# Quelques remarques sur l'interpolation.

**_Par Serge Bernstein._**

---

1. On doit à M. Runge [1]) la démonstration du théorème fondamental suivant:

*Soit $f(x)$ une fonction analytique régulière sur le segment $AB$ de l'axe réel; le polynome de Lagrange $P_n(x)$ de degré $n$, qui se confond avec $f(x)$ en $n+1$ points* (nœuds) *divisant le segment $AB$ en $n$ intervalles égaux, tend nécessairement, pour $n$ très grand, vers la fonction $f(x)$ sur une partie $A'B'$ de $AB$, mais, en général, près des extrémités $A$ et $B$ il ne tend vers aucune limite.*

La méthode de M. Runge ne parait pas applicable aux fonctions non-analytiques, cependant elle rend vraisemblable qu'en général dans ce cas, les polynomes de Lagrange (Newton) ne tendront vers la fonction sur aucune partie du segment $AB$. Cette conclusion n'est pas tout à fait exacte, et la discussion de cette question va nous donner un exemple de l'application des principes indiqués dans mon mémoire [2]) «Sur les propriétés des fonctions analytiques réelles».

Nous pouvons d'abord établir la proposition suivante:

*Soient $P_{n_0-1}(x)$, $P_{n_1-1}(x)$ $\ldots$, $P_{n_k-1}(x)$, $\ldots$ des polynomes de Lagrange de la fonction $f(x)$ sur le segment $AB$, correspondant respectivement à $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ nœuds équidistants; soient, de plus, $P_{n_0}(x, \alpha)$, $P_{n_1}(x, \alpha)$, $\ldots$, $P_{n_k}(x, \alpha)$, $\ldots$ les polynomes de Lagrange qu'on obtient en ajoutant aux nœuds équidistants encore un seul nœud arbitraire $\alpha$ du segment $AB$; si tous les polynomes $P_{n_k-1}(x)$ et $P_{n_k}(x, \alpha)$ restent bornés sur le segment $AB$, la fonction $f(x)$ est analytique à l'intérieur de $AB$, quand le rapport $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ est borné, elle est quasi-analytique* [3]) *quand le rapport $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ n'est pas borné.*

---

[1]) Zeitschrift für Math. und Physik, t. XLVI, 1902.

[2]) Mathem. Ann., t. LXXV, 1914.

[3]) On trouvera la définition des fonctions quasi-analytiques dans mon mémoire cité.

En effet, pour fixer les idées, réduisons le segment $AB$ à 01. On aura alors évidemment

$$P_{n_k}(x, \alpha) - P_{n_k-1}(x) = \frac{(f(\alpha) - P_{n_k-1}(\alpha))x(x-b_1)\ldots(x-b_{n_k-1})}{\alpha(\alpha-b_1)\ldots(\alpha-b_{n_k-1})},$$

où $b_i = \frac{i}{n_{k-1}}$. Cette différence étant bornée et par exemple de valeur absolue moindre que un sur le segment $AB$, on a

$$|f(\alpha) - P_{n_k-1}(\alpha)| < \frac{\left|\alpha\left(\alpha - \frac{1}{n_k - 1}\right)\cdots(\alpha - 1)\right|}{\left[\frac{1}{2(n_k-1)}\right]^2 \cdot \frac{3}{2(n_k-1)} \cdots \frac{(2n_k-3)}{2(n_k-1)}},$$

ou bien, en supposant $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| < \frac{\lambda}{2(n_k-1)} = c < \frac{1}{2}$ ($n_k - \lambda$ étant un entier pair),

$$|f(\alpha) - P_{n_k-1}(\alpha)| < \frac{1.3\ldots(n_k+\lambda-1).1.3\ldots(n_k-\lambda-1)}{1.3\ldots(2n_k-3)}$$

$$= \frac{1.3\ldots(n_k-\lambda-1)}{(n_k+\lambda+1)\ldots(2n_k-3)}$$

$$< \left(\frac{n_k-\lambda}{3n_k+\lambda-2}\right)^{\frac{n_k-\lambda}{2}} = \left[\frac{1}{1+\frac{2n_k+2\lambda-2}{n_k-\lambda}}\right]^{\frac{n_k-\lambda}{2}}$$

