$; такимъ образомъ, сопоставляя это число съ найденнымъ ранѣе, видимъ, что $(n-2)2^{n-1}+1$ условій являются здѣсь слѣдствіями изъ остальныхъ; напр., для $n=2$ независимость $B$ отъ $A$ есть слѣдствіе независимости $A$ отъ $B$. Замѣтимъ, что во многихъ случаяхъ, (напр., въ неравенствѣ Чебышева) существенно расчленить понятіе независимости, и особо важную роль играетъ *попарная* зависимость или независимость.

ческой структурой совокупности, которой онѣ принадлежатъ, то наше новое допущеніе [1]) не можетъ быть слѣдствіемъ изъ предыдущихъ.

Покажемъ теперь, что аксіома осуществленія не противорѣчитъ ранѣе принятымъ аксіомамъ, если только функція $f$ въ формулѣ (11) имѣетъ значеніе

$$\alpha_A = \frac{\text{вѣр.}\,\alpha}{\text{вѣр.}\,A} \tag{12}$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ структура остающихся въ преобразованной совокупности предложеній та же, что въ данной, то

$$f(\text{вѣр.}\,\alpha + \text{вѣр.}\,\beta,\ \text{вѣр.}\,A) = f(\text{вѣр.}\,\alpha,\ \text{вѣр.}\,A) + f(\text{вѣр.}\,\beta,\ \text{вѣр.}\,A)$$

Но, какъ извѣстно, [2]) для этого необходимо, чтобы

$$f(\text{вѣр.}\,\alpha,\ \text{вѣр.}\,A) = \text{вѣр.}\,\alpha\,.\,F(\text{вѣр.}\,A).$$

Съ другой стороны, по условію, $A_A = 1$; слѣдовательно, $(\text{вѣр.}\ A).F(\text{вѣр.}\ A) = 1$, а потому

$$\alpha_A = \frac{\text{вѣр.}\,\alpha}{\text{вѣр.}\,A}. \tag{12}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что опредѣленная нами функція $\alpha_A$ даетъ всѣмъ предложеніямъ преобразованной совокупности вѣроятности,

[1]) Аналогичную аксіому, относящуюся только къ совокупностямъ, въ которыхъ элементарныя предложенія равновозможны, мы находимъ въ «Исчисленіи вѣроятностей» А. А. Маркова (стр. 10). Разъяснимъ нашу аксіому на примѣрѣ. Если всякое размѣщеніе изъ двухъ картъ въ полной колодѣ имѣетъ одну и ту же вѣроятность $\left(\frac{1.}{52.51}\right)$, то, по теоремѣ сложенія, вѣроятность, что 1-я (или 2-я) изъ вынутыхъ картъ есть червонный валетъ, равна $\frac{51}{52.51} = \frac{1}{52}$; когда становится извѣстнымъ, что первая карта есть червонная дама, то лишь, благодаря аксіомѣ осуществленія, всѣ размѣщенія, содержащія эту даму, остаются равновозможны, а потому вѣроятность второй картѣ оказаться червоннымъ валетомъ становится равной $\frac{1}{51}$. Если бы мы исходили только изъ предположенія, что, при выниманіи одной карты, всѣ карты равновозможны, то аксіома осуществленія была бы не достаточна, чтобы признать всѣ размѣщенія по 2 карты равновозможными, что является естественнымъ, если замѣтить, что легко осуществить опытъ, при которомъ эти размѣщенія не оказались бы равновозможны.

[2]) Изъ функціональнаго уравненія $f(x+y) = f(x) + f(y)$ выводятъ сначала, что $f(nx) = nf(x)$, для всякаго цѣлаго $n$. Полагая затѣмъ $nx = my$, гдѣ $m$ также цѣлое число, получаютъ $nf(x) = mf(y)$, откуда $f\!\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x)$. Т. к. функція $f(x)$ конечна ($|f(x)| \leq 1$, при $0 \leq x \leq 1$), то изъ равенства $f(nx) = nf(x)$ мы заключаемъ, что $f(x)$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ $x$, откуда слѣдуетъ, что функція $f(x)$ непрерывна, а потому равенство $f(tx) = tf(x)$, доказанное для всякаго раціональнаго значенія $t$, справедливо всегда. Слѣдовательно, $f(t) = tf(1)$.

удовлетворяющія условію ариѳметизаціи (21), если только вѣроятности предложеній первоначальной совокупности этому условію удовлетворяли, и слѣдовательно, не противорѣчитъ основнымъ аксіомамъ.

**25. Теорема умноженія вѣроятностей.**

*Вѣроятность ($A$ и $B$) равна вѣроятности $A$, умноженной на вѣроятность $B$ послѣ осуществленія $A$.*

Въ самомъ дѣлѣ, предложеніе ($A$ и $B$) послѣ осуществленія $A$ равнозначно ($\Omega$ и $B$) $= B$. Поэтому вѣроятность ($A$ и $B$) послѣ осуществленія $A$

$$(A \text{ и } B)_A = B_A = \frac{\text{вѣр.}(A \text{ и } B)}{\text{вѣр.}\, A}.$$

Слѣдовательно, вѣр. ($A$ и $B$) $=$ (вѣр. $A$). $B_A$, ч. и т. д.

Примѣчаніе. Изъ теоремы умноженія вѣроятностей, въ частности, вытекаетъ положеніе: *если $\alpha$ есть частный случай $A$, то вѣроятность $\alpha$ зависитъ только отъ вѣроятности $A$ и отъ вѣроятности $\alpha$ послѣ осуществленія $A$.* Это положеніе равнозначно такому: *если $\alpha$ есть частный случай $A$, а $\beta$ есть частный случай $B$, то вѣроятности $\alpha$ и $\beta$ равны между собой, коль скоро $A$ и $B$ равновѣроятны, и вѣроятность $\alpha$ послѣ осуществленія $A$ равна вѣроятности $\beta$ послѣ осуществленія $B$.*

Это предложеніе можетъ замѣнить данную выше аксіому осуществленія, т. к. изъ него можно вывести, подобно предыдущему, теорему умноженія.

Введеніе понятія вѣроятности одного предложенія послѣ осуществленія другого позволяетъ дать другое опредѣленіе независимости:

*Если вѣроятность $B_A$ послѣ осуществленія $A$ равна первоначальной вѣроятности $B$, то $B$ независимо отъ $A$.*

Слѣдствіе. Если $B$ независимо отъ $A$, то $A$ независимо отъ $B$ и вѣр. ($A$ и $B$) $=$ (вѣр. $A$). (вѣр. $B$).

**26. Теорема Байеса.**

*Вѣроятность $A_B$ послѣ осуществленія $B$ равна*

$$A_B = \frac{(\text{вѣр.}\, A).\, B_A}{\text{вѣр.}\, B}.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$A_B = \frac{\text{вѣр.}(A \text{ и } B)}{\text{вѣр.}\, B} = \frac{(\text{вѣр.}\, A).\, B_A}{\text{вѣр.}\, B}.$$

Допущеніе (24) является единственнымъ основаніемъ теоремы Байеса и ея слѣдствій, выводъ которыхъ не представляетъ принципіальныхъ трудностей.

Глава III.

# Безконечныя совокупности предложеній.

## § 6.

### Распространеніе предварительныхъ аксіомъ на безконечныя совокупности.

---

**27. Совершенныя совокупности.**

Основное требованіе, которое мы должны поставить при разсмотрѣніи безконечныхъ совокупностей предложеній, заключается въ томъ, чтобы правила символическаго счисленія, которыя мы установили въ § 1 для конечныхъ совокупностей, не измѣнились бы отъ того, что мы тѣ же самыя предложенія будемъ считать принадлежащими нѣкоторой безконечной совокупности. *Совокупность предложеній (конечную или безконечную), къ которымъ примѣнимы всѣ выше упомянутыя правила мы называемъ совершенной.* Однако, нѣкоторыя изъ допущеній, которыя для конечныхъ совокупностей являлись слѣдствіями изъ другихъ, для безконечныхъ совокупностей дѣлаются новыми самостоятельными аксіомами.

Дѣйствительно, *существованіе истиннаго предложенія*, которое для конечной совокупности было слѣдствіемъ изъ аксіомъ $(a - d)$, въ безконечной совокупности является новымъ допущеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ совокупность правильныхъ дробей $\frac{p}{2^n}$, написанныхъ въ бинарной системѣ (0,101; 0,011 и т. п.); подъ операціей «или» будемъ подразумѣвать составленіе новой дроби изъ двухъ данныхъ дробей такъ, что на каждомъ мѣстѣ ставится наибольшая изъ цифръ, стоящихъ на соотвѣтствующемъ мѣстѣ въ данныхъ дробяхъ (0,101 или 0,011 = 0,111). Въ этой совокупности не будетъ числа, соотвѣтствующаго истинному предложенію, которое должно было бы быть представлено безконечною дробью $0{,}111\ldots = 1$. Но мы можемъ присоединить къ нашимъ дробямъ 1, чтобы осуществить аксіому истиннаго предложенія; если же присоединимъ 0, то получимъ также и невозможное предложеніе.

Второе новое допущеніе, которое здѣсь должно быть сдѣлано, между тѣмъ какъ въ конечной совокупности оно было слѣдствіемъ изъ предыдущихъ, это *существованіе совмѣщенія двухъ предложеній* ($A$ и $B$).

Наконецъ, третье и послѣднее дополнительное допущеніе— *распространеніе ограничительнаго принципа на безконечныя объединенія предложеній.*

Въ примѣрѣ бинарныхъ дробей (включая 0 и 1), который мы только что ввели, совмѣщеніе двухъ предложеній существуетъ и представлено дробью, имѣющей на каждомъ мѣстѣ меньшее изъ двухъ значеній (0 и 1), стоящихъ на томъ же мѣстѣ въ данныхъ дробяхъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ ко всякой парѣ предложеній здѣсь примѣнимъ и *ограничительный принципъ*, такъ что всѣ свойства совмѣщеній и, въ частности, теоремы распредѣлительности остаются въ силѣ. Кромѣ того, въ нашемъ примѣрѣ соблюденъ также и *принципъ единственности*, однако разсматриваемая совокупность не будетъ совершенной.

Дѣйствительно, согласно данному въ § 1 (8) опредѣленію отрицанія, отрицаніемъ всякаго предложенія $A$ называется объединеніе всѣхъ несовмѣстимыхъ съ нимъ предложеній. Но несовмѣстимыхъ предложеній будетъ безконечное множество, и мы должны прежде всего обобщить данное въ § 1 опредѣленіе *объединенія.*

*Объединеніемъ* $H = (A$ или $B$ или $C\ldots)$ *безконечнаго множества предложеній* $A$, $B$, $C$, . . . *называется предложеніе* $H$, *удовлетворяющее условіямъ*[1]: 1) *если* $y$ *есть частный случай какого-нибудь предложеній* $A$, $B$, $C$. . ., *то* $y$ *есть частный случай* $H$; 2) *если каждое изъ предложеній* $A$, $B$, $C$, . . . *есть частный случай* $M$, *то и* $H$ *есть частный случай* $M$.

Согласно этому опредѣленію, принципы перемѣстительный и ассоціативный распространены на безконечныя объединенія, какъ и принципъ тожественности. Но остается открытымъ вопросъ о распространеніи *принципа ограничительнаго.* Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ это распространеніе не осуществляется. Въ самомъ дѣлѣ, объединеніемъ всякой безконечной совокупности различныхъ предложеній будетъ истина, напримѣръ, объединеніемъ дробей: 0,01; 0,001; 0,0001 и т. д., а между тѣмъ предложеніе 0,1 не представляетъ собой объединенія изъ частныхъ случаевъ этихъ дробей, ибо каждая изъ послѣднихъ не имѣетъ иныхъ частныхъ случаевъ, кромѣ $O$ и самой себя. Благодаря нарушенію

[1] Ясно, что, если объединеніе $H$ существуетъ, то оно единственно. Дѣйствительно, если $H_1$ также удовлетворяетъ первому условію, то $(A$ или $H_1) = H_1$, $(B$ или $H_1) = H_1$, и т. д., поэтому $H$ или $H_1 = H_1$; но, такъ какъ $H_1$ удовлетворяетъ и второму условію, то $H$ или $H_1 = H$; слѣдовательно, $H = H_1$.

обобщеннаго ограничительнаго принципа, нарушается слѣдствіе 17: *Если* $\overline{x} = \Omega$, *то* $x = 0$, такъ какъ безконечное объединеніе несовмѣстимыхъ съ $x$ предложеній можетъ оказаться совмѣстимо съ $x$.

Итакъ для того, чтобы сдѣлать безконечную совокупность *совершенною*, нужно прибавить послѣднее допущеніе—*обобщеніе ограничительнаго принципа:*

*Объединеніе* $\alpha = (A$ или $B$ или $C \ldots)$ *безконечной совокупности предложеній не содержитъ иныхъ частныхъ случаевъ, кромѣ объединеній изъ частныхъ случаевъ* $A$, $B$, $C$, ...

**28. Совмѣщеніе предложеній и отрицаніе.**

Слѣдствіе 18 въ § 1 устанавливаетъ связь между совмѣщеніемъ и отрицаніемъ предложеній. Въ силу этого возможно опредѣлить совмѣщеніе на основаніи формулы

$$(A \text{ и } B) = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B})}. \tag{13}$$

Поэтому введенное нами дополнительное допущеніе существованія совмѣщенія двухъ предложеній можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

*Если* $A$ *есть предложеніе совокупности, то существуетъ и объединеніе всѣхъ несовмѣстимыхъ* [1]) *съ* $A$ *предложеній, которое и называется* $\overline{A}$, *т. е. отрицаніемъ* $A$.

