Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique.

par Serge Bernstein.

---

1. Le présent travail contient la démonstration et le développement de quelques conséquences d'un des théorèmes de ma Note [1]) «Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard».

Le théorème de géométrie que je veux démontrer ici est le suivant: *Une surface $z = f(x, y)$ admettant des dérivées continues des deux premiers ordres, dont la courbure totale n'est ni positive, ni identiquement nulle, ne peut rester constamment comprise entre deux plans fixes $z = \pm h$.*

De ce théorème on déduit facilement une proposition très générale concernant les équations du type elliptique qui contient comme un cas particulier une proprieté fondamentale des fonctions harmoniques connue sous le nom du théorèmc de Liouville:

Si z est une fonction bornée admettant des dérivées continues des deux premiers ordres et satisfaisant à une équation de la forme

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \tag{1}$$

où A, B, C sont des fonctions finies de x, y, z, p, q, r, s, t, avec l'inégalité $AC - B^2 > 0$, la fonction z est une constante.

Notre généralisation du théorème de Liouville s'applique evidemment aussi aux surfaces *minima*; mais, grâce à un petit artifice de calcul qui tient à la forme particulière de l'équation de ces surfaces, j'établis, en outre, une propriété spéciale des surfaces minima qui les distingue essentiellement des surfaces harmoniques. Voila cette propriété:

Une surface minima réelle $z = f(x, y)$ admettant des dérivées continues des deux premiers ordres pour toutes les valeurs réelles finies de x, y est un plan. En d'autres termes, la fonction z qui comme on sait,

---

[1]) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 10 Octobre 1910.

est analytique, doit avoir, en général des singularités réelles à distance finie; ainsi, tandis que la variété des fonctions harmoniques entières rationnelles ou transcendentes est si grande, la seule fonction entière satisfaisant à l'équation des surfaces minima

$$(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 0$$

est la fonction linéaire $z = Ax + By + C$.

2. Commençons par la démonstration d'un lemme que nous aurons souvent l'occasion d'utiliser:

Lemme. *Soit $z = f(x, y)$ une fonction des variables réelles x, y, admettant des dérivées continues des deux premiers ordres, et soit B une région, où $z < 0$, ayant pour frontière l'ensemble de points $z = 0$. La région B ne peut être bornée, si on a $rt - s^2 \leq 0$ en tous les points, où $p^2 + q^2 < N$, le nombre positif fixe N étant aussi petit qu'on veut.*

En effet, si l'on suppose la région B bornée, cela entraine comme conséquence que la fonction z atteint un minimum absolu $m < 0$ en un point intérieur à B, où $p = q = 0$. En prenant ce point 0 pour origine, on pourra poser

$$z = m + (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + 2\varepsilon_2 xy + \varepsilon_3 y^2),$$

où α, β sont des constantes (qui peuvent être nulles) et ε_1, ε_2, ε_3 tendent vers zéro avec $x^2 + y^2$, puisque $rt - s^2 = 0$ en 0. D'autre part, considérons la fonction

$$z_1 = m + \frac{h}{2}(x^2 + y^2),$$

où nous pouvons fixer le nombre positif h assez petit pour avoir $z_1 < 0$ et $h^2(x^2 + y^2) < N$ en tous les points de B.

Dans ces conditions, en tous les points de la frontière de B on aura

$$\delta = z - z_1 > 0.$$

Or, h étant choisi, on pourra entourer le point 0 d'un cercle assez petit tel qu'il y ait au moins un point à son intérieur, où

$$\delta = (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - h)\,x^2 + \varepsilon_2 xy + \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - h)\,y^2 < 0 \qquad (2)$$

La fonction δ aura donc également un minimum absolu à l'intérieur de B, et au point A, où ce minimum a lieu, on a

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2\geqq 0\,,\quad \frac{\partial\delta}{\partial x}=\frac{\partial\delta}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\geqq 0\,,\quad \frac{\partial^2\delta}{dy^2}\geqq 0\,;$$

d'où

$$rt-s^2=\left[h+\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right]\left[h+\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right]-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2=h^2+h\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\left[\frac{\partial^2\partial}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\geqq h^2>0$$

et

$$p^2+q^2=\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2=h^2(x^2+y^2)<N.$$

Mais, ces deux inégalités sont en contradiction avec nos hypothèses. Le lemme est donc démontré.