$$< \left(\frac{1}{1+\frac{1+2c}{\frac{1}{2}-c}}\right)^{\left(\frac{1}{2}-c\right)(n_k-1)} = \varrho^{n_k-1},$$

où $\varrho = \left(\frac{1-2c}{3+2c}\right)^{\frac{1}{2}-c} < 1$. Pour achever la démonstration il suffit de se rapporter aux définitions du mémoire cité [1]).

2. Il est naturel de se demander à présent, si l'introduction des polynomes $P_{n_k}(x, \alpha)$ dans l'énoncé du théorème est vraiment essentielle. Pour répondre à cette question, nous allons établir un lemme préliminaire [2]):

---

[1]) Voir le théorème 29 de mon Mémoire «О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй и т. д.».

[2]) On a évidemment une proposition analogue (mutatis mutandis) pour les fonctions quasi-analytiques.

*Si $f(x)$ est une fonction continue sur* 01, *analytique sur une partie* $\left(\frac{1}{2}-c, \frac{1}{2}+c\right)$ *de ce segment, les polynomes interpolateurs $P_{n_k}(x)$ correspondant à $(n_k+1)$ nœuds équidistants, fournissent dans un intervalle fixe, assez petit $\left(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right)$ une approximation égale à $\rho^{n_k}$, où $\rho<1$.*

On reconnait facilement qu'il existe des polynomes $R_{n_k}(x)$ de degré $n_k$, tels que sur tout le segment 01 on ait $|f(x)-R_{n_k}(x)|<\varepsilon_{n_k}$, $\varepsilon_{n_k}$ tendant vers 0 avec $\frac{1}{n_k}$ et de plus dans un intervalle $\left(\frac{1}{2}-c', \frac{1}{2}+c'\right)$, où $c'<c$; $|f(x)-R_{n_k}(x)|<\rho_1^{n_k}$ avec $\rho_1<1$.

Par conséquent, si $P_{n_k}(x)$ est le polynome interpolateur en question, on a

$$P_{n_k}(x)-R_{n_k}(x)=S(x)\sum_{i=0}^{i=n_k}\frac{A}{\left(x-\frac{i}{n_k}\right)S'\left(\frac{i}{n_k}\right)},$$

où $S(x)=x\left(x-\frac{1}{n_k}\right)\cdots\left(x-\frac{n_k}{n_k}\right)$, $|A_i|<\varepsilon_{n_k}$ et de plus $|A_i|<\rho_1^{n_k}$ lorsque $\left|\frac{1}{2}-\frac{i}{n_k}\right|<c'$. Or, posons $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta=\frac{\lambda}{2n_k}<c'$ ($n_k-\lambda$ étant un entier impair); dans ces conditions

$$H_i=\left|\frac{S(x)}{\left(x-\frac{i}{n_k}\right)S'\left(\frac{i}{n_k}\right)}\right|<\frac{1.3\ldots(n_k+\lambda).3\ldots(n_k-\lambda)}{i!\,(n_k-i)!\,2^{n_k}}$$

$$=\frac{(n_k+\lambda)!\,(n_k-\lambda)!}{i!(n_k-i)!\left(\frac{n_k+\lambda-1}{2}\right)!\left(\frac{n_k-\lambda-1}{2}\right)!\,2^{2n_k-1}}$$

$$<n_k\frac{\left(\frac{n_k+\lambda}{2}\right)^{\frac{n_k+\lambda}{2}}\left(\frac{n_k-\lambda}{2}\right)^{\frac{n_k-\lambda}{2}}}{i^i(n_k-i)^{n_k-i}}=n_k\left[\frac{(n_k+\lambda)^{n_k+\lambda}(n_k-\lambda)^{n_k-\lambda}}{(n_k+h)^{n_k+h}(n_k-h)^{n_k-h}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