Вслѣдствіе обобщеннаго ограничительнаго принципа, $A$ и $\overline{A}$ несовмѣстимы; вслѣдствіе принципа единственности, $A$ или $\overline{A} = \Omega$. Кромѣ того, $A = \overline{\overline{A}}$; дѣйствительно, если $\alpha$ или $A = A$, то $\alpha$ и $\overline{A} = 0$, поэтому $\alpha$ или $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, откуда $A$ или $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$; съ другой стороны, если $\alpha$ или $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, то $\alpha$ и $\overline{A} = 0$, но, такъ какъ $\alpha$ есть частный случай $\Omega = A$ или $\overline{A}$, то $\alpha$ (вслѣдствіе ограничительнаго принципа) есть объединеніе изъ частнаго случая $A$ и частнаго случая $\overline{A}$, поэтому $\alpha$ есть частный случай $A$.

Докажемъ теперь, что предложеніе

$$z = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B})}$$

соотвѣтствуетъ опредѣленію, данному въ § 1 (5).

Для этого замѣтимъ сначала, что изъ ($C$ или $D) = D$ вытекаетъ $\overline{C}$ или $\overline{D} = \overline{C}$, т. к. предложеніе, не совмѣстимое съ $D$, т. е. принадлежащее $\overline{D}$, не совмѣстимо и съ $C$, а потому принадлежитъ также $\overline{C}$.

[1]) Опредѣленіе *несовмѣстимости* двухъ предложеній можетъ быть сохранено прежнее.

Итакъ намъ нужно показать вопервыхъ, что $z$ есть частный случай $A$ и частный случай $B$, и вовторыхъ, что всякій совмѣстный частный случай $A$ и $B$ есть частный случай $z$. Въ самомъ дѣлѣ, $\overline{A}$ есть частный случай $(\overline{A}$ или $\overline{B})$, поэтому $z = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B})}$ есть, въ силу только что доказаннаго, частный случай $A$; по этой же причинѣ $z$ есть частный случай $B$.

Пусть, съ другой стороны, $x$ есть частный совмѣстный случай $A$ и $B$, тогда $\overline{A}$ есть частный случай $\overline{x}$, и $\overline{B}$ есть также частный случай $\overline{x}$, а потому $(\overline{A}$ или $\overline{B})$ есть частный случай $\overline{x}$; слѣдовательно, наконецъ, $x$ есть частный случай $z = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B})}$, что и требовалось доказать.

Изъ формулы (13) мы выводимъ также опредѣленіе совмѣщенія безконечнаго множества предложеній

$$(A \text{ и } B \text{ и } C \ldots) = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B} \text{ или } \overline{C} \ldots)}. \tag{14}$$

Такимъ образомъ ассоціативность и коммутативность распространяются и на безконечныя совмѣщенія.

Покажемъ, что и теоремы распредѣлительности распространяются на безконечныя объединенія. Покажемъ сначала, что

$$h \text{ и } [A \text{ или } B \ldots] = [(h \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \ldots]. \tag{15}$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$[A \text{ или } B \text{ или } C \ldots] = [(h \text{ и } A) \text{ или } (\overline{h} \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \text{ или } \ldots] =$$
$$= \{[(h \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \text{ или } \ldots] \text{ или } [(\overline{h} \text{ и } A) \text{ или } (\overline{h} \text{ и } B) \text{ или } \ldots]\}.$$

Поэтому

$$h \text{ и } [A \text{ или } B \text{ или } C \ldots] =$$
$$= \{h \text{ и } [(h \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \text{ или } \ldots]\} \text{ или } \{[h \text{ и } [(\overline{h} \text{ и } A) \text{ или } \ldots]\} =$$
$$= [(h \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \text{ или } \ldots], \text{ ч. и т. д.}$$

Примѣчаніе. Въ этомъ доказательствѣ предполагается, что обѣ части равенства (15) имѣютъ смыслъ. Но можно убѣдиться, что, если $(A$ или $B \ldots)$ существуетъ, то существуетъ и вторая часть равенства (15). Дѣйствительно, $z = h$ и $[A$ или $B \ldots]$ имѣетъ частнымъ случаемъ всякое изъ совмѣщеній $(h$ и $A)$, $(h$ и $B)$ и т. д., поэтому $[(h$ и $A)$ или $(h$ и $B) \ldots]$ будетъ имѣть смыслъ и окажется равнымъ $z$, если только мы покажемъ, что всякое предложеніе $M$, отличное отъ $z$, имѣющее частнымъ случаемъ $(h$ и $A)$, $(h$ и $B)$ и т. д., включаетъ въ себя $z$; но, если бы $z$ не было частнымъ случаемъ $M$, то $z$ включало бы въ себя $z_1 = (z \text{ и } M)$, которое имѣло бы тѣ же частные случаи $(h \text{ и } A)$ и т. д., такъ что $(z \text{ и } \overline{z_1}) \neq 0$ было бы не совмѣстимо ни съ однимъ изъ предложенiй $(h \text{ и } A)$, $(h \text{ и } B)$ и т. д., между тѣмъ какъ всякiй частный случай $z$ долженъ быть совмѣстимъ съ $h$ и, по крайней мѣрѣ, съ однимъ изъ предложенiй $A$, $B$ и т. д.; слѣдовательно, $z$ есть частный случай $M$.

Полагая $\overline{h} = h_1$, $\overline{A} = A_1$, $\overline{B} = B_1$ и т. д. и беря отрицанiя обѣихъ частей равенства (15), получимъ вторую теорему распредѣлительности

$$h_1 \text{ или } [A_1 \text{ и } B_1 \text{ и } \ldots] = [(h_1 \text{ или } A_1) \text{ и } (h_1 \text{ или } B_1) \text{ и } \ldots]. \quad (15^{\text{bis}})$$

**29. Обобщенный конструктивный принципъ.**

Изъ сдѣланныхъ нами допущенiй отнюдь не вытекаетъ существованiе безконечнаго объединенiя изъ какихъ-угодно предложенiй. Допущенiе, что *существуетъ всякое безконечное объединенiе изъ предложенiй данной совокупности*, т. е. *обобщенiе конструктивнаго принципа* не является обязательнымъ для совершенной совокупности [1]). Если мы примемъ этотъ общiй принципъ, то изъ него, въ частности, будутъ вытекать и существованiе истиннаго предложенiя, и существованiе совмѣщенiя.

Примѣръ совершенной совокупности, въ которой соблюденъ обобщенный конструктивный принципъ, мы получили бы, если бы дополнили только что разсмотрѣнную систему конечныхъ бинарныхъ дробей совокупностью всѣхъ безконечныхъ дробей, при условiи, что дроби, имѣющiя въ перiодѣ 1, не будутъ считаться равнозначными тѣмъ конечнымъ дробямъ, которымъ онѣ должны быть равны, какъ предѣлы безконечной суммы членовъ геометрической прогрессiи. Для того, чтобы избѣжать этого противорѣчiя съ общепринятыми ариѳметическими допущенiями, достаточно разсматривать наши дроби, какъ написанныя не въ бинарной, а въ какой-нибудь другой, напримѣръ, десятичной системѣ.

---

[1]) Обобщенный конструктивный принципъ (вмѣстѣ съ ограничительнымъ) осуществляется въ схемѣ § 2, если мы распространимъ ее на безконечное множество простыхъ чиселъ и ихъ всевозможныхъ произведенiй, лишенныхъ квадратныхъ множителей. Истинному предложенiю, по прежнему, соотвѣтствуетъ 1, ложному—будетъ соотвѣтствовать 0, который мы опредѣлимъ, какъ число, кратное всѣмъ цѣлымъ числамъ. Однако составленная система, въ которой всегда существуетъ и совмѣщенiе двухъ предложенiй (наименьшее кратное), не будетъ совершенной, ибо въ ней нарушенъ принципъ единственности—всякая пара предложенiй (кромѣ 0) здѣсь совмѣстима; поэтому отрицанiемъ всякаго предложенiя былъ бы 0. Замѣтимъ, что теоремы распредѣлительности остаются тѣмъ не менѣе въ силѣ.

Примѣръ совершенной совокупности, гдѣ обобщенный конструктивный принципъ нарушенъ, мы получимъ, разсматривая, кромѣ конечныхъ дробей, только тѣ безконечныя дроби, которыя имѣютъ періодомъ 1. Дѣйствительно, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, здѣсь соблюдены всѣ необходимыя условія совершенной совокупности, а между тѣмъ нѣкоторыя объединенія, какъ напримѣръ, объединеніе всѣхъ дробей, имѣющихъ 1 только на четныхъ мѣстахъ, лишены смысла, т. к. всякая дробь вида: 0,01111...; 0,010111...; 0,0101011..., должна была бы имѣть частнымъ случаемъ это объединеніе, но безконечная дробь 0,01(01)... не включена въ нашу совокупность.

Примѣчаніе. Когда мы, кромѣ 0,111..., разсматриваемъ только конечныя дроби, то мы могли бы сказать, что эта безконечная дробь 0,111..., соотвѣтствующая истинѣ, является объединеніемъ всякаго безконечнаго множества предложенія. Однако, во избѣжаніе недоразумѣній, въ виду того, что мы всегда должны оперировать только съ совершенными совокупностями, мы будемъ включать уже въ самое понятіе *объединенія* допущеніе ограничительнаго принципа, поэтому объединеніе, не удовлетворяющее этому принципу, слѣдуетъ считать лишеннымъ смысла, и необходимо помнить, въ частности, что обобщенный конструктивный принципъ постулируетъ существованіе именно тѣхъ объединеній, которыя присущи совершеннымъ совокупностямъ, т. е. подразумѣваетъ обобщенный ограничительный принципъ.

Изъ формулы (14) видно, что изъ обобщеннаго конструктивнаго принципа вытекаетъ существованіе совмѣщенія всякаго безконечнаго множества предложеній.

**30. Классификація безконечныхъ совершенныхъ совокупностей.**

Въ § 3 мы показали, что всѣ конечныя совершенныя совокупности имѣютъ одну и ту же структуру, а именно, составляются при помощи элементарныхъ предложеній. Напротивъ, существованіе элементарныхъ предложеній отнюдь не обязательно для безконечныхъ совершенныхъ совокупностей, и такимъ образомъ отнюдь не является необходимымъ условіемъ примѣнимости всѣхъ установленныхъ выше правилъ логическаго счисленія.

Мы можемъ поэтому совершенныя совокупности раздѣлить на четыре типа:

I. *Совокупности 1-го типа*, для которыхъ

a) Не всякое предложеніе представляетъ собой объединеніе элементарныхъ предложеній,

b) Обобщенный конструктивный принципъ не соблюденъ.

II. *Совокупности 2-го типа*, для которыхъ

a) Не всякое предложенiе представляетъ собой объединенiе элементарныхъ предложенiй,

b) Обобщенный конструктивный принципъ соблюденъ.

III. *Совокупности 3-го типа*, для которыхъ

a) Всякое предложенiе есть объединенiе элементарныхъ предложенiй,

b) Обобщенный конструктивный принципъ не соблюденъ.

IV. *Совокупности 4-го типа*, для которыхъ

a) Всякое предложенiе есть объединенiе элементарныхъ предложенiй,

b) Обобщенный конструктивный принципъ соблюденъ.

Разсмотрѣнные выше оба примѣра совершенныхъ совокупностей относятся къ 3-му и 4-му типу, для которыхъ принципъ существованiя элементарныхъ предложенiй соблюденъ: дроби, содержащiя лишь одну единицу, соотвѣтствуютъ элементарнымъ предложенiямъ. Построимъ примѣры совокупностей первыхъ двухъ типовъ.

Разсмотримъ совокупность всѣхъ *чистыхъ* перiодическихъ дробей, составленныхъ изъ 0 и 1 (можно даже предположить ихъ написанными въ бинарной системѣ—тогда это будутъ рацiональныя числа вида $\left.\frac{a}{2^n-1}\right)$. Придавая прежнiй смыслъ операцiи «или», мы убѣждаемся, что совокупность *совершенна*; но объединенiе безконечнаго множества различныхъ дробей будетъ, либо истиной (0,111...), либо не будетъ имѣть смысла. Такимъ образомъ обобщенный конструктивный принципъ нарушенъ, но кромѣ того, никакая изъ разсматриваемыхъ дробей не представляетъ элементарнаго предложенiя, т. к., взявши двойной перiодъ и замѣнивъ одну изъ единицъ нулемъ, мы получимъ частный случай этой дроби. Слѣдовательно, построенная совокупность принадлежитъ 1-му типу.

Для построенiя совокупности 2-го типа, вернемся къ совокупности всѣхъ дробей, соотвѣтствующей 4-му типу, но вмѣсто каждой дроби $x$ беремъ функцiю $f(x)$, опредѣленную условiемъ, что $f(x)=0$, если $x$ содержитъ лишь конечное число единицъ, т. е. представленъ конечною дробью; $f(x)=0,111\ldots$, если $x$ содержитъ конечное число нулей; и наконецъ, $f(x)=x$ для остальныхъ значенiй $x$. Пусть $f(x)$ представляетъ каждое предложенiе, а $[f(x)$ или $f(x_1)]=f(y)$, гдѣ $y$ имѣетъ наибольшую изъ цифръ $f(x)$ и $f(x_1)$ на каждомъ мѣстѣ. Наша совокупность будетъ совершенной, и кромѣ того,

$$[f(x) \text{ или } f(x_1) \text{ или } \ldots f(x_n) \text{ или } \ldots]=f(y)$$

всегда имѣетъ смыслъ [1]), т. е. обобщенный конструктивный принципъ соблюденъ, При этомъ, элементарныхъ предложенiй не будетъ, т. к. дробь, имѣющая безчисленное множество единицъ, всегда можетъ быть разложена на двѣ аналогичныя дроби. Мы построили, слѣдовательно, совокупность 2-го типа.

