Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія

$X^3\varrho + Y^3 = 1$.

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ замѣткѣ „Къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія $X\varrho^3 + Y^3 = 1$". мы разсматривали показатели m, при которыхъ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^m$, гдѣ $a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c$ основная единица „порядка" $(\sqrt[3]{\varrho})$, можетъ быть двучленной единицей. Мы получили слѣдующія двѣ теоремы:

Теорема I. „*Никакая степень двучленной единицы не можетъ быть двучленной единицей*".

Теорема II. „*Если бы $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^m$ была двучленной единицей, то m могло бы быть только либо простымъ числомъ дѣлителемъ $ab\varrho$ либо вида $2^k.3^l$.*"

Здѣсь мы понимаемъ подъ двучленной единицей единицу вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$ или вида $B\sqrt[3]{\varrho} + c$; въ указанной замѣткѣ мы считали двучленными только единицы вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$. Доказательства теоремъ въ такой болѣе общей формулировкѣ однако совершенно аналогичны прежнимъ.

Въ упомянутой замѣткѣ мы не дали окончательнаго рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$, такъ какъ намъ не удалось найти способа вычислять показатели m вида $2^k.3^l$, для которыхъ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^m$ двучленная единица, хотя мы и показали что такихъ показателей не болѣе чѣмъ $k + l$.

Въ настоящей замѣткѣ мы предлагаемъ слѣдующія двѣ новыя теоремы, которыя присоединенныя къ теоремамъ I и II, исчерпываютъ вопросъ объ вычисленіи всѣхъ рѣшеній нашего уравненія, когда ϱ простое число. Когда же ϱ не простое число, мы можемъ найти всѣ рѣшенія кромѣ одного. Нахожденіе этого рѣшенія требуетъ дальнѣйшаго изслѣдованія.

Теорема III. *„Кубъ единицы не можетъ быть двучленной единицей"*

Даказательство: Пусть $M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$ единица т. е.

$$M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1 \qquad (1)$$

и пусть $(M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q)^3$ двучленная единица вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, т. е. коэффиціентъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ т. е.

$$M^2P\varrho + P^2Q + MQ^2 = 0 \qquad (2)$$

Покажемъ невозможность одновременнаго существованія (1) и (2). Пусть общій наибольшій дѣлитель M и P есть δ; Q взаимно простое съ ϱ и съ δ, это слѣдуетъ изъ (1). Изъ (2) мы видимъ что $M = \delta^2 . m$; $P = \delta . p$, гдѣ уже p и m взаимно простые, такъ какъ иначе δ не былъ бы наибольшимъ общимъ дѣлителемъ M и P. Перепишемъ (2) такъ: $-M^2P\varrho = Q(P^2 + MQ)$ или $-m\delta^4p\delta\varrho = Q(p^2\delta^2 + m\delta^2Q)$; т. е $-m^2\delta^3p\varrho = Q(p^2 + mQ)$; m взаимно простое съ p, а слѣд. и съ $p^2 + mQ$; слѣд.. $Q = m^2 . q$ т. е. $-m^2\delta^3p\varrho = m^2q(p^2 + m^3q)$ или $-p\delta^3\varrho = q(p^2 + m^3q)$; q взаимно простое съ δ и ϱ (какъ дѣлитель Q), слѣд. $p = q . s$ откуда $-qs\delta^3\varrho = q(q^2s^2 + m^3q)$ или $-s\delta^3\varrho = q(qs^2 + m^3)$; q взаимно простое съ δ и ϱ, слѣд. $s = q . e$, откуда $-qe\delta^3\varrho = q(q^3e^2 + m^3)$ или $-e\delta^3\varrho = q^3e^2 + m^3$, но e дѣлитель s и слѣдовательно дѣлитель p, слѣд. e взаимно простое съ m, и значитъ $e = \pm 1$, т. е. мы получаемъ

$$\mp \delta^3\varrho = q^3 + m^3 ;\ \delta^3 = \mp \frac{q^3 + m^3}{\varrho}$$

$$M = m\delta^2 ;\ P = \pm q^2\delta;\ Q = m^2q ;\ MPQ = \pm m^3q^3\delta^3$$

подставляя эти выраженія въ (1), получимъ

$$m^3\delta^6\varrho^2 \pm q^6\delta^3\varrho + m^6q^3 \mp 3m^3q^3\delta^3\varrho = 1$$

