Къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія

$X^3\varrho + Y^3 = 1.$

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ предлагаемой замѣткѣ мы разсматриваемъ свойства рѣшеній въ цѣлыхъ раціональныхъ числахъ X, Y уравненія

$$X^3\varrho + Y^3 = 1 \tag{1}$$

Мы можемъ предполагать цѣлый раціональный коэффиціентъ ϱ неполнымъ кубомъ и положительнымъ. Изъ тожества

$$X^3\varrho + Y^3 = (X\sqrt[3]{\varrho} + Y)(X\zeta\sqrt[3]{\varrho} + Y)(X\zeta^2\sqrt[3]{\varrho} + Y)$$

гдѣ $\zeta = \sqrt[3]{1} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, мы видимъ, что всякому рѣшенію X, Y уравненія (1) соотвѣтствуетъ въ алгебраической области $\Omega\sqrt[3]{\varrho}$ алгебраическая единица $X\sqrt[3]{\varrho} + Y$, гдѣ X и Y цѣлые, и обратно всякой единицѣ вида $X\sqrt[3]{\varrho} + Y$, гдѣ X и Y цѣлые, соотвѣтствуетъ рѣшеніе уравненія (1). Мы будемъ разсматривать единицы области $\Omega\sqrt[3]{\varrho}$ имѣющія видъ $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + B\sqrt[3]{\varrho} + C$, гдѣ A, B и C цѣлые. Тѣ изъ такихъ единицъ, которыя имѣютъ видъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, т. е. не содержатъ члена съ $(\sqrt[3]{\varrho})^2$, мы будемъ называть «двучленными». Задача рѣшенія уравненія (1) сводится, такимъ образомъ, къ разысканію всѣхъ двучленныхъ единицъ.

Уравненіе $x^3 - \varrho = 0$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень и два мнимыхъ, и, слѣдовательно, по теоремѣ Dirichlet, всѣ единицы «порядка» $(\sqrt[3]{\varrho})$ (подъ «порядкомъ», Ordnung, $(\sqrt[3]{\varrho})$ мы понимаемъ совокупность всѣхъ чиселъ вида $t_1(\sqrt[3]{\varrho})^2 + t_2\sqrt[3]{\varrho} + t_3$, гдѣ t_1, t_1 и t_3 цѣлые раціональные коэффиціенты) получаются отъ возвышенія во всѣ цѣлыя положительныя степени одной, такъ называемой «основной» единицы $\varepsilon_0 = a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c$, порядка $(\sqrt[3]{\varrho})$ и обратной ей единицы $\frac{1}{\varepsilon_0}$. А. А. Марковъ далъ таблицу основныхъ единицъ области $\Omega\sqrt[3]{\varrho}$ для всѣхъ ϱ не большихъ 70 (въ статьѣ «Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire», Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg VII-e Série, T. XXXVIII). Въ заключеніе таблицы А. А. Марковъ замѣчаетъ: «Je suis persuadé que *presque* toutes ces unitées sont fondamentales». Мы провѣрили нѣкоторыя изъ единицъ А. А. Маркова. Всѣ единицы нижеслѣдующей таблички (въ которой α обозначаетъ $\sqrt[3]{\varrho}$, безусловно основныя единицы соотвѣтственныхъ порядковъ $(\sqrt[3]{\varrho})$.

$\varrho=2$	$\alpha-1$	17	$-7\alpha+18$	43	$2\alpha-7$
3	α^2-2	19	$3\alpha-8$	58	$2\alpha^2-8\alpha+1$
5	$2\alpha^2-4\alpha+1$	21	$4\alpha^2+6\alpha-47$	60	$3\alpha^2-12\alpha+1$
6	$3\alpha^2-6\alpha+1$	22	$-4\alpha^2+3\alpha+23$	61	$4\alpha^2-16\alpha+1$
7	$-\alpha+2$	23	$6230\alpha^2-3160\alpha-41399$	63	$-\alpha+4$
10	$-3\alpha^2+6\alpha+1$	26	$-\alpha+3$	65	$\alpha-4$
11	$-2\alpha^2+4\alpha+1$	28	$\alpha-3$	67	$-4\alpha^2+16\alpha+1$
13	$2\alpha^2-3\alpha-4$	37	$-3\alpha+10$	68	$-3\alpha^3+12\alpha+1$
14	$-\alpha^2+2\alpha+1$	39	$2\alpha^2-23$	70	$-2\alpha^2+8\alpha+1$