Примѣчанiе. Соединенiе совокупностей того же типа приводитъ къ совокупности того же типа. Напротивъ, послѣ осуществленiя нѣкоторыхъ предложенiй, типъ совокупности можетъ измѣниться, какъ мы въ этомъ сейчасъ убѣдимся.

### 31. Совокупности 2-го и 4-го типа и теорема Кантора.

Если мы какую нибудь совершенную совокупность разложимъ всѣми возможными способами на простыя конечныя совокупности $O$, $A$, $\overline{A}$, $\Omega$; 0, $B$, $\overline{B}$, $\Omega$; и т. д., то для совокупности 2-го и 4-го типа совмѣщенiя ($A$ и $B\ldots$) будутъ всегда имѣть смыслъ, и слѣдовательно, будутъ представлять либо невозможное предложенiе, либо элементарное предложенiе. Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и т. д. будутъ всѣ элементарныя предложенiя, и пусть $A$ будетъ какое-нибудь не элементарное предложенiе; въ такомъ случаѣ, если $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'\ldots$ представляютъ всѣ входящiя въ $A$ элементарныя предложенiя, и $A'$=($\alpha'$ или $\beta'$ или $\gamma'\ldots$), то $A''$=($A$ и $\overline{A'}$) будетъ лишено элементарныхъ предложенiй.

*Если мы положимъ всѣ предложенiя $A''$ равнозначными $O$, то наша совокупность будетъ совокупностью 4-го типа. Если же всѣ $A' = 0$, то совокупность будетъ лишена элементарныхъ предложенiй и назовется простой совокупностью 2-го типа. Такимъ образомъ въ самой общей совокупности 2-го типа любое предложенiе является объединенiемъ одного предложенiя простой совокупности 2-го типа съ однимъ предложенiемъ совокупности 4-го типа.* Обозначая черезъ $\Omega'$ объединенiе всѣхъ $A'$ и черезъ $\Omega''$—объединенiе всѣхъ $A''$, мы замѣчаемъ, что $\overline{\Omega'} = \Omega''$. Отсюда мы заключаемъ, что, осуществляя $\Omega''$, т. е. *полагая $\Omega'' = \Omega$, мы превращаемъ всякую совокупность 2-го типа въ простую совокупность того же типа; наоборотъ, полагая $\Omega' = \Omega$, мы превратимъ нашу совокупность въ совокупность 4-го типа.*

Къ совокупностямъ 2-го и 4-го типа примѣнима слѣдующая теорема Кантора:

*Мощность совокупности 2-го и 4-го типа выше мощности совокупности ея элементарныхъ предложенiй.*

---

[1]) $y$ на каждомъ мѣстѣ имѣетъ наибольшую изъ цифръ $f(x)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, …, такъ что, если $x$, $x_1$, … конечныя дроби, то $f(x) = f(x_1) = \ldots = 0$, а потому и $f(y) = 0$.

Это вытекаетъ изъ того, что, составляя всевозможныя объединенія элементарныхъ предложеній, мы получаемъ предложенія, которыя различны, если только они отличаются хотя бы однимъ элементарнымъ предложеніемъ.

*Слѣдствіе* 1. *Совокупность 4-го типа конечна или же имѣетъ мощность не меньшую, чѣмъ continuum.*

*Слѣдствіе* 2. *Исчислимая совокупность 2-го типа либо вовсе лишена элементарныхъ предложеній, либо имѣетъ ихъ только конечное число.*

Послѣ того, какъ нами доказано существованіе совершенныхъ совокупностей четырехъ типовъ, намъ остается показать возможность ихъ ариѳметизаціи, въ соотвѣтствіи съ принципами, установленными во 2-й главѣ.

Такимъ образомъ, въ частности, *при установленіи вѣроятностей предложеній безконечной совокупности, мы не можемъ придавать значеніе 1 вѣроятности не достовѣрнаго предложенія* $A$, ибо, беря конечную часть нашей совокупности $(O, A, \overline{A}, \Omega)$, мы пришли бы къ противорѣчію. Я потому подчеркиваю это очевидное замѣчаніе, что, благодаря не достаточной отчетливости формулировки принциповъ теоріи вѣроятностей, всѣ математики, повидимому, примирялись съ этимъ противорѣчіемъ.

## § 7.

### Ариѳметизація безконечныхъ совокупностей.

**32. Ариѳметизація совокупностей 1-го типа.**

Наиболѣе важный и характерный образецъ совершенной совокупности 1-го типа, которымъ мы можемъ ограничиться, получается слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ исчислимую совокупность конечныхъ несвязаннныхъ между собой совокупностей: $(O, \overline{A}, A, \Omega)$, $(0, A_1, \overline{A}_1, \Omega)$, $(0, A_2, \overline{A}_2, \Omega)$ и т. д., которыя мы послѣдовательно присоединяемъ. Совокупность $H$ разсматриваемыхъ нами предложеній составляется изъ предложеній, входящихъ въ какую-нибудь изъ получающихся такимъ образомъ конечныхъ совокупностей.

Совокупность $H$ исчислима и совершенна 1-го типа; въ ней имѣются, кромѣ конечныхъ объединеній, лишь тѣ безконечныя объединенія ($\alpha_1$ или $\alpha_2 \ldots$), которыя обладаютъ свойствомъ, что только ограниченное число изъ входящихъ въ нихъ элементовъ не являются частными случаями предыдущихъ, т. е. такія объединенія, которыя непосредственно приводятся къ конечнымъ.

Конкретный примѣръ совокупности $H$ даетъ нами неограниченное повтореніе опыта бросанія монеты. Всякое предложеніе, относящееся къ конечному числу бросаній, имѣетъ опредѣленный смыслъ, но предложенія, не входящія ни въ какую конечную совокупность, (напримѣръ: «число выпаденій орла при неограниченномъ повтореніи опыта равно числу выпаданій рѣшетки» или «орелъ выпадаетъ не менѣе 10 разъ») лишены смысла.

Изъ выше сказаннаго ясно, что вѣроятности всѣхъ предложеній совокупности $H$ опредѣляются послѣдовательно, на основаніи соглашеній и теоремъ, установленныхъ для конечныхъ совокупностей, безъ противорѣчій, и не вводя никакихъ новыхъ допущеній.

О вѣроятностяхъ предложеній, не имѣющихъ смысла, конечно, не можетъ быть рѣчи; но вмѣсто этого часто можетъ представлять интересъ вычисленіе *предѣла* вѣроятностей нѣкоторыхъ перемѣнныхъ имѣющихъ смыслъ предложеній, когда число повтореній опыта неограниченно возрастаетъ.

Напримѣръ, вѣроятность, что орелъ выпадаетъ не менѣе 10 разъ при $k$ бросаніяхъ стремится къ предѣлу 1, если $k$ безконечно возрастаетъ, но это отнюдь не означаетъ, что мы *обязаны* придавать смыслъ предложенію, орелъ выпадаетъ не менѣе 10 разъ при безконечномъ числѣ бросаній, ибо возможно, что какъ бы долго мы ни повторяли опытъ, нельзя будетъ установить, осуществилось ли предложеніе или нѣтъ.

Точно также вѣроятность, что отношеніе числа выпаданій орла и рѣшетки будетъ, послѣ достаточно большого числа бросаній монеты, сколь угодно мало отличаться отъ единицы, имѣетъ предлѣомъ 1, если вѣроятность выпаденія орла равна $\frac{1}{2}$.

Съ той же самой точки зрѣнія, которую можно назвать *финитистской*, не вводя никакихъ особыхъ допущеній, мы можемъ обосновать и такъ называемыя *геометрическія вѣроятности*. Замѣтимъ сейчасъ же, что, съ логической стороны, финитистская точка зрѣнія, разсматривающая только совокупности 1-го типа, вполнѣ допустима, но въ примѣненіи къ геометріи, она является нѣсколько искусственной, т. к. выдѣленіе особой категоріи предложеній, имѣющихъ смыслъ, является условнымъ и не находитъ себѣ достаточнаго интуитивно-геометрическаго основанія.

**33. Геометрическія вѣроятности.**

Основной задачей на вычисленіе вѣроятностей въ геометріи, къ которой приводятся всѣ остальныя, является опредѣленіе вѣроятности, что нѣкоторая точка $M$, находящаяся на отрѣзкѣ $AB$, помѣщается на нѣкоторой части его $PQ$.

Для разрѣшенія этой основной задачи можно поступить слѣдующимъ образомъ: полагая, для простоты письма, отрѣзокъ $AB$ равнымъ 1 и точку $A$ совпадающей съ началомъ $O$, возьмемъ выше приведенную схему совокупности перваго типа и условимся составлять бинарную дробь, въ которой на первомъ мѣстѣ 1 соотвѣтствуетъ предложенію $A$, 0 соотвѣтствуетъ $\overline{A}$, точно также на второмъ мѣстѣ цифра 1 соотвѣтствуетъ $A_1$, цифра 0 — $\overline{A}_1$ и т. д. Въ такомъ случаѣ каждому предложенію нашей совершенной совокупности $H$ перваго типа соотвѣтствуютъ всѣ конечныя или безконечныя бинарныя дроби, у которыхъ на одномъ или нѣсколькихъ данныхъ мѣстахъ стоятъ опредѣленныя цифры. Такимъ образомъ, напримѣръ, предложенію ($\overline{A}$ и $A_1$) соотвѣтствуютъ всѣ дроби, которыя начинаются цифрами 0,01, т. е. всѣ числа $x$, удовлетворяющія условію $0{,}01 < x < 0{,}1$. При этомъ знаки $<$ и $>$ можно замѣнить также соотвѣтственно знаками $\leqq$ и $\geqq$, т. к. предложенія $x = a$, гдѣ $a$ естьданная конечная или безконечная дробь, слѣдуетъ разсматривать, какъ лишенныя смысла, ибо они соотвѣтствуютъ совмѣщенію безконечнаго множества предложеній.

Изъ выше сказаннаго вытекаетъ, что, если $P$ и $Q$ суть двѣ точки отрѣзка 01, абсциссы которыхъ выражаются конечными бинарными дробями $a$ и $b$ ($a < b$), то вѣроятность неравенства $a < x < b$, т. е. того, что $x$ находится на отрѣзкѣ $PQ$, получится непосредственнымъ примѣненіемъ теоремъ умноженія и сложенія вѣроятностей, коль скоро нами приняты опредѣленныя значенія для вѣроятностей предложеній $A$, $A_1$, $A_2$, .... Не трудно видѣть, что при полной произвольности (въ соотвѣтствіи лишь съ основными допущеніями) этихъ послѣднихъ вѣроятностей мы приходимъ къ выраженію

$$F(b) - F(a)$$

для вѣроятности $a < x < b$, гдѣ $F(z)$ произвольная, не убывающая функція, опредѣленная лишь для конечныхъ бинарныхъ значеній $z$, при чемъ для указанныхъ значеній

$$F(b) - F(0) \leqq 1;$$

и, кромѣ того, для $b = 1$,

$$F(1) - F(0) = 1.$$

Въ частности, если предложенія $A$, $A_1$ и т. д. независимы между собой и имѣютъ всѣ вѣроятности равныя $\frac{1}{2}$, то мы прійдемъ къ принимаемому обыкновенно значенію функціи $F(z) = z$.

Какъ было сказано выше, предложеніе $x = a$, съ финитистской точки зрѣнія, лишено смысла. Тѣмъ не менѣе, можно говорить о *предѣлѣ* вѣроятности неравенствъ

$$a < x < a + h \text{ или } a - h < x < a,$$

когда $h$ стремится къ нулю. Вѣроятность перваго изъ этихъ неравенствъ имѣетъ предѣломъ

$$\underset{h=0}{\text{пред.}} \; [F(a+h) - F(a)],$$

второго —

$$\underset{h=0}{\text{пред.}} \; [F(a) - F(a-h)].$$

Какъ извѣстно, эти предѣлы существуютъ, и въ частности, для непрерывной функціи равны 0.

Аналогичнымъ образомъ мы не имѣемъ права, оставаясь на финитистской точкѣ зрѣнія, говорить о предложеніи

$$\alpha < x < \beta,$$

если $\alpha$ и $\beta$ не конечныя бинарныя дроби, а должны вмѣсто этого разсматривать предѣлъ вѣроятности неравенства

$$a_n < x < b_n,$$

гдѣ $a_n$ и $b_n$ представляютъ конечныя дроби, имѣющія соотвѣтственно предѣломъ $\alpha$ и $\beta$.

Если $F(z)$ функція непрерывная, то предѣлъ разсматриваемыхъ вѣроятностей не зависитъ отъ того будетъ ли $\alpha \gtreqless a_n$ и $\beta \gtreqless b_n$, и будетъ равенъ $F(\beta) - F(\alpha)$. Въ общемъ же случаѣ, можно, согласно обычнымъ обозначеніямъ, положить $F(\beta + 0) = \text{пред. } F(b_n)$, если $b_n > \beta$, и $F(\beta - 0) = \text{пред. } F(b_n)$, если $b_n < \beta$.