но $\delta^3 = \mp \dfrac{q^3 + m^3}{\varrho}$; подставивъ это получимъ

$$m^3(m^3 + q^3)^2 - (m^3 + q^3)\,q^6 + m^6q^3 + 3m^3q^3(m^3 + q^3) = 1$$

или если положить $m^3 = x$; $q^3 = y$, то

$$x(x + y)^2 - (x + y)\,y^2 + x^2y + 3xy(x + y) = 1$$

или

$$(x - y)^3 + 9x^2y = 1$$

что если положить $m^2q=\lambda$, $m^3-q^3=\mu$ переходитъ въ

$$9\lambda^3+\mu^3=1 \tag{3}$$

Основная единица области $\Omega\sqrt[3]{9}$ есть $\sqrt[3]{9}-2$ т. е. она двучленная, а слѣдовательно уравненіе (3) имѣетъ по теоремѣ I только одно не тривіальное рѣшеніе $\lambda=1$, $\mu=-2$ и имѣетъ еще тривіальное рѣшеніе $\lambda=0$, $\mu=1$. Но случай $\lambda=1$, $\mu=-2$ несовмѣстимъ съ $m^2q=\lambda$, $m^3-q^3=\mu$; случай же $\lambda=0$, $\mu=1$ приводитъ къ $m=0$ или $q=0$, т. е. или M или P равны нулю, въ каковомъ случаѣ не только кубъ, но даже никакая степень $M\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$ не можетъ быть двучленной единицей (теорема I).

Ч. и т. д.

Сопоставляя все сказанное въ теоремахъ I, II и III мы получаемъ слѣдующій способъ рѣшенія уравненія $X^3\varrho+Y^3=1$.

Прежде всего надо вычислить основную единицу кубической области $\Omega\sqrt[3]{\varrho}$, что можно сдѣлать либо по способу, данному Воронымъ, либо пользуясь принципомъ Hermite'а по способу Charwe'а. Если основная единица $O(\sqrt[3]{\varrho})$ сразу двучленная вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$, то она даетъ единственное рѣшеніе $X=B$, $Y=C$ уравненія $X^3\varrho+Y^3=1$, если же она двучленная вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+C$, то уравненіе $X^3\varrho+Y^3=1$ рѣшеній вовсе не имѣетъ (теорема I). Если же основная единица трехчленная $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$, то надо попробовать возвышать ее въ степени съ простыми показателями, дѣлителями a, b или ϱ (по теоремѣ II); среди этихъ степеней могутъ встрѣтиться двучленныя единицы вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$, т. е. рѣшенія уравненія $X^3\varrho+Y^3=1$. Наконецъ можетъ еще существовать одно рѣшеніе съ показателемъ вида 2^k, одно, такъ какъ если бы такихъ рѣшеній было два, то одно изъ нихъ было бы степенью другого, что противорѣчило бы теоремѣ I.

Никакихъ другихъ рѣшеній уравненіе $X^3\varrho+Y^3=1$ не имѣетъ. Такимъ образомъ въ случаѣ ϱ составного мы можемъ найти всѣ рѣшенія уравненія $X^3\varrho+Y^3=1$ за исключеніемъ одного,—именно того, которому соотвѣтствовалъ бы показатель m вида 2^k. Въ случаѣ же ϱ простого, мы на основаніи слѣдующей теоремы можемъ найти и это рѣшеніе, если оно существуетъ, т. е. найти всѣ рѣшенія.