Русскій математикъ Вороной нашелъ алгориѳмъ для вычисленія основныхъ единицъ кубической области, рѣшивъ тѣмъ самымъ для кубической области тотъ же вопросъ, который былъ рѣшенъ Lagrange'мъ для квадратичной; такимъ образомъ для каждаго заданнаго уравненія $X^3\varrho+Y^3=1$ основная единица $\varepsilon_0=a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$ можетъ быть вычислена.

§ 1. Замѣчаніе. «*У одной изъ двухъ единицъ* $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+B\sqrt[3]{\varrho}+C$, *или ей обратной, коэффиціенты* A, B *и* C *не одного знака, и одинъ изъ нихъ можетъ быть равенъ нулю, коэффиціенты же другой всѣ три не равны нулю и одного знака*».

Доказательство.

Норма числа $u(\sqrt[3]{\varrho})^2+v\sqrt[3]{\varrho}+w$ т. е.

$$[u(\sqrt[3]{\varrho})^2+v\sqrt[3]{\varrho}+w]\,[u(\zeta\sqrt[3]{\varrho})^2+v\zeta\sqrt[3]{\varrho}+w]\,[u(\zeta^2\sqrt[3]{\varrho})^2+v\zeta^2\sqrt[3]{\varrho}+w)$$

имѣетъ видъ

$$u^3\varrho^2+v^3\varrho+w^3-3uvw\varrho.$$

Если $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+B\sqrt[3]{\varrho}+C$ единица, то ея норма есть $+$ или -1, т. е.

$$A^3\varrho^2+B^3\varrho+C^3-3ABC\varrho=1 \tag{2}$$

(мы пишемъ $+1$, такъ какъ иначе бы помножили нашу единицу на -1).

Легко вычислить, что обратная единица, т. е.

$$A'(\sqrt[3]{\varrho})^2+B'\sqrt[3]{\varrho}+C' = \frac{1}{A(\sqrt[3]{\varrho})^2+B\sqrt[3]{\varrho}+C}$$

имѣетъ коэффиценты

$$A'=B^2-AC;\quad B'=A^2\varrho-BC;\quad C'=C^2-AB\varrho; \tag{3}$$

изъ (2) легко получить слѣдующее соотношенiе:

$$AB'\varrho+A'B\varrho+CC'=1 \tag{4}$$

Изъ (4) видимъ, такъ какъ $\varrho>0$, что не могутъ быть у обѣихъ единицъ, прямой и обратной, всѣ три коэффицiента одного знака. Предположимъ, что коэффиценты A, B и C не одного знака и покажемъ, что тогда A', B' и C' не равны нулю и одного знака.

1) Пусть $A=0$; $B>0$; $C<0$ или $A=0$; $B<0$; $C>0$; или $A>0$; $B=0$; $C<0$ или $A<0$; $B=0$; $C>0$; непосредственно изъ (3) мы убѣждаемся что $A'>0$ $B'>0$ $C'>0$.

2) Пусть $A>0$; $B>0$; $C<0$; тогда изъ (3) $A'>0$ и $B'>0$ и слѣдовательно изъ (4) $C'>0$.

3) Пусть $A>0$; $B<0$; $C>0$; тогда изъ (3) $B'>0$ и $C'>0$ и слѣдовательно изъ (4) $A'>0$.

4) Пусть наконецъ $A<0$; $B>0$; $C>0$; тогда изъ (3) $A'>0$ и $C'>0$, и слѣдовательно изъ (4) $B'>0$.