Такимъ образомъ, неравенства $a_n < x < b_n$ имѣютъ вѣроятности, предѣлъ которыхъ равенъ

$$F(\beta \pm 0) - F(\alpha \pm 0)$$

въ зависимости отъ того, справа-ли или слѣва $a_n$ и $b_n$ приближаются къ своимъ предѣламъ $\alpha$ и $\beta$.

Примѣняя извѣстныя теоремы теоріи предѣловъ, можно въ большинствѣ случаевъ съ предѣлами вѣроятностей оперировать такъ же, какъ съ вѣроятностями. Напримѣръ, если отрѣзки $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ не имѣютъ общей части, то вѣроятность соблюденія одного или другого изъ неравенствъ

$$\alpha < x < \beta, \quad \alpha' < x < \beta'.$$

при предположеніи, что оба они имѣютъ смыслъ, равна суммѣ вѣроятностей каждаго изъ нихъ. Если же оба или одно изъ нашихъ неравенствъ должно быть разсматриваемо, какъ лишенное смысла, то нужно сказать, что предѣлъ вѣроятности, что будетъ соблюдено одно изъ неравенствъ

$$a_n < x < b_n; \quad a'_n < x < b'_n$$

равенъ суммѣ предѣловъ вѣроятностей каждаго изъ нихъ, гдѣ $a_n$, $b_n$, $a'_n$ $b'_n$ имѣютъ соотвѣтственно предѣлами $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$.

Изъ предыдущаго достаточно ясно, что, если предѣлъ вѣроятностей нѣкоторыхъ предложеній равенъ нулю, то это не означаетъ, что существуетъ, т. е. имѣетъ смыслъ, при данной постановкѣ вопроса, и предѣльное предложеніе, но, если окажется, что оно имѣетъ смыслъ, то оно невозможно. Аналогичное утвержденіе относится и къ предѣлу вѣроятностей равному 1.

Примѣчаніе. Вмѣсто бинарныхъ дробей можно было бы совершенно также разсматривать десятичныя или другія дроби. Въ каждомъ случаѣ опредѣленный смыслъ придается только предложеніямъ, утверждающимъ, что на опредѣленныхъ мѣстахъ стоятъ опредѣленныя цифры. Поэтому неравенства, имѣющія смыслъ въ одной системѣ, въ другой системѣ оказываются лишенными смысла, и наоборотъ.

**34. Ариѳметизація совокупностей 2-го типа.**

Разсматривая ту же исчислимую совокупность предложеній $H$, которую мы получили выше присоединеніемъ совокупностей $(O, \overline{A}, A, \Omega)$, $(O, A_1, \overline{A}_1, \Omega)$ и т. д., мы можемъ условиться считать невозможнымъ всякое безконечное совмѣщеніе ($A$ и $A_1$ и ...) или, что то же самое, считать достовѣрнымъ всякое безконечное объединеніе [1]) вида ($A$ или $A_1$ или $A_2$ ...). Такимъ образомъ мы составимъ *простую совершенную совокупность 2-го типа* (т. е. совокупность, лишенную элементарныхъ предложеній, но подчиняющуюся обобщенному конструктивному принципу).

Изслѣдуемъ геометрическія вѣроятности съ этой новой точки зрѣнія, логически столь же пріемлемой, какъ и финитистская. Мы приходимъ при помощи той же системы бинарныхъ дробей къ заключенію, что

[1]) Что касается всѣхъ безконечныхъ объединеній вида ($A_{k_1}$ или $A_{k_2}$ или ...), то они могутъ представлять собой новыя предложенія, въ противномъ случаѣ они всѣ будутъ истинными, какъ совмѣстныя со всякимъ предложеніемъ совокупности.

всякое опредѣленное равенство $a = x$ слѣдуетъ считать невозможнымъ, т. е. такимъ, что оно не можетъ быть никогда точно осуществлено [1]) или установлено, а потому знаки $\leq$ и $<$ равнозначны.

Нужно замѣтить, что утвержденіе, что $x$ есть нѣкоторое число, заключенное между 0 и 1, отнюдь не означаетъ того, что $x$ можетъ быть опредѣлено съ абсолютною точностью, и этимъ объясняется кажущійся парадоксъ, будто бы истинное предложеніе является объединеніемъ безчисленнаго множества невозможныхъ. Намъ необходимо однако болѣе детально изслѣдовать вѣроятности геометрическихъ предложеній, какъ предложеній, принадлежащихъ къ совершеннымъ совокупностямъ 2-го типа, и дополнить соотвѣтствующимъ образомъ принципы исчисленія вѣроятностей при распространеніи ихъ на безконечныя совокупности.

**35. Обобщеніе теоремы сложенія вѣроятностей.** До сихъ поръ при вычисленіи вѣроятностей предложеній безконечныхъ совокупностей, какъ 1-го, такъ и 2-го типа, мы пользовались тѣмъ, что каждое изъ разсматриваемыхъ нами предложеній принадлежало также нѣкоторой конечной совокупности, а потому, примѣняя принципы теоріи вѣроятностей конечныхъ совокупностей, возможно было вычислить требуемыя вѣроятности. Благодаря этому, наши вычисленія не зависятъ отъ того, допускаемъ мы или нѣтъ, что аксіома 2 (§ 4) распространяется на объединенія безконечнаго множества несовмѣстимыхъ предложеній, или, что то же самое, распространяется ли теорема сложенія на безконечныя объединенія или нѣтъ.

Дѣйствителъно, изъ того, что теорема сложенія справедлива для конечнаго числа предложеній, мы можемъ заключить только, что, если $A$ есть объединеніе исчислимой совокупности несовмѣстимыхъ предложеній $a_1, a_2, \ldots$, имѣющихъ соотвѣтственными вѣроятностями $p_1, p_2, \ldots$, то вѣроятность $P$ предложенія $A$ болѣе или равна суммѣ ряда

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots,$$

который, слѣдовательно, долженъ быть сходящимся.

Въ совокупностяхъ 1-го типа вопросъ о распространеніи или нераспространеніи теоремы сложенія вовсе не можетъ представиться, т. к. тамъ, по существу дѣла, безконечное объединеніе лишь тогда имѣетъ смыслъ, когда оно приводится къ конечному. Иначе обстоитъ дѣло съ совокупностями 2-го типа. Вводя ту же монотонную функцію

[1]) Въ 1-й главѣ (§ 3) мы разъяснили, что невозможное предложеніе характеризуется тѣмъ, что оно не можетъ стать истиннымъ или достовѣрнымъ, т. е. осуществиться.

$F(z)$, которую мы опредѣлили выше, и разсматривая предложеніе

$$\alpha < x < \beta,$$

мы видимъ, что на этотъ разъ оно имѣетъ смыслъ для всякихъ $\alpha$ и $\beta$, и вѣроятность его $w$ будетъ подчинена только двумъ условіямъ:

$$w \leq F(\beta + 0) - F(\alpha - 0),$$
$$w \geq F(\beta - 0) - F(\alpha + 0).$$

Если, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ $\alpha$ и $\beta$ есть точка разрыва функціи $F$, то знакъ равенства не можетъ имѣть мѣста въ обоихъ условіяхъ. Въ такомъ случаѣ, если мы положимъ, что

$$w > F(\beta - 0) - F(\alpha + 0),$$

обобщенная теорема сложенія будетъ непримѣнима къ предложенію, что $x$ находится на отрѣзкѣ $\alpha\beta$, разсматриваемомъ, какъ предѣлъ суммы отрѣзковъ: $(a_1b_1)$, $(a_1a_2)$, $(b_1b_2)$, $(a_2a_3)$, $(b_2b_3)\ldots$, входящихъ въ $\alpha\beta$. Если же

$$w < F(\beta + 0) - F(\alpha - 0),$$

то теорема сложенія непримѣнима къ отрицанію этого предложенія. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ возможно достовѣрное предложеніе

$$0 < x < 1$$

разсматривать, какъ безконечное объединеніе такихъ предложеній, сумма вѣроятностей которыхъ имѣетъ предѣлъ меньшій, чѣмъ единица.

Примѣчаніе. Такъ какъ всѣ точки не могутъ быть точками разрыва для монотонной функціи $F$, то всегда будутъ и такія безконечныя объединенія, къ которымъ обобщенная теорема сложенія примѣнима. Отсюда мы заключаемъ, что допущеніе или нарушеніе обобщенной теоремы сложенія равносильно распространенію или нераспространенію аксіомы 2 на безконечныя объединенія.

Нарушеніе теоремы сложенія или аксіомы 2 для безконечныхъ объединеній влечетъ за собой нарушеніе [1]) теоремы умноженія для безконечныхъ совмѣщеній, а также нѣкоторыхъ свойствъ математиче-

---

[1]) Обобщеніе теоремы умноженія вѣроятностей является слѣдствіемъ изъ обобщенной теоремы сложенія. Дѣйствительно, вѣр. ($A$ и $B$ и ... и $L$ и ...) $=1-$ вѣр. ($\overline{A}$ или $\overline{B}$ или ... ... или $\overline{L}$ или ...) $=1-$ пред. вѣр. ($\overline{A}$ или $\overline{B}$ ... или $\overline{L}$) $=$ пред. вѣр. ($A$ и $B$ ... и $L$).

скихъ ожиданій. Это нарушеніе представляло бы значительныя неудобства, потому что, даже придавая опредѣленный смыслъ предѣльнымъ предложеніямъ, какъ напримѣръ, предложенію $x = a$, или предложенію «при безграничномъ повтореніи опыта событіе $A$ произойдетъ по крайней мѣрѣ одинъ разъ», мы обыкновенно болѣе интересуемся вѣроятностями перемѣнныхъ предложеній, для которыхъ разсматриваемое предложеніе является предѣломъ, и хотимъ поэтому, чтобы вѣроятность послѣдняго была въ свою очередь предѣломъ этихъ вѣроятностей [1]). Эта непрерывность зависимости между предложеніями и ихъ вѣроятностями приводитъ къ необходимости распространить аксіому 2, а вмѣстѣ съ ней и теорему сложенія и умноженія на безконечное множество предложеній.

Итакъ обобщеніе аксіомы 2 есть единственное новое допущеніе, какое присоединяется къ прежнимъ, и такимъ образомъ мы получаемъ основной общій принципъ теоріи вѣроятностей безконечныхъ или конечныхъ совокупностей:

*Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы $p_1, p_2, \ldots$ могли быть, соотвѣтственно, вѣроятностями предложеній $A_1, A_2, \ldots$ данной безконечной совершенной совокупности, заключается въ томъ, чтобы вѣроятность всякаго предложенія, входящаго въ совокупность и являющагося объединеніемъ конечнаго или безконечнаго числа предложеній этой совокупности, была равна суммѣ (предѣлу суммы) вѣроятностей послѣднихъ, чтобы достовѣрное предложеніе имѣло вѣроятность 1 (слѣдовательно, невозможное—вѣроятность 0), остальныя же предложенія—вѣроятности, заключенныя между* 0 и 1$(0 < p < 1)$.

Что касается понятія вѣроятности одного предложенія послѣ осуществленія другого, и коэффиціента совмѣстимости предложеній, то намъ здѣсь нечего прибавить, по существу, къ тому, что было сказано во 2-й главѣ (§ 5).

---

[1]) Если, напримѣръ, событіе $A$ при первомъ опытѣ имѣетъ вѣроятность $\frac{1}{2}$, при второмъ $\frac{1}{4}$, при третьемъ $\frac{1}{8}$ и т. д., то, независимо отъ этихъ значеній вѣроятностей, мы вправѣ были бы утверждать, что наступленіе событія $A$ по крайней мѣрѣ одинъ разъ достовѣрно, потому что наше утвержденіе совмѣстимо со всякимъ результатомъ конечнаго числа опытовъ. Однако предѣлъ вѣроятности, что событіе $A$ произойдетъ при $k$ опытахъ, гдѣ $k$ безгранично возрастаетъ, будетъ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{16}+\ldots<\frac{3}{4}<1$. Нарушеніе теоремы сложенія имѣетъ послѣдствіемъ въ данномъ случаѣ, что оно замаскировываетъ тотъ фактъ, что осуществленіе предложенія $A$ въ какомъ-нибудь конечномъ опытѣ становится съ теченіемъ времени все болѣе невѣроятнымъ.

**36. Изслѣдованіе функціи F(z).**

Наше допущеніе, что совокупность $H$ есть простая совокупность 2-го типа, т. е. предположеніе, что безконечныя совмѣщенія подобныя ($A$ и $A_1$ и ...) невозможны, въ связи съ обобщенной теоремой сложенія, означаетъ, что предѣлъ вѣроятности неравенствъ $a-h<x<a+h$, гдѣ $h$ стремится къ 0, есть 0, а потому функція $F(z)$ *непрерывна*. Обратно, если функція $F(z)$ непрерывна, то совокупность предложеній $a<x<b$ (гдѣ $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$), и ихъ всевозможныхъ объединеній есть совокупность 2-го типа, т. е. лишенная элементарныхъ предложеній.

