Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія

$X^3\varrho + Y^3 = 1$.

(Окончаніе).

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ замѣткѣ «Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $X\varrho^3 + Y^3 = 1$» было указано на затрудненіе, встрѣтившееся при вычисленіи четныхъ показателей m, при которыхъ $(a\sqrt[3]{(\varrho)^2} + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^m$ имѣетъ видъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$' отъ насъ почему-то ускользнуло доказательство слѣдующей теоремы:

Теорема. «*Квадратъ единицы не можетъ быть вида* $B\sqrt[3]{\varrho} + C$» хотя доказательство ея и не представляетъ затрудненія. Послѣ этой теоремы становится, конечно, ненужной теорема IV упомянутой замѣтки, а также и основанный на ней способъ вычисленія четныхъ m, при ϱ простомъ, помѣщенный въ самомъ концѣ упомянутой замѣтки, и мы получаемъ возможность вычислить всѣ рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$, при произвольномъ ϱ.

Такимъ образомъ наша задача оказывается законченной.

Доказательство. Пусть $M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$ единица, и ея квадратъ вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, тогда

$$M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1 \tag{1}$$

и

$$P^2 + 2MQ = 0 \tag{2}$$

Покажемъ что уравненія (1) и (2) несовмѣстимы ни въ какихъ цѣлыхъ числахъ M, P, Q и ϱ. Изъ (2) слѣдуетъ или 1) $Q = \gamma^2$, $M = -2\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$; или 2) $Q = -\gamma^2$, $M = 2\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$; или 3) $Q = 2\gamma^2$, $M = -\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$; или 4) $Q = -2\gamma^2$, $M = \alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$, подставивъ это въ (1) получимъ

или $$-\gamma t^2 \pm 20t\gamma^3 + \gamma^6 = +1 \tag{3}$$

или $$-\gamma t^2 \pm 20t\gamma^3 + \gamma^6 = -1 \tag{4}$$

или $$t^2 \pm 20t\gamma^3 - 8\gamma^6 = +1 \tag{5}$$

или $$t^2 \pm 20t\gamma^3 - 8\gamma^6 = -1 \tag{6}$$

если обозначимъ $\varrho\alpha^3$ черезъ t.

Найдемъ t изъ уравненія (3) $t = \dfrac{\pm 20\gamma^3 \pm \sqrt{400\gamma^6 + 32\gamma^6 - 32}}{16}$ слѣдовательно $27\gamma^6 - 2$ полный квадратъ. напримѣръ z^2 т. е. $z^2 + 2 = \sigma^3$, гдѣ $\sigma = 3\gamma^2$; разложимъ $z^2 + 2$ на множители $(z + \sqrt{-2})(z - \sqrt{-2}) = \sigma^3$;

$(z+\sqrt{-2})$ и $(z-\sqrt{-2})$ не могутъ имѣть общимъ дѣлителемъ число взаимно простое съ 2, но σ нечетное число, слѣдоват. эти числа взаимно простыя, и слѣд. какъ $z+\sqrt{-2}$, такъ и $z-\sqrt{-2}$ въ области $\Omega\sqrt{-2}$ кубы цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ, т. к. въ этой области только одинъ классъ главныхъ идеаловъ, и единицы только $+1$ и -1; пусть $z+\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})^3=p^3+3p^2q\sqrt{-2}-6pq^2-2q^3\sqrt{-2}$, т. е. $3p^2q-2q^3=q(3p^2-2q^2)=1$, т. е. $q=\pm 1$, и слѣд. $3p^2-2=\pm 1$, т. е. $p=\pm 1$, слѣд., $z=p^3-6pq^2=p(p^2-6q^2)=\pm 5$, откуда $\gamma=\pm 1$, и слѣд. $t=\dfrac{\pm 20\pm 20}{16}=0$ или $\pm\dfrac{5}{2}$, но если $t=0$, то $\alpha=0$, т. е. $M=0$, $P=0$, чего быть не можетъ; слѣд. уравненіе (3) невозможно.

Найдя t изъ уравненія (4), мы получимъ аналогично, что $27\gamma^6+2$ полный квадратъ, т. е. $z^2-2=27\gamma^6$, что невозможно, т. к. сравненіи $z^2-2\equiv 0$ (мод. 3) невозможно.

Уравненіе (5) перепишемъ иначе такъ:

$$u^2-4.27\gamma^6=1,$$

или если положимъ $t\pm 10\gamma^3=u$

$$\frac{(u-1)}{2}\cdot\frac{(u+1)}{2}=\sigma^3 \tag{7}$$

гдѣ $\sigma=3\gamma^2$.

u нечетное, слѣд. $\dfrac{u-1}{2}$ и $\dfrac{u+1}{2}$ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, оба они по (7) должны быть кубами, слѣд. одно изъ нихъ 0, откуда $\sigma=0$, т. е. $\gamma=0$, что невозможно.