Всѣ остальные возможные случаи сводятся на разсмотренные Ч. и т. д.

Изъ этого замѣчанiя слѣдуетъ что лишь степени основной единицы $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$, коэффицiенты которой a, b и c не одного знака, могутъ давать двучленныя единицы, такъ какъ въ степеняхъ обратной ей единицы, имѣющей всѣ три коэффицiента a', b' и c' положительные (если бы отрицательные, то мы помножили бы на -1) послѣ замѣны $(\sqrt[3]{\varrho})^3$ на ϱ во всѣхъ членахъ разложенiя $[a'(\sqrt[3]{\varrho})^2+b'\sqrt[3]{\varrho}+c')^m$, гдѣ $\sqrt[3]{\varrho}$ входитъ въ болѣе высокой степени нежели второй, т. е. послѣ приведенiя $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b'\sqrt[3]{\varrho}+c')^m$ къ виду $A'(\sqrt[3]{\varrho})^2+B'\sqrt[3]{\varrho}+C'$, ни одинъ изъ коэффицiентовъ A', B' или C' выйти нулемъ не можетъ, такъ какъ числа a', b', c' и ϱ всѣ >0.

Основную единицу $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$, у которой a, b и c не одного знака, и всѣ ея степени мы будемъ называть «прямыми» единицами, а всѣ степени обратной «обратными». Въ табличкѣ даны какъ разъ прямыя основныя единицы.

§ 2. Задача рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$ сводится такимъ образомъ къ разысканію тѣхъ показателей m, при которыхъ

$$[a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c]^m$$

двучленная единица.

Теорема I. «*Никакая степень единицы вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$ или вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$ не можетъ быть двучленной единицей*».

Т. е. мы покажемъ что, при возвышеніи въ степени единицы вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$ или вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$ будутъ получаться единицы

$$M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$$

гдѣ $M \neq 0$. Дѣйствительно если бы $(B\sqrt[3]{\varrho} + C)^m$ давала $M = 0$, или $[A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C]^m$ давала бы $M = 0$, мы имѣли бы одно изъ слѣдующихъ шести равенствъ

если m вида $m = 3\lambda + 2$,

$$\xi^\lambda + \xi^{\lambda-1}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots\dots\dots + (C^3)^\lambda\frac{m(m-1)}{1.2} = 0;$$

если m вида $m = 3\lambda + 1$

$$\xi^{\lambda-1}\frac{m(m-1)}{1.2} + \xi^{\lambda-1}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3..4.5} + \dots + (C^3)^{\lambda-1}\frac{m(m-1)}{1.2} = 0;$$

если m вида $m = 3\lambda$

$$\xi^{\lambda-1}m + \xi^{\lambda-2}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \dots\dots\dots + (C^3)^{\lambda-1}\frac{m(m-1)}{1.2} = 0;$$

всѣ три для $M = 0$ въ $(B\sqrt[3]{\varrho} + C)^m$; $\xi = B^3\varrho$;

если m вида $m = 3\lambda + 2$

$$\xi^\lambda m + \xi^{\lambda-1}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \dots\dots \dots\dots + (C^3)^\lambda m = 0;$$

если m вида $m = 3\lambda + 1$

$$+ \xi^{\lambda-1}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots\dots\dots\dots\dots + (C^3)^\lambda m = 0;$$

если m вида $m = 3\lambda$

$$\xi^{\lambda-1}\frac{m(m-1)}{1.2} + \xi^{\lambda-2}(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} + \dots + (C^3)^\lambda m = 0,$$

всѣ три для $M = 0$ въ $[A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C]^m$; $\xi = A^3\varrho^2$