Обыкновенно, на функцію $F(z)$ налагается еще бо́льшее ограниченіе: ее предполагаютъ дифференцируемой, такъ что $F(z)=\int_0^z f(z)dz$. Это ограниченіе связано со слѣдующимъ свойствомъ:

Теорема. *Если* $\left(\frac{1}{2}+\alpha_n\right)$ и $\left(\frac{1}{2}-\alpha_n\right)$ *представляютъ собой, соотвѣтственно, вѣроятности n-ой цифры бинарной дроби быть единицей и нулемъ, то условіе необходимое и достаточное для того, чтобы* $F(z)=\int_0^z f(x)dx$, *гдѣ* $f(x)$ *ограничена, непрерывна при* $x \gtrless \frac{k}{2^n}$, *и* $\left[f\left(\frac{k}{2^n}+0\right)-f\left(\frac{k}{2^n}-0\right)\right]$ *стремится къ 0 съ возрастаніемъ n, состоитъ въ томъ, что рядъ* $\sum\alpha_n$ *долженъ быть абсолютно сходящимся*[1]).

Въ самомъ дѣлѣ, абсолютная сходимость ряда $\sum\alpha_n$ равнозначна равномѣрной сходимости всевозможныхъ произведеній

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 \pm 2\alpha_i). \tag{16}$$

Произведеніе вида

$$\prod_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{2} \pm \alpha_i\right)=F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-F\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

представляетъ вѣроятность неравенствъ

$$\frac{k}{2^n}<x<\frac{k+1}{2^n}. \tag{17}$$

Изъ сходимости произведеній (16) вытекаетъ, слѣдовательно, существо-

[1]) Если послѣдующія цифры не независимы отъ предыдущихъ, то на мѣсто абсолютной сходимости $\Sigma\alpha_n$, нужно поставить равномѣрную сходимость всѣхъ различныхъ произведеній $\prod(1+2\alpha_n)$.

ваніе конечнаго положительнаго предѣла

$$\text{пред. } 2^n\left[F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]=f(x), \tag{18}$$

гдѣ $x$ опредѣляется неравенствами (17), при безконечномъ возрастаніи $n$. Вслѣдствіе равномѣрной сходимости произведеній (16), функція $f(x)$ непрерывна для $x$ отличныхъ отъ $\frac{k}{2^n}$, и кромѣ того величина $f\left(\frac{k}{2^n}+0\right)-f\left(\frac{k}{2^n}-0\right)$, которая, вообще, отлична отъ нуля, при $n$ достаточно большомъ (и $k$ нечетномъ), можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой. Поэтому функція $f(x)$ интегрируема (въ смыслѣ Риманна).

Равенство (18) можемъ представить въ видѣ

$$F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-F\left(\frac{k}{2^n}\right)=\left(f(x)+\varepsilon_k\right)\delta, \tag{18 bis}$$

гдѣ $\delta=\frac{1}{2^n}$, и $\varepsilon_k$ равномѣрно стремится къ 0, при возрастаніи $n$. Слѣдовательно,

$$F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)=\sum_0^k\left[f(x)+\varepsilon_k\right]\delta;$$

откуда

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx, \tag{19}$$

или

$$F'(x)=f(x)$$

въ точкахъ непрерывности $f(x)$ (т. е. при $x \gtrless \frac{k}{2^n}$), въ точкахъ же $x=\frac{k}{2^n}$ правая производная функціи $F(x)$ равна $f(x+0)$, а лѣвая производная ея равна $f(x-0)$.

Обратно, изъ равенства (19) вытекаетъ (18) для значеній $x$, при которыхъ $f(x)$ непрерывна; а потому всѣ произведенія (16) сходятся, ч. и т. д.

Аналогичная теорема можетъ быть такимъ же образомъ доказана и для другихъ системъ счисленія. Отсюда вытекаетъ

Слѣдствіе. *Условіе необходимое и достаточное, чтобы функція $F(x)$ имѣла вездѣ непрерывную производную*[1]) *заключается въ томъ, чтобы въ двухъ системахъ (напримѣръ, въ бинарной и тернарной) счисленія вѣроятность n-ой цифры получить одно изъ h возможныхъ значеній была равна* $\frac{1}{h}+\alpha_n^{(h)}$, *гдѣ всѣ произведенія* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+h\alpha_n^{(h)})$ *сходятся.*

Примѣчаніе. Изъ доказанной теоремы видно, что всѣ разнообразные законы распредѣленія вѣроятностей, опредѣляемые произвольной функціей $f(x)$, отличаются лишь значеніями вѣроятностей первыхъ бинарныхъ (или, что̀ то же самое, десятичныхъ) знаковъ, послѣдующія же цифры во всякомъ случаѣ стремятся стать равновозможными. Такимъ образомъ всякіе опредѣленные законы послѣдовательности цифръ разсматриваемыхъ дробей, какъ напримѣръ, періодичность, ни при какой

---

[1]) Замѣтимъ, что для существованія конечной производной $F(x)$ въ данной точкѣ $x$ достаточно, чтобы

$$\underset{h=0}{\text{пред.}}\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{F(x+h)-F(x)}=\lambda.$$

Дѣйствительно, замѣтимъ, что, при $\varepsilon$ сколь угодно маломъ, можно выбрать $x$ настолько малымъ, чтобы имѣть

$$\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{F(x+h)-F(x)}=\lambda(1+\varepsilon'),$$

гдѣ $|\varepsilon'|<\varepsilon$, какъ только $|\lambda h|<\alpha$, $|h|<\alpha$. Выбирая такимъ образомъ нѣкоторое опредѣленное значеніе $h$, получимъ $F(x+h)-F(x)=Mh$; поэтому

$$F(x+\lambda h)-F(x)=M\lambda h(1+\varepsilon'),$$

откуда

$$\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{\lambda h}=M(1+\varepsilon').$$

Но такъ какъ $\varepsilon$ можно было взять сколь угодно малымъ, то

$$\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{\lambda h}$$

сколь угодно мало отличается отъ нѣкотораго конечнаго числа $M$, если $\lambda h$ стремится къ 0, ч. и т. д.

Въ большинствѣ случаевъ, при примѣненіи теоріи вѣроятностей, это условіе явно выполняется. Можно доказать, что приведенное условіе является также необходимымъ для существованія конечной производной (отличной отъ 0).

функціи $f(x)$ не могутъ быть осуществлены. Ариѳметизація геометрической совокупности при помощи какой бы то ни было непрерывной функціи $f(x)$ исключаетъ возможность опредѣленныхъ равенствъ $x=a$, и наоборотъ, если по характеру задачи опредѣленныя равенства $x=a$ могутъ быть осуществлены, то это не только исключаетъ возможность существованія непрерывной функціи $f(x)$, но даже дѣлаетъ невозможною непрерывность $F(x)$.

**Опредѣленіе.** Мы называемъ функцію $F(x)$ *непрерывной въ узкомъ смыслѣ слова, если* $\sum|F(\beta_n)-F(\alpha_n)|$ *всегда стремится къ нулю вмѣстѣ съ* $\sum|\beta_n-\alpha_n|$. Очевидно, въ частности, что существованіе конечной производной [1]) является достаточнымъ условіемъ для того, чтобы $F(x)$ была непрерывна въ узкомъ смыслѣ слова. *Для того, чтобы функція $F(x)$ была непрерывна въ узкомъ смыслѣ слова, необходимо, чтобы вѣроятности различныхъ цифръ на всѣхъ мѣстахъ безконечной дроби имѣли нижній предѣлъ отличный отъ нуля (т. е. верхній предѣлъ, отличный отъ 1).*

Дѣйствительно, еслибъ этотъ нижній предѣлъ не былъ отличенъ отъ нуля, то нашлось бы совмѣщеніе ($A_{k_0}$ и $A_{k_1}\ldots$) безконечнаго числа цифръ, имѣющее вѣроятность, отличную отъ нуля; такимъ образомъ, сумма промежутковъ, соотвѣтствующая даннымъ цифрамъ на $k_0$-мъ, $k_1$-мъ, $\ldots$, $k_n$-мъ мѣстахъ, общая длина которыхъ равна $\frac{1}{2^{n+1}}$, т. е. стремится къ 0 вмѣстѣ съ $n$, была бы отлична отъ нуля, т. е. функція $F(x)$, вопреки требованію, не была бы непрерывна въ узкомъ смыслѣ слова.

Не останавливаясь на болѣе подробномъ изслѣдованіи связи между свойствами функціи $F(x)$ въ случаѣ ея непрерывности съ вѣроятностями различныхъ бинарныхъ (десятичныхъ) цифръ числа $x$, перейдемъ къ разсмотрѣнію случая, когда функція $F(x)$ не непрерывна.

**37. Ариѳметизація совокупности 4-го типа при помощи прерывной функціи F(z).**

Мы видѣли, что функція $F(z)$ есть произвольная монотонная функція, подчиненная условію $F(1)-F(0)=1$. Изъ теоріи функцій извѣстно, что, если она имѣетъ точки разрыва, т. е. точки, гдѣ $F(a+0)-F(a-0)>0$, то совокупность этихъ точекъ *исчислима*.

Мы показали, что $F(a+0)-F(a-0)$ есть предѣлъ вѣроятности неравенствъ $a-h<x<a+h$, гдѣ $h$ стремится къ 0. Такъ какъ предложеніе $x=a$ есть совмѣщеніе всѣхъ предложеній $a-h<x<a+h$,

[1]) Для непрерывности въ узкомъ смыслѣ слова достаточно, чтобы было соблюдено условіе Липшица на всемъ промежуткѣ, за исключеніемъ ограниченнаго числа точекъ, гдѣ функція можетъ быть просто непрерывной.

то вслѣдствіе обобщенной теоремы сложенія (умноженія), предложеніе $x=a$ будетъ имѣть вѣроятностью $h_0 = F(a+0) - F(a-0)$. Выдѣлимъ всю исчислимую совокупность точекъ разрыва: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, обозначимъ

$$h_n = F(a_n+0) - F(a_n-0),$$

и составимъ функцію $F_1(z)$, обладающую свойствомъ, что

$$F_1(a_n+0) - F_1(a_n-0) = h_n;$$

сумма же всѣхъ ея измѣненій въ остальныхъ точкахъ пусть будетъ равна нулю. Тогда функція

$$F_2(x) = F(x) - F_1(x)$$

будетъ непрерывна. (Обозначая черезъ $\psi(x)$ функцію равную 0, при $x<0$, и равную 1, при $x>0$, можемъ представить $F_1(x)$ въ видѣ абсолютно сходящагося ряда $F_1(x) = \sum\limits_1^\infty h_n \psi(x-a_n)\Big)$.

Разсмотримъ сначала предположеніе, что

$$F_2(x) = 0,$$

т. е.

$$\sum_1^\infty h_n = 1.$$

Въ такомъ случаѣ, мы имѣемъ только конечную или исчислимую совокупность элементарныхъ предложеній: $x=a_1$, $x=a_2$, ..., и ихъ всевозможныя объединенія, т. е. мы получаемъ совокупность *четвертаго типа*. Всякое предложеніе

$$a < x < b \tag{20}$$

имѣетъ вѣроятность равную суммѣ вѣроятностей всѣхъ элементарныхъ равенствъ $x=a_n$, удовлетворяющихъ неравенству (20). Само собой понятно, что теперь знаки $<$ и $\leqq$ равнозначны лишь въ томъ случаѣ, когда они примѣняются къ значеніямъ, отличнымъ отъ точекъ разрыва.

Этотъ случай самымъ существеннымъ образомъ отличается отъ того, когда функція $F(x)$ непрерывна. Теперь послѣдовательныя цифры, вообще, не только не независимы, но послѣ того, какъ дано конечное число цифръ, все безконечное множество остальныхъ цифръ опредѣляется съ вѣроятностью, приближающейся къ достовѣрности, т. к. вѣроятность всякаго значенія выражается сходящимся безконечнымъ произведеніемъ, всѣ послѣдовательные множители котораго быстро приближаются къ единицѣ. Мы видимъ такимъ образомъ, что *та или иная ариѳметизація геометрическихъ совокупностей превращаетъ ихъ то въ совокупности 2-го типа, то въ совокупности 4-го типа. Если* $F_1(x)$ и $F_2(x)$ *обѣ отличны отъ нуля, то мы имѣемъ смѣшанный или общій случай совокупности 2-го типа, разсмотрѣнный выше (31), который легко приводится къ совокупности 4-го типа и къ простой совокупности 2-го типа.*

Въ Добавленіи мы еще вернемся къ вопросу о соображеніяхъ, которыми руководствуются при ариѳметизаціи совокупностей. Но здѣсь умѣстно будетъ замѣтить, что затрудненія и противорѣчія возникаютъ отъ того, что, установивъ одну опредѣленную ариѳметизирующую функцію $F(z)$, пользуются въ то же время интуитивнымъ представленіемъ, несовмѣстимымъ съ принятой функціей. Напримѣръ, признавая функцію $F(z)$ непрерывной, мы затрудняемся представить себѣ, что съ этимъ допущеніемъ несовмѣстима возможность опредѣленнаго предложенія $x=a$, и что поэтому, допуская возможность точнаго равенства $x=a$, мы должны сдѣлать точку $a$ точкой разрыва для $F(z)$. Но врядъ-ли нужно говорить, что подобныя противорѣчія между интуитивными и логическими выводами въ математикѣ довольно обычны и не могутъ разрѣшаться какимъ-нибудь компромиссомъ вродѣ того, что не всякое предложеніе безконечной совокупности, имѣющее вѣроятность нуль, невозможно; такъ, въ теоріи функціи мы не смущаемся тѣмъ, что нашему интуитивному представленію о кривой линіи противорѣчитъ существованіе непрерывныхъ функцій, лишенныхъ производной, и никому, конечно, не прійдетъ въ голову одновременно предполагать непрерывную функцію совершенно произвольной и разсматривать касательную въ какой нибудь точкѣ кривой, ее изображающей.