3. Nous pouvons passer à présent à la démonstration du théorème.

Théorème. *Une surfacc, représentée par la fonction $z=f(x, y)$, admetant des dérivées continues des deux premiers ordres, dont la courbure n'est ni positive ni identiquement nulle, ne peut rester pour toutes les valeurs de x, y comprise entre deux plans fixes $z=\pm h$.*

En effet, imaginons que notre surface reste comprise entre les plans $z=\pm h$. Nous pouvons admettre, en faisant un changement convenable de coordonnées, qu'on a à l'origine $p_0=0$, $q_0>0$, $r_0t_0-s_0^2<0$. Dans ces conditions, le plan tangent à la surface

$$z=f(x, y)$$

au point $x=y=0$ aura pour équation

$$z_1=q_0y,$$

il coupera cette surface suivant quatre branches distinctes qui déterminent dans le voisinage de l'origine quatre régions distinctes Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 du plan (x, y) telles que dans Ω_1, Ω_3 on a $\delta=z-z_1<0$, et dans Ω_2, Ω_4 on aura $\delta>0$. D'après le lemme (2) aucune de ces régions (prolongés jusqu'à la frontière $\delta=0$) ne peut être bornée.

D'autre part, les régions Ω_1 et Ω_3 du plan (x, y) sont nécessairement situées audessus de la droite $y=-\frac{h}{q_0}$, car l'hypothèse que $z>-h$ entraine $\delta=z-q_0y>0$, si $y\leqq-\frac{h}{q_0}$; et de même, les régions Ω_2 et Ω_4

seront situées audessous de la droite $y = \frac{h}{q_0}$ à cause de l'inégalité $z < h$. Je dis de plus que l'une au moins des régions Ω_1 et Ω_3 reste également au dessous de la droite $y = \frac{h}{q_0}$. En effet, les régions Ω_1 et Ω_3 ne peuvent pas avoir de points communs, car, si un tel point M existait, on pourrait le joindre à l'origine par deux lignes différentes, l'une appartenant à Ω_1 et l'autre à Ω_3; le contour fermé ainsi obtenu contiendrait alors à son intérieur l'une des régions Ω_2 ou Ω_4, ce qui est impossible, puisque ces régions ne sont pas bornées. Par conséquent, si les deux régions Ω_1 et Ω_3 contenaient des points sur la droite $y = \frac{h}{q_0}$, leurs frontières auraient également des points sur cette droite; mais cela n'est pas possible, car sur la frontière on a $\delta = z - q_0 y = 0$.

Nous arrivons donc à cette conclusion que l'une au moins des regions paires et l'une au moins des régions impaires se prolonge indéfiniment en restant constamment entre les deux droites $y = \pm \frac{h}{q_0}$. Il est essentiel de remarquer encore que l'une au moins de ces régions ne s'étend à l'infini que dans une seule direction. En effet, soient Ω_1 et Ω_2 les deux régions situées entre nos droites qui s'étendent à l'infini dans les deux sens; on pourra tracer dans chacune d'elles une ligne S_1 et S_2 respectivement qui se prolongeront à l'infini dans les deux directions, et puisque l'orgine est un point-frontière pour Ω_1 et Ω_2, elle sera située entre ces deux lignes, de sorte qu'il n'est pas possible qu'une troisième région s'étende à l'infini dans les deux sens. Or, les deux régions Ω_3 et Ω_4 devant être situées entre S_1 et S_2, elles seront à fortiori comprises entre les droites $y = \pm \frac{h}{q_0}$, et par conséquent elles ne s'étenderont à l'infini que dans une seule direction.