но такъ какъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$ и $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$ единицы, имѣемъ уравненія

$$B^3\varrho + C^3 = 1; \quad A^3\varrho + C^3 = 1$$

изъ которыхъ видимъ, что $B^3\varrho$ и $A^3\varrho^2$ взаимно простые съ C, т. е. ξ взаимно простое съ C. Кромѣ того если $\varrho > 2$, $|C| > 1$. Возьмемъ простого дѣлителя C, q; пусть коэффиціентъ при высшей степени ξ дѣлится на q^k. Оставимъ въ каждомъ биноміальномъ коэффиціентѣ слѣдующихъ членовъ нетронутыми въ числителѣ первые два множителя, т. е. $m(m-1)$, а въ знаменателѣ послѣдніе два множителя, и сократимъ остальные множители знаменателя съ оставшимися множителями числителя, пользуясь тѣмъ, что $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$, при всякомъ n и $k < n$, цѣлое число (Gauss Dis. Ar. § 127). Первый членъ дѣлится на q^k, въ остальныхъ же степень q, которая убавится вслѣдствіе содержанія q въ оставшихся множителяхъ знаменателя, меньше степени q, которая прибавится вслѣдствіе содержанія q въ C, такъ какъ даже если $q=2$, то $q^3>5$; $q^6>8$; $q^9>11$ и т. д.; итакъ всѣ члены дѣлятся на q^{k+1}, а первый лишь на q^k, слѣд. равенства невозможны.

Ч. и т. д.

Какъ мы видимъ, для случая $\varrho = 2$ предложенное доказательство теоремы I не годится, такъ какъ $|C| = 1$; но этотъ случай относится къ уравненію $2X^3+Y^3=1$, которое какъ разъ уже рѣшено Эйлеромъ, показавшимъ при помощи способа Fermat «de la descente infinie, ou indéfinie», что это уравненіе, кромѣ рѣшеній $X=0$, $Y=1$; $X=1$, $Y=-1$ не имѣетъ никакихъ другихъ не только цѣлыхъ, но даже и дробныхъ рѣшеній; (Algebra Kap. 15). Такимъ образомъ теорема I оказывается справедливой и для случая $\varrho=2$, и слѣдовательно доказана во всей полнотѣ.

Слѣдствіе. «Если сама основная единица уже вида $b\sqrt[3]{\varrho}+c$, то уравненіе имѣетъ одно и только одно рѣшеніе $X=b$, $Y=c$; если же основная единица вида $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+c$, уравненіе $X^3\varrho+Y^3=1$ вовсе не имѣетъ рѣшеній (кромѣ тривіальнаго, конечно, $X=0$, $Y=1$)».

Какъ мы видимъ изъ таблички, основная единица имѣетъ видъ $b\sqrt[3]{\varrho}+c$, напр., для $\varrho=2$; 7; 17; 19; 26; 28; 37; 43; 63...; такъ что, напримѣръ, уравненіе $17.X^3+Y^3=1$ имѣетъ только одно рѣшеніе $X=-7$, $Y=18$. Между прочимъ, основная единица имѣетъ такой видъ $b\sqrt[3]{\varrho}+c$ для всѣхъ ϱ, которыя формы r^3+1 или r^3-1, такъ какъ въ этихъ случаяхъ $\sqrt[3]{\varrho}-r$ и. соотвѣтственно, $-\sqrt[3]{\varrho}+r$ единицы, и притомъ основныя, такъ какъ коэффиціентъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ обратной единицы равенъ 1, и слѣдовательно она не можетъ быть никакою степенью другой единицы, т. к. даже квадратъ единицы $x(\sqrt[3]{\varrho})^2+y\sqrt[3]{\varrho}+z$ имѣетъ коэффиціентомъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ y^2+2xz, что>1, у болѣе же высокихъ степеней, на основаніи § 1, коэффиціенты еще больше. Замѣчаніе § 1 вообще позволяетъ провѣрять, основная ли нѣкоторая заданная единица, и даже находить основную единицу по заданной, если коэффиціенты заданной, числа не слишкомъ большія. Пусть, напримѣръ, задана единица $4\alpha^2+6\alpha-47$, гдѣ $\alpha^3=21$, т. е. $\varrho=21$; мы вычисляемъ обратную единицу $224\alpha^2+618\alpha+1705$, пользуясь формулами (3); четвертой степенью она быть не можетъ, такъ какъ коэффиціентъ при α^2 у четвертой степени уже больше ϱ^2, т. е. больше 441, а $224<441$; кубомъ она тоже быть не можетъ, такъ какъ коэффиціенты при α^2 и α у куба единицы дѣлятся на 3. а 224 не дѣлится на 3; слѣд. она могла бы быть только квадратомъ нѣкоторой единицы $x(\sqrt[3]{\varrho})^2+y\sqrt[3]{\varrho}+z$; тогда имѣли бы