Если мы имѣемъ какую бы то ни было совокупность 4-го типа любой мощности, какъ совокупность всѣхъ точекъ отрѣзка и ихъ всевозможныхъ объединеній, то, послѣ ея ариѳметизаціи, мы сохранимъ всегда только исчислимую совокупность элементарныхъ предложеній, остальныя же элементарныя предложенія должны будемъ признать невозможными. Дѣйствительно, не можетъ быть болѣе одного элементарнаго предложенія съ вѣроятностью бóльшей, чѣмъ $\frac{1}{2}$, не можетъ быть болѣе двухъ элементарныхъ предложеній съ вѣроятностью, превышающей $\frac{1}{3}$, и т. д.

Выборъ тѣхъ элементарныхъ предложеній, которыя слѣдуетъ считать возможными, во многихъ случаяхъ представляетъ задачу неразрѣшимую. Въ самомъ дѣлѣ, кто можетъ напримѣръ, назвать ту исчислимую совокупность точекъ отрѣзка, которыя въ прошедшемъ и будущемъ были или будутъ кѣмъ бы то ни было индивидуально указаны или задуманы $\left(\text{какъ } \frac{1}{2}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \log 2 \text{ и т. д.}\right)$? Однако ясно, что эта совокупность исчислима, (она была бы конечна, еслибъ мы допустили, что міръ ограниченъ во времени), всѣ же остальныя числа слѣдуетъ считать невозможными, т. к. они фактически никогда не были и не будутъ, а слѣдовательно, не могутъ быть осуществлены. Это неумѣніе правильно, т. е. въ соотвѣтствіи съ требованіями опыта, ариѳметизовать совокупность 4-го типа на практикѣ въ большинствѣ случаевъ заставляетъ отказываться отъ этой ариѳметизаціи, замѣняя эти совокупности совокупностями 2-го типа, но, разумѣется, при этомъ нельзя нарушать принциповъ теоріи. Обыкновенно разсуждаютъ такимъ образомъ: если мы возьмемъ два равныхъ конечныхъ отрѣзка, то вѣроятности разсматриваемому опредѣленному числу находиться внутри одного или другого отрѣзка равны. Но это утвержденіе не вполнѣ точно; чѣмъ длина промежутковъ менѣе, тѣмъ болѣе значительна неточность этого допущенія, которое не можетъ быть принято абсолютно, т. к. оно привело бы насъ къ ариѳметизующей функціи $F(z) = z$, которая, какъ было показано выше, несовмѣстима съ осуществленіемъ опредѣленныхъ равенствъ $x = a$. Напротивъ, если мы будемъ считать нашу ариѳметизацію только *приближенной*, а именно, будемъ считать вѣроятности равныхъ отрѣзковъ не равными, вообще, а лишь отличающимися менѣе, чѣмъ на нѣкоторое весьма малое, но точно неизвѣстное число $\varepsilon$, то мы должны будемъ помнить, что наша ариѳметизація *относительно* тѣмъ менѣе удовлетворительна, чѣмъ разсматриваемые отрѣзки меньше (такъ что, въ частности, вѣроятность равенства $x = a$ не всегда точно равна 0).

Такимъ образомъ мы получаемъ рѣшеніе парадокса, что вся совокупность никогда не осуществляющихся [1]) (невозможныхъ) чиселъ, имѣющая мѣру 1, имѣла бы вѣроятность 1 (равную достовѣрности), еслибъ ариѳметизующая функція $F(z)$ точно была бы равна $z$.

При ариѳметизаціи совокупности 4-го типа слѣдуетъ еще отмѣтить вопросъ объ опредѣленіи вѣроятностей такъ называемыхъ неизмѣримыхъ совокупностей точекъ. Для насъ этотъ вопросъ не представляетъ труд-

[1]) Т. к. совокупность осуществляющихся чиселъ исчислима, а потому, даже будучи вездѣ густой, имѣетъ мѣру 0.

ности, такъ какъ послѣ выбора ариѳметизующей функціи, т. е. послѣ выбора исчислимой совокупности элементарныхъ предложеній, всякая совокупность точекъ, будь она измѣримой или нѣтъ, получаемъ вѣроятность на основаніи обобщенной теоремы сложенія, въ зависимости отъ входящихъ въ нее точекъ, соотвѣтствующихъ элементарнымъ предложеніямъ.

Что же касается разсмотрѣнныхъ ранѣе совокупностей 2-го типа, то, по самой своей структурѣ, онѣ включаютъ въ себя только такія объединенія [1]), которыя приводятся къ конечнымъ или исчислимымъ, а потому о неизмѣримыхъ совокупностяхъ говорить не приходится, и слѣдовательно, всѣ предложенія совокупностей, какъ 4-го, такъ и 2-го типа, получаютъ вполнѣ опредѣленныя вѣроятности послѣ выбора ариѳметизующей функціи $F(z)$.

**38. Ариѳметизація совокупности 3-го типа.**

На основаніи того, что было сказано относительно совокупностей 4-го типа, мы уже знаемъ, что послѣ ариѳметизаціи совокупности въ ней можетъ остаться лишь исчислимая совокупность возможныхъ элементарныхъ предложеній. Разница между ариѳметизованной совокупностью 3-го и 4-го типа заключается лишь въ томъ, что существуютъ безконечныя объединенія, имѣющія смыслъ въ совокупности 4-го типа, но не имѣющія смысла въ совокупности 3-го типа; о вѣроятностяхъ этихъ объединеній слѣдовательно говорить не прійдется, всѣ же другія объединенія будутъ имѣть тѣ же самыя вѣроятности въ обѣихъ совокупностяхъ.

Резюмируя все сказанное относительно ариѳметизаціи безконечныхъ совокупностей, мы видимъ, что, къ какому бы типу онѣ не принадлежали, эта ариѳметизація всецѣло опредѣляется функціей $F(z)$ (въ болѣе сложныхъ случаяхъ одной или нѣсколькими функціями нѣсколькихъ перемѣнныхъ), отъ выбора которой зависитъ и самый типъ совокупности, ибо каждому элементарному предложенію соотвѣтствуетъ точка разрыва функціи $F(z)$, и наоборотъ. Если мы принимаемъ обобщенный

---

[1]) Можно, конечно, взять произвольную совокупность точекъ $S$ и опредѣлить предложеніе $A$, какъ совмѣщеніе всѣхъ предложеній, т. е. суммъ отрѣзковъ, включающихъ въ себя эти точки. Предложеніе $A$ будетъ соотвѣтствовать верхней мѣрѣ совокупности $S$, которая существуетъ всегда. Но нижняя мѣра $S$ можетъ приводить къ другому предложенію $B \neq A$ (если совокупность $S$ неизмѣрима). Предложенія $A$ и $B$ будутъ всегда имѣть опредѣленныя вѣроятности, совокупность же $S$ не представляетъ собой предложенія.

конструктивный принципъ, то въ зависимости отъ характера нашей функціи $F(z)$, мы имѣемъ совокупность 2-го или 4-го типа; если же мы затрудняемся придать смыслъ нѣкоторымъ безконечнымъ объединеніямъ (и совмѣщеніямъ), то наши совокупности должны быть отнесены къ 1-му или 3-му типу.

**39. Ариѳметизація совокупности цѣлыхъ чиселъ.**

Цѣлыя числа и ихъ конечныя объединенія даютъ намъ примѣръ совокупности 3-го типа; если мы присоединимъ къ нимъ всевозможныя безконечныя объединенія, то получимъ совокупность 4-го типа съ исчислимой совокупностью элементарныхъ предложеній. Ариѳметизація этой совокупности 4-го типа обыкновенно производится на основаніи допущенія, что всѣ числа равновозможны. *Но это допущеніе явно не допустимо, т. к. оно влекло бы за собой то, что вѣроятность каждаго числа равна нулю, т. е. никакое число не можетъ осуществиться, и кромѣ того была бы нарушена обобщенная теорема сложенія, такъ какъ сумма вѣроятностей исчислимой совокупности предложеній, имѣющихъ вѣроятность 0, была бы равна единицѣ.* Затруднительность выбора закона вѣроятностей чиселъ, зависящаго, вообще, въ каждомъ частномъ случаѣ отъ постановки вопроса, не можетъ служить оправданіемъ того, чтобы остановиться на законѣ, хотя и простомъ, но противорѣчащемъ основнымъ принципамъ теоріи вѣроятностей. Можно говорить о предѣлѣ вѣроятностей тѣхъ или иныхъ предложеній, соотвѣтствующемъ постепенному увеличенію ограниченной совокупности чиселъ, при предположеніи, что въ этихъ ограниченныхъ совокупностяхъ числа равновозможны между собой, но этотъ предѣлъ не будетъ вѣроятностью опредѣленнаго предложенія нашей безконечной совокупности.

Съ указаннымъ недопустимымъ предположеніемъ о равновозможности всѣхъ чиселъ связано другое столь же часто дѣлаемое *непріемлемое допущеніе:* вѣроятность числу $N$ при дѣленіи на простое число $a$ дать въ остаткѣ $\alpha$ независима отъ того, какой остатокъ полученъ при дѣленіи $N$ на простое число $b$. Въ самомъ дѣлѣ, пустъ $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ будутъ оба возможные остатка отъ дѣленія на 2; $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$,— остатки отъ дѣленія на 3 и т. д. Тогда, согласно допущенію, вѣроятности всѣхъ безконечныхъ совмѣщеній ($\alpha$ и $\beta$ и ...) были бы равны; но бóльшая часть этихъ совмѣщеній невозможна, ибо, при дѣленіи на числа $> N$, всѣ остатки отъ дѣленія на $N$ становятся равны $N$, такъ что, напримѣръ, совмѣщеніе остатковъ (0, 1, 0, 1, ...) невозможно. Отсюда слѣдовало бы, что и тѣ совмѣщенія, которыя соотвѣтствуютъ цѣлымъ числамъ, также невозможны. Можно, кромѣ того, придать иной смыслъ всѣмъ совмѣщеніямъ, если связать каждое изъ нихъ съ рядомъ

$$x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2.3} + \ldots + \frac{\lambda}{2.3\ldots p_n} + \ldots,$$

гдѣ $p_n$ есть $n$-ое простое число и $\lambda < p_n$; тогда всякія совмѣщенія остатковъ соотвѣтствуютъ всѣмъ значеніямъ $x$, заключеннымъ между 0 и 1 (въ частности, $1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2.3} + \ldots + \frac{p_n - 1}{2.3\ldots p_n} + \ldots$). Значенія $x$, соотвѣтствующія цѣлымъ числамъ (единственно возможнымъ, по условію), характеризуются отмѣченною выше *періодичностью* и, очевидно, исчислимы, въ то время, какъ остальныя значенія $x$ не исчислимы; поэтому совершенно неправильно было бы при равной возможности всѣхъ численныхъ значеній [1]) $\lambda < p_n$, считать достовѣрнымъ, что $x$ принадлежитъ къ первой, исчислимой, совокупности, и невозможнымъ его принадлежность ко второй.

Въ силу выше сказаннаго нужно признать, что примѣненіе термина вѣроятности въ теоріи чиселъ (напримѣръ, «вѣроятность числу быть простымъ равна 0») большею частью не законно и не соотвѣтствуетъ тому значенію, которое ему придается въ теоріи вѣроятностей.

---

[1]) На основаніи ранѣе сказаннаго, это предположеніе, приводящее къ ариѳметизирующей функціи $F(z) = z$, вообще, исключаетъ возможность всякаго точнаго равенства $x = a$, и въ частности, всякаго цѣлаго числа.

# ДОБАВЛЕНІЕ.

## Нѣсколько общихъ замѣчаній о теоріи вѣроятностей, какъ методѣ научнаго изслѣдованія.

### Возможность различныхъ ариѳметизацій данной совокупности предложеній.

На предыдущихъ страницахъ мы попытались установить формально-логическія основы теоріи вѣроятностей, какъ математической дисциплины. До сихъ поръ предложенія для насъ были лишь отвлеченными символами, которымъ мы не придавали никакого конкретнаго содержанія, устанавливая лишь опредѣленныя правила для операцій надъ ними и связанными съ ними численными коэффиціентами, которые мы назвали вѣроятностями. Эти правила, какъ было доказано, другъ другу не противорѣчатъ и позволяютъ при извѣстныхъ условіяхъ посредствомъ математическихъ вычисленій изъ вѣроятностей однихъ предложеній выводить вѣроятности другихъ.

Однако, если намъ дана только логическая структура разсматриваемой совокупности предложеній, которая для конечныхъ совокупностей, по крайней мѣрѣ, усматривается обыкновенно въ каждомъ конкретномъ случаѣ безъ всякихъ затрудненій, то этого недостаточно для ариѳметизаціи совокупностей, и необходимы еще нѣкоторыя добавочныя условія для того, чтобы при помощи принциповъ теоріи вѣроятностей, стало возможнымъ вычислить всѣ вѣроятности. Дѣйствительно, если мы бросаемъ игральную кость и останавливаемъ свое вниманіе на двухъ возможныхъ исходахъ опыта: выпаденіе или невыпаденіе 6 очковъ, мы имѣемъ простую схему $O$, $A$, $\overline{A}$, $\Omega$; но ту же схему мы получаемъ и при бросаніи монеты, а также, если въ томъ же опытѣ съ костью разсмотримъ, какъ различные случаи, выпаденіе четнаго (2, 4, 6) или нечетнаго (1, 3, 5) числа очковъ. Въ послѣднемъ случаѣ мы получимъ ту же схему $O$, $B$, $\overline{B}$, $\Omega$, хотя $A$ есть частный случай $B$; отсюда нетрудно заключить, что одинаковая ариѳметизація (напримѣръ, допущеніе, что всѣ элементарныя предложенія равновозможны) всѣхъ логически тожественныхъ совокупностей привела бы къ неизбѣжному противорѣчію.