Теорема IV. *„Если ϱ степень простого числа и $X^3\varrho + Y^3 = 1$ имѣетъ рѣшеніе съ четнымъ показателемъ, то и $X^3\varrho^2 + Y^3 = 1$ имѣетъ рѣшеніе, по которому можно найти рѣшеніе уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$“.*

Доказательство. Пусть $M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$ единица, т. е.

$$M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1 \tag{4}$$

и $(M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q)^2$ двучленная единица вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, т. е.

$$P^2 = -2MQ. \tag{5}$$

Изъ (5) слѣдуетъ

$$\begin{array}{llll} \text{или} & 1)\ Q = \gamma^2, & M = -2\alpha^2, & P = \pm 2\alpha\gamma \\ \text{или} & 2)\ Q = -\gamma^2, & M = 2\alpha^2, & P = \pm 2\alpha\gamma \\ \text{или} & 3)\ Q = 2\gamma^2, & M = -\alpha^2 & P = \pm 2\alpha\gamma \\ \text{или} & 4)\ Q = -2\gamma^2, & M = \alpha^2, & P = \pm 2\alpha\gamma \end{array}$$

подставляя это въ $M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1$, получаемъ

$$\begin{array}{l} 1) - 8\varrho^2x^2 \pm 20\varrho xy + y^2 = 1 \\ 2) \quad 8\varrho^2x^2 \pm 20\varrho xy - y^2 = 1 \\ 3) - \varrho^2x^2 \pm 20\varrho xy + 8y^2 = 1 \\ 4) \quad \varrho^2x^2 \pm 20\varrho xy - 8y^2 = 1 \quad \text{гдѣ } x = \alpha^3;\ y\gamma^3. \end{array}$$

Формы 1) и 2) тожественны слѣдующей формѣ Пеллева вида

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{6}$$

гдѣ $D = 4.27.\varrho^2$ и гдѣ $x = \gamma^3 + 10\varrho\alpha^3$; $y = \alpha^3$.

Изъ (6) получаемъ $x^2 - 1 = 4\varrho^2\sigma^3$, гдѣ $\sigma = 3\alpha^2$, и наконецъ

$$\frac{x-1}{2} \cdot \frac{x+1}{2} = \varrho^2\sigma^3 \tag{7}$$

x нечетное (изъ (6)), и слѣдовательно $\frac{x-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}$ послѣдовательныя цѣлыя числа; если ϱ степень простого числа, то на ϱ^2 дѣлится либо только $\frac{x-1}{2}$ либо только $\frac{x+1}{2}$; пусть $\frac{x+1}{2\varrho^2}$ цѣлое число тогда; такъ какъ $\frac{x+1}{2\varrho^2}$ и $\frac{x-1}{2}$ взаимно простые, получаемъ изъ (7) $\frac{x+1}{2} = \lambda^3\varrho^2$; $\frac{x-1}{2} = \mu^3$, гдѣ $\lambda\mu = \sigma$; вычитая получаемъ

$$\lambda^3\varrho^2 - \mu^3 = 1;$$

пусть $\frac{x-1}{2\varrho^2}$ цѣлое число, тогда аналогично получаемъ

$$-\mu^3\varrho^2+\lambda^3=1.$$

Квадратичныя же формы 3) и 4) переписываемъ такъ

$$-x^2\pm 20xy+8y^2=1$$
$$x^2\pm 20xy-8y^2=1$$

гдѣ

$$x=\varrho\alpha^3;\ y=\gamma^3;$$

соотвѣтствующая имъ Пеллева форма

$$x^2-4.27y^2=1,\ \text{гдѣ}\quad y=\gamma^3$$

т. е.

$$\frac{x+1}{2}.\frac{x-1}{2}=v^3\quad \text{гдѣ}\quad v=3\gamma^2$$

т. е. $\frac{x+1}{2}$ и $\frac{x-1}{2}$ кубы, что можетъ быть только если $\frac{x+1}{2}=1$; $\frac{x-1}{2}=0$, откуда $v=0$, $\gamma=0$, $Q=0$, $P=0$, чего быть не можетъ.

Ч. и т. д.

Будемъ обозначать основную единицу порядка $O(\sqrt[3]{\varrho^n})$ черезъ $\varepsilon_\varrho{}^n$.