Ce point étant établi, nous pouvons donc admettre que la région Ω_1 entièrement comprise entre les droites $y = \pm \frac{h}{q_0}$ s'étend à l'infini dans la direction des x positifs seulement. Considérons alors une droite $x = x_0$ du plan des x, y; sur ses points contenus dans Ω_1 on a $\delta < 0$. Soit $u(x_0) = \delta(x_0, y_0) \leqq \delta(x_0, y)$ le minimum absolu de δ atteint en un des points considérés.

Examinons cette fonction $u(x)$ définie pour les valeurs croissantes de x. Nous remarquons que $u(x) < 0$, mais pour des valeurs suffisamment petites de x, $u(x)$ est aussi voisin de 0 que l'on veut; par conséquent, on peut fixer deux valeurs x_0, x_0', telles que $x_0 > x_0'$ et $u(x_0) - u(x'_0) < 0$.

Dans ces conditions, nous pouvons démontrer que pour $x_1 > x_0 > x_0'$ l'inégalité

$$|u(x_1)| \geqq \frac{x_1 - x_0'}{x^0 - x_0'}[u(x_0') - u(x_0)] \tag{3}$$

doit être vérifiée.

En effet, en tenant compte de ce que $u(x) < 0$, l'inégalité (3) est équivalente à

$$-u(x_1) \geqq \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'}[u(x_0') - u(x_0)];$$

Par conséquent si elle n'est pas remplie, on devra avoir

$$-\frac{x_0 - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + u(x_0) - u(x_0') < 0.$$

Ainsi la fonction

$$v(x, y) = -\frac{x - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + \delta(x, y) - u(x_0') \tag{4}$$

devient négative pour $x = x_0$, $y = y_0$; il existe donc une région B, où $v < 0$, et cette région est bornée, car $v \geqq 0$ pour $x = x_0'$, pour $x_0' < x < x_1$ avec $\delta = 0$, et pour $x = x_1$.

Or ceci est en contradiction avec le lemme (2), puisque

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 = rt - s^2 \leqq 0.$$

Donc, l'inégalité (3) doit être exacte. Mais, pour x_1 suffisamment grand cette inégalité deviendrait incompatible avec l'hypothèse $|z| < h$.

Le théorème est par conséquent démontré.

En utilisant le lemme (2) sous sa forme générale nous pouvons généraliser notre théorème de la façon suivante.

4. Généralisation. *Une surface représentée par la fonction $z = f(x, y)$ admettant des dérivées continues des deux dremiers ordres, dont la courbure est négative en un point déterminé, où l'inclinaison du plan tangent $p^2 + q^2 = q_0^2 < 0$, ne peut rester pour toutes les valeurs de x, y comprise entre deux plans fixes $z = \pm h$, si sa courbure ne devient positive* [1]) *qu'en des points, où $p^2 + q^2 > N > q_0^2$.*

En effet, tout le raisonnement de la démonstration précedente jusqu'à la discussion de la fonction $v(x, y)$, donnée par la formule (4), subsiste

---

[1]) Il suffirait par exemple, que la courbure ne soit jamais positive dans le voisinage des points, où $p = q = 0$, et que dans le voisinage d'un au moins de ces points la courbure devienne négative.

sans modification. Seulement nous ne pouvons plus affirmer l'impossibilité du fait que la région B, où $v<0$, soit bornée. Cette région pourrait être bornée, si elle contenait des points, où

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x_1 - x_0'} u(x_1) + p = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = q - q_0 = 0$$

avec $rt - s^2 > 0$. Or, en ces points on aurait, par hypothèse,

$$p^2 + q^2 = \left[\frac{u(x_1)}{x_1 - x_0'}\right]^2 + q_0{}^2 > N;$$

donc

$$|u(x_1)| > (x_1 - x_0') \sqrt{N - q_0{}^2} \tag{5}$$

Ainsi, au lieu de l'inégalité (3) on est amené à l'inégalité (5); mais cette dernière est également incompatible avec le fait $|z| < h$. Notre généralisation est, par conséquent démontrée.