Итакъ не всѣ необходимыя условія, нужныя для ариѳметизаціи совокупности, вытекаютъ изъ ея формально логической структуры; только реальное значеніе, которое мы придаемъ вѣроятности, приноситъ дополнительныя данныя для предварительныхъ соглашеній, произвольныхъ съ математической точки зрѣнія. Съ другой стороны, наши вычисленія потому только представляютъ практическій и философскій интересъ, что вычисленные нами коэффиціенты соотвѣтствуютъ нѣкоторымъ реальностямъ. А именно, этотъ коэффиціентъ—математическая вѣроятность—долженъ дать намъ возможно болѣе точную характеристику того, въ какой степени, на основаніи имѣющихся данныхъ, слѣдуетъ ожидать наступленія нѣкотораго событія, т. е. другими словами, въ какой мѣрѣ объективныя данныя предопредѣляютъ это наступленіе. Если мы утверждаемъ равенство математическихъ вѣроятностей событій $A$ и $B$ (т. е. ихъ равновозможность), то это означаетъ, что совокупность имѣющихся объективныхъ данныхъ такова, что всякій здравомыслящій человѣкъ долженъ совершенно въ равной мѣрѣ ожидать наступленія $A$, какъ и наступленія $B$.

**Происхожденіе и значеніе аксіомъ теоріи вѣроятностей.**

Оставляя пока въ сторонѣ вопросъ о томъ, есть ли такія объективныя данныя, относительно которыхъ всякій согласится, что они въ равной мѣрѣ предопредѣляютъ событія $A$ и $A_1$, такъ что ихъ равнымъ образомъ слѣдуетъ ожидать, т. е. считать $A$ и $A_1$ равновозможными, мы видимъ, что даже, если бы мы стали отрицать универсальную возможность такихъ данныхъ, во всякомъ случаѣ, для всякаго субъекта, пытающагося уяснить себѣ, въ какой мѣрѣ онъ можетъ разсчитывать на появленіе того или другого событія, обязательны будутъ аксіомы § 4:

1) *На достовѣрное событіе слѣдуетъ болѣе расчитывать, чѣмъ на недостовѣрное;*

2) *Если мы ожидаемъ въ одинаковой мѣрѣ* $A$ и $A_1$, *и съ другой стороны въ одинаковой мѣрѣ ожидаемъ* $B$ и $B_1$, *при чемъ* $A$ *не совмѣстимо съ* $B$, *а* $A_1$ *несовмѣстимо съ* $B_1$, *то мы въ такой же мѣрѣ должны ожидать наступленія* ($A$ или $B$), *какъ наступленія* ($A_1$ или $B_1$); *напротивъ, если мы скорѣе ожидаемъ наступленія* $B$, *чѣмъ наступленія* $B_1$, *то мы также болѣе расчитываемъ на наступленіе* ($A$ или $B$), *чѣмъ на наступленіе* ($A_1$ или $B_1$).

Столь же очевидной явится и аксіома осуществленія § 5 (24), если мы ее формулируемъ, придавая выше указанный смыслъ понятію вѣроятности: *если* $\alpha$ *есть частный случай* $A$, *а* $\beta$ *частный случай* $B$, *то мы въ равной мѣрѣ должны ожидать наступленіе* $\alpha$ *и наступленіе* $\beta$, *коль скоро мы на* $A$ *расчитываемъ такъ же, какъ и на* $B$, *а въ* *случаѣ наступленія A такъ же ожидаемъ $\alpha$, какъ въ случаѣ наступленія B ожидаемъ $\beta$.*

Въ зависимости отъ того, имѣютъ-ли объективное или только субъективное значеніе наши допущенія о равной вѣроятности разсматриваемыхъ событій, и выводы, вытекающіе изъ нихъ на основаніи нашихъ объективно (т. е. для нормальной психики) обязательныхъ аксіомъ и теоремъ, будутъ имѣть объективное или болѣе или менѣе субъективное значеніе.

Намъ нужно теперь показать, что допущенія о равной возможности двухъ явленій могутъ имѣть столь же объективный характеръ, какъ допущенія равенства двухъ какихъ-бы то ни было конкретныхъ величинъ, и обнаружить такимъ образомъ научное значеніе теоріи вѣроятностей.

**Равновозможность.**

Съ этой цѣлью, возьмемъ примѣръ: на цилиндръ вращенія съ горизонтальными образующими ставятъ однородный шаръ такъ, чтобы его центръ находился на одной вертикали съ точкой касанія. Еслибы опытъ былъ осуществленъ идеально, шаръ оказался бы въ положеніи равновѣсія; однако изъ механики и изъ практики извѣстно, что это равновѣсіе неустойчиво, а именно, достаточно не поддающагося измѣренію уклоненія отъ условій идеальнаго опыта, чтобы шаръ скатился въ ту или другую сторону. Если экспериментаторъ со всей доступной ему точностью осуществляетъ указанный опытъ, такъ что, по условію, имъ приняты всѣ мѣры къ тому, чтобы уклоненія въ одну сторону не могли взять перевѣса надъ уклоненіями въ другую, онъ устанавливаетъ опытъ, исходъ котораго для него, по условію, долженъ остаться неизвѣстнымъ. Разумѣется, возможно, что другой экспериментаторъ, обладающій болѣе точными инструментами, могъ бы предсказать исходъ упомянутаго опыта, подведя его подъ другую схему, гдѣ было бы установлено, правыя ли или лѣвыя уклоненія имѣютъ перевѣсъ; но тогда онъ долженъ будетъ снова видоизмѣнить опытъ, для того, чтобы имѣть право приравнять его вышеупомянутой неустойчивой схемѣ, и тогда исходъ этого новаго опыта будетъ для него столь же неизвѣстенъ, какъ и для его предшественника.

Устанавливая второй, по возможности, тожественный опытъ, нашъ экспериментаторъ будетъ имѣть тѣ же основанія, чтобы ожидать аналогичнаго исхода. *Еслибы опытъ былъ устойчивъ, такъ что неподлежащія учету различія въ его постановкѣ не вліяли бы на его исходъ, то мы могли бы предсказать, что исходы обоихъ опытовъ будутъ одинаковы; но благодаря механической неустойчивости осуществляемой схемы, мы ограничиваемся утвержденіемъ, что опредѣленный* *результатъ второго опыта (паденіе шара направо) имѣетъ ту же вѣроятность, что и въ первомъ опытѣ.*

Вообще, *если разница между причинами, вызывающими появленіе событія $A$ и событія $B$, столь ничтожна, что не поддается учету и измѣренію, то событія $A$ и $B$ признаются равно вѣроятными.*

Если принять данное нами здѣсь опредѣленіе равно вѣроятныхъ событій, то изъ него вытекаютъ непосредственно и допущенныя ранѣе аксіомы. Однако наше аксіоматическое построеніе теоріи вѣроятностей не связано съ принятіемъ или непринятіемъ этого опредѣленія.

Абсолютное равенство вѣроятностей представляетъ, конечно, лишь математическую абстракцію, совершенно такъ же, какъ и равенство отрѣзковъ, и для установленія того, что паденіе данной игральной кости на любую изъ ея сторонъ имѣетъ одну и ту же вѣроятность, мы можемъ пользоваться только тѣми объективными, но не абсолютно точными, методами измѣренія, которыя обычно примѣняются въ геометріи и въ физикѣ.

Поэтому такъ же, какъ и при примѣненіи всѣхъ математическихъ теорій къ практикѣ, гдѣ точныя равенства приходится замѣнять приближенными, весьма существенно изслѣдовать, какъ измѣнятся теоремы теоріи вѣроятностей, если данныя въ нихъ вѣроятности получатъ произвольныя незначительныя измѣненія. Въ этомъ отношеніи чрезвычайно важна, напримѣръ, теорема Пуассона, безъ которой теорема Бернулли была бы лишена практическаго значенія.

**Вѣроятность и достовѣрность.**

Математическая вѣроятность, въ силу выше сказаннаго, представляетъ собой численный коэффиціентъ, являющійся мѣрой ожиданія появленія событія при наличности нѣкоторыхъ конкретныхъ данныхъ, характеризующій, слѣдовательно, объективную связь между наблюдаемыми данными и ожидаемымъ событіемъ.

Въ частности, зависимость между данными и будущимъ событіемъ можетъ быть такова, что изъ нихъ вытекаетъ увѣренность въ его появленіи: наблюдаемыя данныя служатъ причиной событія. Тогда мы говоримъ, что событіе достовѣрно—вѣроятность его равна 1. Нужно имѣть въ виду, что достовѣрность, какъ и вѣроятность, всегда теоретическая, ибо всегда возможно, что неполное соотвѣтствіе между дѣйствительностью и нашей теоретической схемой нарушаетъ или видоизмѣняетъ ожидаемое дѣйствіе причины.

Безусловно достовѣрнымъ, по опредѣленію, можетъ быть только результатъ соглашенія или логическаго вывода, всякое же предвидѣніе новаго факта всегда основано на индукціи, т. е., въ конечномъ счетѣ, на прямомъ или косвенномъ допущеніи, что фактъ, при извѣстныхъ условіяхъ постоянно наступавшій, снова наступитъ при сходныхъ обстоятельствахъ. Примѣняя принципы теоріи вѣроятностей, можно показать, что такое предвидѣніе имѣетъ вѣроятность весьма близкую къ единицѣ, т. е. къ достовѣрности. Вслѣдствіе этого и другія утвержденія теоріи вѣроятностей, имѣющія столь же высокую степень вѣроятности, слѣдуетъ разсматривать, какъ практически достовѣрныя, имѣя въ виду, что ошибка, которая проистекаетъ отъ неполнаго соотвѣтствія предварительныхъ допущеній съ дѣйствительностью, имѣетъ не менѣе шансовъ подорвать правильность всякаго утвержденія, чѣмъ то обстоятельство, что вѣроятность его не абсолютно совпадаетъ съ достовѣрностью.

Разсмотрѣніе многочисленныхъ опытовъ, изъ которыхъ каждый представляется при помощи нѣкоторой неустойчивой схемы указаннаго выше типа, гдѣ характеръ подлежащихъ учету условій заставляетъ насъ приписать ихъ исходамъ опредѣленныя вѣроятности, приводитъ на основаніи вычисленій теоріи вѣроятностей къ утвержденіямъ, извѣстнымъ подъ названіемъ закона большихъ чиселъ, имѣющимъ приблизительно столь же большую вѣроятность, что и наши индуктивные выводы. При примѣненіи закона большихъ чиселъ, какъ и при примѣненіи индуктивныхъ законовъ природы, мы должны считаться съ возможностью, что конкретныя условія опыта не вполнѣ соотвѣтствуютъ теоретической схемѣ. Поэтому опредѣленный результатъ опыта въ обоихъ случаяхъ имѣетъ лишь большую вѣроятность, но не безусловную достовѣрность. Ошибка, т. е. неосуществленіе нашего предвидѣнія, не невозможна, а является лишь весьма невѣроятной. Но для закона большихъ чиселъ характерно то, что наступленіе невѣроятнаго факта не служитъ безусловнымъ показателемъ неправильности нашихъ теоретическихъ предпосылокъ, ибо законъ большихъ чиселъ допускаетъ исключенія. Подробное изслѣдованіе вопроса о томъ, какъ слѣдуетъ относиться къ принятой гипотезѣ, если предвидѣнія, основанныя на ней, нерѣдко оказываются ошибочными, выходитъ изъ рамокъ настоящей статьи. Теорія вѣроятностей гипотезъ, къ которой относится этотъ вопросъ, основана, исключительно, на аксіомѣ осуществленія. Не выходя изъ предѣловъ общихъ соображеній, мы можемъ только замѣтить, что оцѣнка a priori вѣроятности той или иной схемы носитъ обыкновенно очень произвольный характеръ, а потому особый интересъ представляютъ лишь тѣ выводы этого отдѣла теоріи вѣроятностей, которые болѣе или менѣе независимы отъ упомянутой оцѣнки.

Осуществленіе невѣроятнаго факта само по себѣ не опровергаетъ гипотезы, но является лишь новымъ даннымъ, которое можетъ измѣнить вѣроятность гипотезы, ибо нѣтъ такой схемы, при которой всѣ происходящія явленія имѣли бы значительную вѣроятность [1]). Единственное, чего мы должны требовать отъ принятой гипотезы, чтобы бо́льшая часть изъ осуществляющихся фактовъ имѣла бы высокую степень вѣроятности и лишь, сравнительно, немногіе изъ нихъ были мало вѣроятны. Неопредѣленность послѣдняго замѣчанія лежитъ въ существѣ дѣла, такъ какъ невозможность учесть всю неограниченную совокупность причинъ, вліяющихъ на единичное конкретное явленіе, исключаетъ непогрѣшимость въ предвидѣніи будущаго: на мѣсто достовѣрнаго, представляющаго теоретическую абстракцію, намъ приходится поставить вѣроятное (практически достовѣрное), и мы должны лишь стремиться къ тому, чтобы эта замѣна возможно рѣже приводила насъ къ ошибкамъ.