Если $\varepsilon_\varrho=a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$

то

$$\varepsilon_\varrho^\varrho=(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^\varrho=a'\varrho(\sqrt[3]{\varrho})^2+b'\varrho\sqrt[3]{\varrho}+c'=a_1(\sqrt[3]{\varrho})^2+b_1\sqrt[3]{\varrho^2}+c_1$$

$$\text{гдѣ}\ a_2=b';\ b_2=a'\varrho.$$

есть единица изъ $O(\sqrt[3]{\varrho})^2$ и притомъ основная, такъ какъ если бы она была степенью ε_{ϱ^2}, то она была бы сложною степенью ε_ϱ, а ϱ простое число; исключенiе представляетъ случай $\varepsilon_\varrho=\varepsilon_{\varrho^2}$; слѣд. или $\varepsilon_{\varrho^2}=\varepsilon_\varrho{}^\varrho$, или $\varepsilon_{\varrho^2}=\varepsilon_\varrho$

Аналогично если $\varepsilon_\varrho{}^2=a_1(\sqrt[3]{\varrho})^2=b_1\sqrt[3]{\varrho^2}+c_1$ то

$$\varepsilon_{\varrho^2}^\varrho=(a_1(\sqrt[3]{\varrho^2})^2+b_1\sqrt[3]{\varrho^2}+c_1)^\varrho=a''\varrho(\sqrt[3]{\varrho^2})^2+b''\varrho\sqrt[3]{\varrho^2}+c''=$$
$$=a_2(\sqrt[3]{\varrho^4})^2+b_2\sqrt[3]{\varrho^4}+c_2$$

$$\text{гдѣ}\ a_2=b'';\ b_2=a''\varrho$$

есть единица изъ $O\sqrt[3]{\varrho^4}$ и притомъ основная, такъ какъ если бы она была степенью ε_{ϱ^4}, то она была бы сложною степенью ε_{ϱ^2}, а ϱ простое число; слѣд. или $\varepsilon_{\varrho^4}=\varepsilon_{\varrho^2}{}^\varrho$ или $\varepsilon_{\varrho^4}=\varepsilon_{\varrho^2}$ и т. д.

Пусть теперь $X^3\varrho+Y^3=1$ имѣетъ рѣшеніе X_1, Y_1, соотвѣтствующее показателю $m=2^k$; тогда по теоремѣ IV, имѣетъ рѣшеніе λ, μ уравненіе $X^3\varrho^2+Y^3=1$, причемъ по λ и μ можно найти X_1 и Y_1 такъ какъ $X_1=M^2\varrho+2PQ$, $Y_1=Q^2+2MP\varrho$. Если $\varepsilon_{\varrho^2}\neq\varepsilon_\varrho$ то рѣшеніе λ, μ уравненія $X^3\varrho^2+Y^3=1$ можетъ быть только $\varepsilon_\varrho{}^\varrho$, такъ какъ оно должно соотвѣтствовать $\varepsilon_{\varrho^2}^{m_1}=\varepsilon_\varrho^{\varrho.m_1}$, т. е., если $\varrho\neq 2$, то по теоремѣ II, $m_1=1$, тогда мы его найдемъ, если оно существуетъ, и по нему найдемъ X_1 и Y_1.

Если же $\varepsilon_{\varrho^2}=\varepsilon_\varrho$, то λ, μ соотвѣтствуетъ либо $m=q$, гдѣ q простое число, дѣлитель $a.b.\varrho$; всѣ такія рѣшенія можно найти, и по нимъ, вычислить X_1, Y_1; или же λ, μ соотвѣтствуетъ $m=2^k$. Тогда по теоремѣ IV имѣетъ рѣшеніе λ_1, μ_1 уравненіе $X^3\varrho^4+Y^3=1$ и т. д.

Это разсужденіе однако оборвется, такъ какъ для того чтобы $\varepsilon_\varrho{}^n=\varepsilon_\varrho$, необходимо, чтобы ab дѣлилось на ϱ^{n-1}. На примѣрахъ $\varepsilon_{\varrho^2}\neq\varepsilon_\varrho$ (до $\varrho=61$) и слѣдовательно разсужденіе обрывается уже на уравненіи $X^3\varrho^2+Y^3=1$.

3 марта 1915 г.