Уравненіе (6), наконецъ, аналогично приводитъ къ $u^2+1=4.27.\gamma^6$, что невозможно, т. к. невозможно сравненіе $u^2+1\equiv 0$ (мод. 4),

Такимъ образомъ всѣ 4 уравненія (3), (4), (5) и (6), къ которымъ приводятъ (1) и (2), невозможны, а слѣд. (1) и (2) несовмѣстимы.

Ч. и т. д.

Пусть задано уравненіе $X^3\varrho+Y^3=1$. Для того чтобы найти всѣ его рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ, надо вычислить основную единицу $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$, напр. способомъ Вороного; если она вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+C$, рѣшеній нѣтъ; если она вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$, то рѣшеніе только одно $X=B$, $Y=C$; если она трехчленная, то рѣшенія могутъ быть только среди ея степеней $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$ съ простыми показателями $q\neq 2$ и 3, дѣлителями $ab\varrho$, которыхъ и надо испробовать; при этомъ можно воспользоваться еще слѣдующими замѣчаніями:

1) если q дѣлитель b, то q вида $3\gamma+2$
2) если q дѣлитель a, то q вида $3\gamma+1$
3) если $q>5$ и дѣлитель ϱ, то

$$\frac{q(q-1)}{2} b^2 c^{q-2} + qac^{q-1} \equiv 0 \quad (\text{мод. } q^2)$$

$$(q-1) b^2 c^{q-1} + 2ac^q \equiv 0 \quad (\text{мод. } q)$$

откуда
$$b^2 - 2ac \equiv 0 \quad (\text{мод. } q) \tag{8}$$

Пусть, напримѣръ, $\varrho = 23$. Основная единица $6230(\sqrt[3]{\varrho})^2 - 3160\sqrt[3]{\varrho} - 41399$, т. е. $a = 6230 = 2.5.7.89$, $b = 3160 = 2.2.2.5 \cdot 79$; единственный простой дѣлитель a вида $3\gamma + 1$ есть 7, но $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^7$ не имѣетъ вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, въ чемъ можно убѣдиться уже (мод. 49); единственный простой дѣлитель b вида $3.\gamma + 2$, есть 5, но $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^5$ не имѣетъ вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$; сравненіе (8) не удовлетворяется; такимъ образомъ уравненіе $23X^3 + Y^3 = 1$ рѣшеній не имѣетъ. Совершенно аналогично мы обслѣдовали уравненіе $X^3\varrho + Y^3 = 1$ для $\varrho = 2$, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 35, 36, 37, 39, 45, 58, 60, 61, 63, 65, 67, 68, 70. Во всѣхъ случаяхъ оказалось, что, если основная единица трехчленная, рѣшеній нѣтъ.

Основная же единица имѣетъ видъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$ у слѣдующихъ изъ этихъ ϱ, вотъ соотвѣтственные X, Y,

$\varrho = 2$	7	9	17	19	20	26	28	37	43	63	65
$B = X = 1$	-1	1	-7	3	7	-1	1	-3	2	-1	1
$C = Y = -1$	2	-2	18	-8	-19	3	-3	10	-7	4	-4

Хотя мы и дали исчерпывающее рѣшеніе уравненій $X^3\varrho + Y^3 = 1$, однако въ заключеніе отмѣтимъ слѣдующее. Можно подозрѣвать, что существуетъ слѣдующая простая и изящная теорема: «уравненіе $X^3\varrho + Y^3 = 1$ не имѣетъ ни одного рѣшенія, если основная единица $a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c$ не имѣетъ вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, и одно $X = B$, $Y = C$, если она имѣетъ видъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$». Для этого достаточно было бы показать, что никакая степень трехчленной единицы не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$. Мы уже доказали это для второй степени (въ настоящей замѣткѣ), для куба (т. III предыдущей замѣтки); для того чтобы доказать то же относительно пятой степени, пришлось бы показать несовмѣстимость ни въ какихъ цѣлыхъ числахъ M, P, Q и ϱ уравненій $M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1$ и $5M^4Q\varrho^2 + 10M^3P^2\varrho^2 + 30M^2PQ^2\varrho + 20MP^3Q\varrho + 5MQ^4 + P^5\varrho + 10P^2Q^3 = 0$, что уже очень сложно, и мы не видимъ, какимъ бы способомъ это можно было сдѣлать.

16/VIII—1915.