Изъ выше сказаннаго видно, что примѣненіе теоріи вѣроятностей содержитъ нѣкоторую долю субъективнаго, но лишь ту долю, которая въ извѣстной мѣрѣ присуща всякому методу познанія, дающему интерпретацію фактовъ и связывающему ихъ опредѣленными абстрактными взаимоотношеніями. Эти взаимоотношенія, которыя въ нашей теоріи характеризуются коэффиціентомъ—математическая вѣроятность, могутъ

---

[1]) Можно считать, напримѣръ, практически достовѣрнымъ, что первоклассный шахматистъ, играющій съ полнымъ вниманіемъ, обыграетъ новичка, которому только что сообщили правила игры. Однако ничего нѣтъ абсолютно невозможнаго въ томъ, чтобы всѣ ходы начинающаго игрока случайно удовлетворяли требованіямъ шахматнаго искусства и привели бы его къ побѣдѣ. Совмѣщеніе подобнаго рода единичныхъ мало вѣроятныхъ фактовъ можетъ въ дѣйствительности произойти. Послѣ такого результата игры (и особенно, еслибы онъ повторился 2—3 раза) мы были бы поставлены въ большое затрудненіе относительно предполагаемаго результата слѣдующей партіи. Можемъ ли мы быть увѣрены, что нашъ новичекъ, дѣйствительно, согласно утвержденіямъ всѣхъ знающихъ его лицъ, никогда не прикасался къ шахматамъ, можемъ ли мы отрицать возможность такихъ невиданныхъ еще до сего времени дарованій, которыя бы обнаружились такъ блестяще съ первой же игры? Но если абсолютнаго отвѣта мы на эти вопросы дать не можемъ, то тѣмъ не менѣе сыгранныя партіи представятъ собой образцы остроумнѣйшихъ шахматныхъ комбинацій, анализъ которыхъ обнаружитъ глубокую цѣлесообразность отдѣльныхъ ходовъ. Поэтому, какъ бы мы ни были склонны отстаивать свою a prior'ную увѣренность, что игра нашего новичка не могла быть сознательной, мы все же должны будемъ признать, что связь между ходами цѣлесообразна и закономѣрна. Подобное же замѣчаніе примѣнимо къ гипотезѣ о закономѣрности явленій природы. Для объясненія имѣющагося наблюденнаго матеріала мы неизбѣжно должны признать эту закономѣрность, какъ бы намъ ни хотѣлось вѣрить въ чудеса, но никого нельзя разубѣдить въ томъ, что внѣ сферы точныхъ наблюденій чудеса бываютъ, и, быть можетъ, законы, которые были до сихъ поръ непреложны, окажутся игрою случая.

болѣе или менѣе точно интерпретировать дѣйствительность; соотвѣтствующую степень точности въ интерпретаціи дѣйствительности должны тогда имѣть и выводы, вытекающіе изъ примѣненія теоріи вѣроятностей: ибо тѣ нѣсколько аксіомъ, на которыхъ строится эта математическая дисциплина, представляютъ собой необходимый аттрибутъ понятія вѣроятности—какъ мѣры ожиданія, независимо отъ объективнаго значенія данныхъ, на которыхъ основано это ожиданіе, въ томъ или иномъ случаѣ.

**Безконечныя совокупности.**

Если мы разсматриваемъ какой-нибудь опытъ, допускающій конечное число исходовъ, то, когда мы говоримъ, что исходъ $A$ возможенъ, это означаетъ, что, имѣя въ виду всѣ опыты, соотвѣтствующіе той же теоретической схемѣ, мы считаемъ, что въ нѣкоторыхъ изъ нихъ исходъ, дѣйствительно, имѣетъ мѣсто. Еслибы мы имѣли возможность охватить однимъ взглядомъ всѣ прошлые и будущіе опыты этой схемы, и констатировали бы, что $A$ не происходило никогда, то мы должны были бы сказать, что при правильной схемѣ этихъ опытовъ, $A$ является невозможнымъ. Въ соотвѣтствіи съ этимъ находятся и обычные индуктивные выводы, которые на основаніи ненаступленія $A$ при большомъ числѣ опытовъ также заключаютъ о невозможности $A$. Аналогичное замѣчаніе примѣнимо и къ безконечнымъ совокупностямъ. Если совокупность логически возможныхъ несовмѣстимыхъ исходовъ не исчислима, какъ напримѣръ, число точекъ отрѣзка 01 (т. е. совокупность значеній $x$, удовлетворяющихъ неравенству $0 < x < 1$), то фактически возможными при этомъ можетъ оказаться только исчислимая совокупность исходовъ, а потому всякая ариѳметизація такой совокупности, въ согласіи съ установленными въ 3-й главѣ теоретическими принципами, должна была бы всѣ эти фактически (или мысленно) никогда не осуществляющіеся исходы признать невозможными. Совокупность осуществимыхъ исходовъ намъ неизвѣстна, и еще менѣе есть у насъ a prior'ныхъ основаній для того, чтобы, сообразуясь съ тѣмъ, что выше было сказано объ объективныхъ признакахъ равновозможности, полагать столь же вѣроятнымъ, что задуманное кѣмъ-нибудь число есть $\frac{1}{2}$, какъ то, что онъ представляетъ собой результатъ вычисленія невыполнимаго при современныхъ средствахъ анализа [1]).

Такимъ образомъ необходимо дѣлать различіе между произвольными числами неопредѣлимыми и опредѣлимыми тѣми или иными способами. Слѣдуетъ замѣтить однако, что только въ томъ случаѣ, если эти способы

---

[1]) Напримѣръ, $\log 2$, до того, какъ была открыта теорія логариѳмовъ.

указаны, мы получаемъ *опредѣленную* совокупность опредѣлимыхъ чиселъ (напримѣръ, совокупность алгебраическихъ чиселъ); поэтому мы можемъ только констатировать, что должны существовать числа, которыя никогда не будутъ опредѣлены, самую же грань между этими двумя категоріями чиселъ точно указать невозможно.

Если мы беремъ произвольное число, написанное въ видѣ безконечной десятичной дроби, и задаемъ себѣ, напримѣръ, вопросъ, какова вѣроятность, что цифра 0 не встрѣтится ни разу, то отвѣтъ будетъ зависѣть отъ того, къ какой категоріи относится число. Допустимъ, что вѣроятность быть любой цифрѣ на каждомъ мѣстѣ равна [1]) $\frac{1}{10}$, ибо можно допустить, что не существуетъ объективно уловимыхъ причинъ, чтобы въ каждомъ частномъ случаѣ одна цифра имѣла преимущества передъ другой. При такихъ условіяхъ вѣроятность непоявленія 0 будетъ равна $\lim\limits_{n=\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$.

Но наше допущеніе, очевидно, относится только къ совершенно произвольнымъ *неопредѣлимымъ* числамъ, составленіе которыхъ не подчиняется никакому закону, такъ что въ каждомъ числѣ можетъ быть указано лишь то или иное конечное число знаковъ, но вполнѣ это число никогда не опредѣлено, т. к. всегда остается еще безконечное число зависящихъ только отъ случайности знаковъ, а потому непоявленіе 0 и въ дальнѣйшемъ не можетъ быть установлено никакимъ опытомъ, напротивъ появленіе 0 совмѣстимо со всякимъ наблюденнымъ результатомъ, т. е. достовѣрно (по принципу единственности). Иначе дѣло обстоитъ, если мы полагаемъ, что составленіе нашей десятичной дроби подчинено какому-нибудь закону. Если мы точно укажемъ этотъ законъ, напримѣръ, беремъ раціональныя дроби, у которыхъ знаменатели не имѣютъ иныхъ множителей кромѣ 2 и 5, то для отвѣта на поставленный вопросъ нужно будетъ прежде всего изслѣдовать, нѣтъ-ли прямой причинной связи между закономъ и появленіемъ цифры 0: въ данномъ случаѣ изъ ариѳметики извѣстно, что непоявленіе 0 невозможно; но, если бы мы взяли дроби вида $\frac{10^n - 2}{10^n - 1}$, то напротивъ появленіе 0 было бы достовѣрно. Если же прямой причинной связи мы не усматриваемъ, необходимо всетаки помнить, что нашъ законъ связываетъ извѣстнымъ образомъ послѣдовательность цифръ, а потому полной

---

[1]) Т. е. $F(z) = z$.

независимости и равной вѣроятности ихъ допустить нельзя. Чѣмъ менѣе опредѣленъ законъ, тѣмъ труднѣе a priori указать точное значенiе вѣроятности каждой цифры на опредѣленномъ мѣстѣ, но въ такихъ случаяхъ, правильнѣе было бы вычислять вѣроятности a posteriori, и хотя слѣдуетъ думать, что по большей части значенiе этой вѣроятности будетъ весьма близко къ $\frac{1}{10}$, но весьма возможно, что при разнохарактерности совокупности чиселъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ обнаружится сверхъ-нормальная дисперсiя, свидѣтельствующая объ отсутствiи постоянной вѣроятности.

Разсмотрѣнiе совокупностей (всегда исчислимыхъ) тѣхъ или иныхъ категорiй опредѣлимыхъ чиселъ для практики имѣетъ мало значенiя. Напротивъ, при примѣненiи къ экспериментальнымъ наукамъ, обычно приходится пользоваться безконечными совокупностями 2-го и отчасти 1-го типа, лишенными элементарныхъ предложенiй, т. е. совокупностями неопредѣлимыхъ чиселъ, ибо никакой опытъ не можетъ точно опредѣлить числа (не цѣлаго); результатомъ опыта устанавливается лишь нѣсколько десятичныхъ знаковъ неизвѣстнаго и недопускающаго экспериментальнаго опредѣленiя числа. Сообразно съ этимъ, ариѳметизирующую функцiю $F(z)$ нужно брать непрерывной, и, принимая во вниманiе, соображенiя § 7 (36), можно почти всегда полагать $F(z) = \int f(z)dz$, гдѣ $f(z)$ нѣкоторая положительная непрерывная функцiя, значенiе которой опредѣляется a priori условiями постановки опыта или же a posteriori результатами его многократныхъ повторенiй.

Съ безконечными совокупностями мы встрѣчаемся также при примѣненiи закона большихъ чиселъ къ какому-нибудь опыту, повторяющемуся неограниченное число разъ. По большей части, число опытовъ предполагается конечнымъ, хотя и весьма большимъ; поэтому законъ большихъ чиселъ сохраняетъ присущую ему практическую, но не логическую достовѣрность, и какъ было отмѣчено выше, допускаетъ исключенiя. Однако, если бы для интерпретацiи нѣкотораго явленiя, мы создали схему, осуществляющую, по условiю, предѣльный случай безконечнаго числа повторенiй, то можно было бы прiйти къ выводамъ, имѣющимъ логическую достовѣрность. Если бы, напримѣръ, мы допустили возможность постепеннаго ускоренiя производства опыта бросанiя монеты или другого опыта, гдѣ вѣроятность событiя равна $\frac{1}{2}$ такъ, что первый опытъ происходитъ въ теченiи одной минуты, второй — $\frac{1}{2}$ минуты, третiй — $\frac{1}{4}$ минуты и т. д., тогда общее число опытовъ, произведенныхъ въ теченіе 2 минутъ будетъ безконечно велико. Но, предположивши, что существуетъ какой-нибудь устойчивый механическій приборъ, который послѣдовательно зарегистровываетъ отношеніе появленій событія къ числу опытовъ (хотя регистрація результата каждаго отдѣльнаго опыта становится невозможной), мы до конца 2-й минуты будемъ замѣчать нѣкоторыя его колебанія, но, по истеченіи 2 минутъ, стрѣлка нашего механизма займетъ вполнѣ опредѣленное положеніе, соотвѣтствующее со всей доступной прибору точностью числу $\frac{1}{2}$. Этотъ выводъ теоретически достовѣренъ, и неосуществленіе его на опытѣ могло бы произойти только вслѣдствіе неполнаго соотвѣтствія между фактическими условіями и нашей теоретической схемой. Такимъ образомъ, если мы составляемъ опредѣленную безконечную бинарную дробь, напримѣръ, $\frac{8}{15} = 0,\ 10001\ldots$, гдѣ предѣлъ отношенія числа единицъ къ числу цифръ равенъ $\frac{1}{4}$, то мы должны утверждать несовмѣстимость составленія этой дроби съ предположеніемъ, что на каждомъ бинарномъ мѣстѣ появленіе 1 и 0 равновѣроятно.

Вообще, невозможно указать способа составленія безконечной бинарной дроби, въ которой послѣдовательность единицъ и нулей подчинялась бы безконечному числу условій, вытекающихъ изъ закона большихъ чиселъ. Безконечные ряды, составленные совершенно произвольно, случайно (такъ что каждое число индивидуально произвольно), существенно отличны отъ рядовъ, составленныхъ по опредѣленному математическому закону, какъ бы произволенъ ни былъ разсматриваемый законъ. Смѣшеніе этихъ двухъ понятій, происходящее отъ того, что для конечныхъ рядовъ подобнаго разграниченія между случайными и закономѣрными рядами не существуетъ, является однимъ изъ главныхъ источниковъ парадоксовъ, къ которымъ приводитъ теорія вѣроятностей безконечныхъ совокупностей.

*С. Н. Бернштейнъ.*