$$1)\ 224=y^2+2xz;\quad 2)\ 618=x^2\cdot 21+2yz;\quad 3)\ 1705=z^2+42xy,$$

изъ 2) заключаемъ, такъ какъ $x>0$, $y>0$, $z>0$, (по § 1), что $x=2$ или 4; но, если $x=2$, то изъ 2) же получаемъ $yz=267=3.89$, т. е. или y или z не меньше 89, что несовмѣстимо съ 3); если же $x=4$, то $yz=141=3.47$ т. е. или y или z не менѣе 47, что тоже несовмѣстимо съ 3); и значитъ единица $4\alpha^2+6\alpha-47$ дѣйствительно основная единица порядка $\sqrt[3]{21}$.

Основная единица имѣетъ видъ $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+c$, напр., при $\varrho=3; 39;$...

Перейдемъ теперь къ тому случаю, когда основная единица трехчленная, т. е. ни a ни b не равны нулю.

§ 3. Легко замѣтить, что если коэффиціентъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ въ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ равенъ нулю, то имѣютъ мѣсто уравненія:

1) если m вида $3.\gamma+2$

$$\begin{gathered}(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^m+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^m+\\+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m=0\end{gathered}\tag{6}$$

2) если m вида $3.\gamma+1$

$$\begin{gathered}(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^m+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^m+\\+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m=0\end{gathered}\tag{7}$$

3) если m вида $3.\gamma$

$$\begin{gathered}\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m+\zeta(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m+\\+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m=0\end{gathered}\tag{8}$$

гдѣ ζ обозначаетъ $\sqrt[3]{1}=e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

§ 4. Теорема II. «*Если* $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ *двучленная единица, и* m *не дѣлится ни на 2 ни на 3, то* m *можетъ быть только простымъ числомъ дѣлителемъ* $ab\varrho$».

Доказательство. Пусть 1) m вида $3.\gamma+2$.

Изъ уравненія (6) мы видимъ что, если m_1 дѣлитель m, то $(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^{m_1}+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^{m_1}$, какъ дѣлитель $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ (m нечетное) есть алгебраическая единица; m имѣетъ хоть одного простого дѣлителя q вида $3.\gamma+2$. Слѣдовательно имѣемъ $(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^q$, алгебраическая единица; разсмотримъ сумму нормъ

$$\begin{aligned} N[(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^q]+\\ +N(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q \end{aligned} \tag{9}$$

эта сумма нормъ, такъ какъ каждая N, какъ норма единицы есть $+1$ или—1, равна ± 2 или 0. Нетрудно видѣть что если

$$(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$$

то

$$\begin{aligned} [(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^q]=\\ =2M(\sqrt[3]{\varrho})^2-P\sqrt[3]{\varrho}-Q \end{aligned}$$

откуда разсматриваемая сумма нормъ (9) будетъ

$$\begin{aligned} [M^3\varrho^2+P^3\varrho+Q^3-3MPQ\varrho]+[8M^3\varrho^2-P^3\varrho-Q^3-6MPQ\varrho]=\\ =9M\varrho(M^2\varrho-PQ) \end{aligned}$$