Remarque. Il importe de remarquer que les fonctions que nous venons de considérer et au sujet desquelles nous venons de démontrer l'impossibilité de l'inégalité $|z| < h$, peuvent parfaitement satisfaire à la condition $z < h$. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la surface représentée par la fonction

$$z = h - e^{x - y^2}$$

On vérifie immédiatement que

$$rt - s^2 = -2e^{2x - 2y^2} < 0,$$

pour toute valeur de x et y, et en même temps on a bien

$$z < h.$$

Observons aussi que notre théorème cesserait d'être vrai pour les surfaces dont la courbure serait identiquement nulle, puisque la surface cylindrique $z = e^{-x^2}$ satisfait à la condition $|z| < 1$.

5. Théorème. *Si une fonction z admettant des dérivées continues des deux premiers ordres et satisfaisant à l'équation*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0, \qquad (AC - B^2 > 0)$$

où A, B, C sont des fonctions finies quelconques de x, y, z, p, q, r, s, t, est bornée, elle est constante.

En effet, posons $rt - s^2 = \lambda$. Notre équation deviendra

$$Ar + 2Bs + C\frac{s^2 + \lambda}{r} = 0;$$

il en résulte que $\lambda \leqq 0$, et d'ailleurs, l'égalité $\lambda = 0$ entraine $r = s = t = 0$. Par conséquent, si on n'avait jamais $\lambda < 0$, cela prouverait que p et q sont des constantes qui doivent être nulles, si z qui se réduit à un plan reste bornée; z serait donc une constante. Mais, en vertu du théorème précédent, si l'inégalité $\lambda < 0$ a lieu au moins en un point, la fonction z ne peut pas être bornée.

Le théorème que nous venons de démontrer est la généralisation du théorème de Liouville que j'ai énoncée il y a quatre ans.

Nous allons déduire de ce théorème une proposition relative aux surfaces minima.

6. Théorème. *Si une surface minima S est représentée par l'équation*

$$z = f(x, y),$$

où f admet des dérivées continues des deux premiers ordres pour toute valeur réelle de (x, y), *la surface S se réduit à un plan.*

En effet, formons l'équation différentielle, à laquelle satisfait $u = \operatorname{arctg} p$, en supposant que

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0. \tag{6}$$

En différentiant [1]) par rapport à x l'équation (6), on a

$$(1 + q^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2p (rt - s^2) = 0$$

où, en éliminant t,

$$(1 + q^2) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2pr^2}{1+p^2}\right) - 2pq \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{2prs}{1+p^2}\right) + (1 + p^2) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{2ps^2}{1+p^2}\right) = 0.$$

Or, on a manifestement,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}}{1 + p^2} - \frac{2pr^2}{(1+p^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}}{1 + p^2} - \frac{2psr}{(1+p^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}}{1+p^2} - \frac{2ps^2}{(1+p^2)^2}.$$

---

[1]) Ici nous admettons l'existence des derivées troisièmes; mais cela résulte du fais que l'existenee des dérivées secondes entraine même l'analyticité de la fonction (on consultera à ce sujet mes travaux sur le problème de Dirichlet: Mathem. Ann. t. 69 p. 132 et Ann. de l'Ec. Normale, t. 29, p. 482).

Donc, u satisfait à l'équation

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2pq\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+(1+p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,,$$

et, par conséquent, $u=\operatorname{arctg} p$ ne peut pas être borné dans tout le plan, sans se réduire à une constante. Or, d'après notre hypothèse, p ne devient infini pour aucunes valeurs finies de (x, y); donc, pour toute valeur finie de (x, y), on a $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que u est constant. On reconnait ainsi que p et q sont des constantes, et, par conséquent, la surface z est un plan.