О сходимости разложенiй по полиномамъ Чебышева-Якоби.

Эрванда Когбетлянца.

Результатъ И. И. Привалова [1]), распространившаго признакъ Hardy [2]) равномѣрной сходимости почти всюду (presque partout) тригонометрическаго ряда на разложенія по полиномамъ Legendre'а, поддается дальнѣйшему распространенію на наиболѣе общія разложенія по гипергеометрическимъ ортогональнымъ полиномамъ Чебышева-Якоби $T_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$, частными случаями которыхъ являются ряды тригонометрическіе и Legendre'а.

Какъ извѣстно, эти полиномы опредѣляются производящей функціей:

$$\frac{(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{\alpha}\cdot(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot T_n^{(\alpha,\,\beta)}(x);$$

при равенствѣ параметровъ $\alpha=\beta$ мы получаемъ болѣе узкій классъ ортогональныхъ полиномовъ $T_n^{(\alpha)}(x)\equiv T_n^{(\alpha,\,\alpha)}(x)$, связанныхъ весьма просто, какъ это показалъ Г. Орловъ [3]), съ ультрасферическими функціями $p_n^{(\lambda)}(x)$, опредѣляемыми обычно производящей функціей $(1-2zx+z^2)^{-\lambda}$:

$$\frac{1}{(1-2xz+z^2)^{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot p_n^{(\lambda)}(x);$$

а именно:

$$T_n^{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}(x)\equiv\frac{\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(n+2\lambda)}\cdot p_n^{(\lambda)}(x).$$

Такъ какъ $p_n^{(\lambda)}(\operatorname{Cos}\theta)=\dfrac{\operatorname{Sin}(n+1)\theta}{\operatorname{Sin}\theta}$ при $\lambda=1$, при $\lambda=\dfrac{1}{2}$ $p_n^{(\lambda)}(x)$ есть

---

[1]) Сообщенія Хар. Мат. О-ва (2) XV.

[2]) Proceedings Lond. Math. Soc. t. 12 (ser. 2).

[3]) Диссертація. 1881 г. СПБ. Стр. 16.

полиномъ Legendre'а $p_n(x)$, а $\lim \frac{1}{\lambda} p_n^{(\lambda)}(\mathrm{Cos}\,\theta) = \frac{2\,\mathrm{Cos}\,n\theta}{n}$, то ясно, что

$$\mathrm{Sin}\,(n+1)\theta = \frac{\mathrm{Sin}\,\theta \,.\, \sqrt{\pi} \,.\, \Gamma(n+2)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \,.\, T_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mathrm{Cos}\,\theta)$$

$$\mathrm{Cos}\,n\theta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2\,.\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \,.\, T_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\mathrm{Cos}\,\theta) \text{ и } p_n(\mathrm{Cos}\,\theta) = T_n^{(0)}(\mathrm{Cos}\,\theta).$$

Сопоставленіе результатовъ Hardy и Привалова естественно наводитъ на вопросъ о пригодности разсматриваемаго признака для общаго случая разложеній по $T_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ при любыхъ α и β.

Пусть

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} C_n \,.\, T_n^{(\alpha,\,\beta)}(x) \qquad \text{(I)}$$

гдѣ

$$C_n = \frac{1}{k_n} \,.\, \int_{-1}^{+1} \frac{T_n^{(\alpha,\,\beta)}(u) \,.\, f(u) \,.\, du}{(1+u)^{\alpha} \,.\, (1-u)^{\beta}},$$

а k_n опредѣляется такъ:

$$k_n = \int_{-1}^{+1} \frac{[T_n^{(\alpha,\,\beta)}u]^2 \,.\, du}{(1+u)^{\alpha} \,.\, (1-u)^{\beta}} = \frac{2^{1+\alpha+\beta}}{2n+1-\alpha-\beta} \,.\, \frac{\Gamma(n-\alpha+1) \,.\, \Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1-\alpha-\beta) \,.\, \Gamma(n+1)}$$

Дѣйствительно, пользуясь формулами Christoffel'я и асимптотической:

$$\frac{1}{2} \,.\, \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{k_m} \,.\, T_m^{(\alpha,\,\beta)}(x) \,.\, T_m^{(\alpha,\,\beta)}(u) = \frac{(n+1-\alpha-\beta)(n+1)}{(2n+1-\alpha-\beta)(2n+2-\alpha-\beta)} \,.$$

$$\,.\, \frac{T_n^{(\alpha,\,\beta)}(u) \,.\, T_{n+1}^{(\alpha,\,\beta)}(x) - T_n^{(\alpha,\,\beta)}(x) \,.\, T_{n+1}^{(\alpha,\,\beta)}(u)}{k_n \,.\, (x-u)}$$

$$(0<\theta<\pi) \quad T_n^{(\alpha,\,\beta)}(\mathrm{Cos}\,\theta) = \left(2\,\mathrm{Cos}\,\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha} \,.\, \left(2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{2}\right)^{\beta} \,.\, \sqrt{\frac{2}{n\pi \,.\, \mathrm{Sin}\,\theta}} \,.$$

$$\,.\, \left\{ \mathrm{Cos}\left[\left(n + \frac{1-\alpha-\beta}{2}\right)\theta + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{M_n(\theta)}{n} \right\}$$

и въ точности слѣдуя при любыхъ α и β анализу И. И. Привалова для случая $\alpha=\beta=0$, мы легко устанавливаемъ почти всюду въ интервалѣ $(-1, +1)$ для любой функціи $f(x)$ съ интегрируемымъ $(1+x)^{-\alpha}.(1-x)^{-\beta}.f^2(x)$ соотношеніе

$$S_n(x) = 0(\lg n)$$

почти всюду, гдѣ черезъ $S_n(x)$ обозначена сумма первыхъ $n+1$ членовъ ея разложенія (I) по полиномамъ $T_n^{(\alpha,\ \beta)}(x)$; а это вполнѣ достаточно [1]) для доказательства слѣдующей общей теоремы: «*Если постоянныя* $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ *таковы, что рядъ* $\sum_1^{\infty} k_n . c_n^2 (\log n)^2$ *сходится, то рядъ* $\sum_0^{\infty} c_n . T_n^{(\alpha,\ \beta)}(x)$ *сходится почти всюду въ* $(-1, +1)$ *равномѣрно къ функціи* $f(x)$, *опредѣляемой, какъ сумма этого ряда, и есть ея рядъ Fourier*».

Москва.

[1]) Ср. И. И. Приваловъ l. c.