мы видимъ, что эта сумма дѣлится на 9 и слѣдовательно не можетъ $=\pm 2$, и значитъ она$=0$; но $9\varrho\neq 0$; изъ замѣчанія же § 1 видимъ что $M^2\varrho-PQ$ тоже $\neq 0$ такъ какъ $M^2\varrho-PQ$ есть коэффиціентъ при $\sqrt[3]{\varrho}$ обратной единицы, см. (3), слѣд.

$$M=0$$

то есть $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$ двучленная единица. Если $m>q$ то $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ есть степень $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho})+c)^q$, такъ какъ q дѣлитель m, что противорѣчило бы теоремѣ I, такъ какъ мы предположили, что $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho})^2+c)^m$ двучленная единица; значитъ $m=q$, m простое число.

Разсмотримъ $M=0$. M коэффиціентъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ въ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$, всѣ его слагаемыя, кромѣ $\frac{(b\sqrt[3]{\varrho})^q}{(\sqrt[3]{\varrho})^2}$, дѣлятся на q, такъ какъ всѣ биноміальные коэффиціенты дѣлятся на q (q простое), слѣдовательно q дѣлитель $b\varrho$.

2) m вида $3.\gamma+1$

Въ этомъ случаѣ m могло бы состоять исключительно изъ множителей вида $3.\gamma+1$, а также и исключительно изъ множителей вида $3\gamma+2$, поэтому надо разсматривать два случая:

1. q простой дѣлитель m, причемъ q вида $3.\gamma+1$. Опять получаемъ, что если $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$, то, см. (7),

$$[(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)^q+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q]=2M(\sqrt[3]{\varrho})^2-P\sqrt[3]{\varrho}-Q$$

и слѣдовательно разсматриваемая сумма нормъ (9) опять равна

$$9M\varrho(M^2\varrho-PQ)$$

откуда, какъ раньше, заключаемъ что m простое число, именно $m=q$; разсматривая снова $M=0$, видимъ что q есть дѣлитель $a\varrho$.

2. q простой дѣлитель m, причемъ q вида $3.\gamma+2$.

Въ этомъ случаѣ убѣждаемся, что если

$$(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q,$$

то

$$[(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)^q+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q]=-M(\sqrt[3]{\varrho})^2+2P\sqrt[3]{\varrho}-Q$$

и слѣдовательно разсматриваемая сумма нормъ (9) будетъ

$$[M^3\varrho^2+P^3\varrho+Q^3-3MPQ\varrho]+[M^3\varrho^2+8P^3\varrho-Q^3-6MPQ\varrho]=$$
$$=9P\varrho(P^2-MQ)$$

мы видимъ что эта сумма дѣлится на 9 и слѣд. $\neq\pm2$, слѣд. она $=0$; но $9\varrho\neq0$, P^2-MQ тоже $\neq0$, такъ какъ это, см. (3), коэффиціентъ обратной единицы, и слѣд. по § 1 не равенъ нулю, такимъ образомъ получаемъ $P=0$, т. е. $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$ единица вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+C$. Если $m>q$, то $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ есть степень $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$, такъ какъ q дѣлитель m, а это противорѣчило бы теоремѣ I, такъ какъ мы предположили, что $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ двучленная единица; значитъ $m=q$, простое число.

Разсматривая $P=0$ совершенно аналогично предыдущему пользуемся тѣмъ, что разъ q простое, то всѣ биноміальные коэффиціенты $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$ дѣлятся на q, и получаемъ что q дѣлитель $a\varrho$ ч. и т. д.

§ 5. Теорема III. *Если* $(a\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ *единица вида* $B\sqrt[3]{\varrho}+C$, *и* m *дѣлится на 2 или 3, то* m *можетъ имѣть только видъ* $m=2^k.3^l$.

Доказательство. Пусть

1) $m=2^k.3^l.\mu$, гдѣ μ уже не дѣлится ни на 2 ни на 3, и μ вида $3.\gamma+1$; тогда, какъ легко видѣть, формулу (8) можно переписать въ такомъ видѣ:

$$[\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k.3^l}]^{\mu}+[\zeta(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k.3^l}]^{\mu}+ \\ =-(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m \tag{10}$$

такъ какъ μ нечетное, то

$$\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k.3^l}+\zeta(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k.3^l}$$

дѣлитель лѣвой части (10), слѣд. дѣлитель $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ т. е. единица. Разсмотримъ сумму нормъ

$$N[\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k.3^l}+\zeta(\zeta^2 a\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}]+ \\ +N(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l} \tag{11}$$

и замѣтимъ что если $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$ то

$$\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}+\zeta(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}= \\ =2M(\sqrt[3]{\varrho})^2-P\sqrt[3]{\varrho}-Q$$

и слѣдовательно разсматриваемая сумма нормъ (11) равна

$$9M\varrho(M^2\varrho-PQ)$$

откуда, какъ раньше, получаемъ $M=0$, т. е. $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k.3}$ двучленная единица, и слѣдовательно на основаніи теоремы I, m не можетъ быть больше $2^k.3^l$, такъ какъ $2^k.3^l$ дѣлитель m, и тогда бы двучленная единица $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ была степенью двучленной единицы $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}$; слѣдовательно $m=2^k.3^l$.

2) $m=2^k.3_l.\mu$, гдѣ μ уже не дѣлится ни на 2 ни на 3, и μ вида $3.\gamma+2$; тогда, какъ легко видѣть, можно переписать формулу (8) въ такомъ видѣ:

$$[\zeta(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}]^{\mu}+[\zeta^2(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}]^{\mu}=$$
$$=-(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$$

какъ раньше заключаемъ что

$$\zeta(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}+\zeta^2(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}$$

единица. Разсматриваемъ опять сумму нормъ этой единицы и единицы $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}$; и, ввиду того что, если

$$(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q, \quad \text{то}$$

$$(\zeta\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}+\zeta^2(\zeta^2 a\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+2P\sqrt[3]{\varrho}-Q,$$

находимъ что эта сумма нормъ, которая $=\pm 2$ или 0, равна

$$9P\varrho(P^2-MQ)$$

откуда $P=0$ т. е. $(a(\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}$ вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+C$, и, на основаніи теоремы I, мы заключаемъ что $\mu=1$, т. е. $m=2^k.3^l$. Если бы $l=0$, то мы вели бы доказательство какъ въ § 4, положивъ $q=2^k$

Ч. и т. д.

§ 6. Въ настоящее время мы не можемъ указать способа вычислять показатели m вида $2^k.3^l$, для которыхъ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^3+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}$ двучленная единица, такъ, какъ это было сдѣлано для всѣхъ остальныхъ показателей, которые суть простыя числа дѣлители $ab\varrho$, и слѣдовательно могутъ быть найдены, либо можетъ быть показано что такихъ показателей нѣтъ. Несмотря на всѣ попытки, намъ не удалось найти даже отдѣльныхъ случаевъ ϱ съ трехчленной основной единицей, въ которыхъ можно было бы найти всѣ показатели m вида $2^k.3^l$, соотвѣтствующіе рѣшеніямъ уравненія (1). Закончимъ слѣдующимъ замѣчаніемъ. Пусть $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^{k_i}\cdot 3^{l_i}}$ двучленная единица; тогда никакой другой показатель m вида $2^{k_j}.3^{l_j}$, для котораго $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^{k_j}\cdot 3^{l_j}}$ двучленная единица, не можетъ быть кратнымъ $2^{k_j}.3^{l_j}$, такъ какъ иначе имѣли бы случай противорѣчащій теоремѣ I, всѣхъ же возможныхъ чиселъ вида $2^{k_\lambda}.3^{l_\lambda}$, изъ которыхъ ни одно не есть кратное другого, если одно изъ такихъ чиселъ $2^k.3^l$, не больше чѣмъ $k+l$. Такимъ образомъ мы видимъ что уравненіе (1) имѣетъ во всякомъ случаѣ конечное число рѣшеній.