si $\left|\frac{1}{2}-\frac{i}{n_k}\right|=\frac{h}{2n_k}$. Donc, pour $\frac{h}{2n_k}\geqq c'$,

$$\frac{H_i}{n_k}<\left[\frac{(1+2\delta)^{1+2\delta}(1-2\delta)^{1-2\delta}}{(1+2c')^{1+2c'}(1-2c')^{1-2c'}}\right]^{\frac{n_k}{2}},$$

et, pour toute valeur $i$,

$$\frac{H_i}{n_k} < \left[(1+2\delta)^{1+2\delta}(1-2\delta)^{1-2\delta}\right]^{\frac{n_k}{2}}.$$

Faisons ensuite $\delta$ assez petit pour avoir

$$\varrho_1\left[(1+2\delta)^{1+2\delta}(1-2\delta)^{1-2\delta}\right]^{\frac{1}{2}} < \varrho' < 1,$$

$$\left[\frac{(1+2\delta)^{1+2\delta}(1-2\delta)^{1-2\delta}}{(1+2c')^{1+2c'}(1-2c')^{1-2c'}}\right]^{\frac{1}{2}} < \varrho'.$$

Par conséquent, dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right)$ on a

$$|P_{n_k}(x) - f(x)| < (n_k^2 + n_k)\varrho'^{n_k} + \varrho_1^n < \varrho^n, \qquad (\varrho < 1)$$

c. q. f. d.

Il résulte de ce lemme que si nous construisons *une fonction $f(x)$ pour la quelle les polynomes considérés $P_n(x)$ de Lagrange tendent vers $f(x)$, sans fournir une approximation de l'ordre $\varrho^n$ $(\varrho < 1)$ près du milieu du segment, la fonction $f(x)$ ne sera pas analytique (ni quasi-analytique)* au milieu du segment. Or, il n'est pas difficile de construire une telle fonction. A cet effet, posons

$$S_n(x) = x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{n}{n}\right),$$

$$Q_n(x) = \frac{(4e)^n}{n^3} S_n(x) \,.\, x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}.$$

et

(1) $$f(x) = Q_2(x) + Q_4(x) + Q_8(x) + \cdots.$$

Il est clair que les polynomes

$$Q_2(x),\ Q_2(x)+Q_4(x),\ Q_2(x)+Q_4(x)+Q_8(x) \text{ etc.}$$

seront les polynomes interpolateurs de Lagrange, correspondant à la subdivision successive du segment 0 1 en 4, 8, 16 etc. parties égales. Il suffit de montrer que la série (1) converge sur tout le segment 0 1, sans satisfaire à la condition du lemme. Or,

$$|S_n(x)| < 2\pi n e^{-n}\left[x^x(1-x)^{1-x}\right]^n x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$|Q_n(x)| < \frac{2^{2n+1}\pi}{n^2}\left[x^{x+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}-x}\right]^{n-1}.$$

Mais $x^{x+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}-x}$ atteint son maximum pour $x=\frac{1}{2}$, puisqu'en posant $2x-1=y$, on a

$$\log\left[x^{x+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}-x}\right]=\left(1+\frac{y}{2}\right)\log(1+y)+\left(1-\frac{y}{2}\right)\log(1-y)-2\log 2$$

$$=-2\log 2-\frac{y^4}{6}-\frac{2y^6}{15}-\ldots-\frac{(n-1)y^{2n}}{n(2n-1)}\ldots,$$

ce qui prouve que le maximum est atteint pour $y=0$.

Par conséquent, $|Q_n(x)|<\frac{8\pi}{n^2}$, et la série $f(x)$ est absolument et uniformément convergente sur tout le segment $(0\,1$. D'autre part, pour $x=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}$

$$|Q_n(x)+Q_{2n}(x)+Q_{4n}(x)+\ldots|=|Q_n(x)|>\frac{k}{n^3}$$

où $k$ est un nombre positif qui ne tend pas vers 0. Donc, pour $x=\frac{1}{2}$, la fonction $f(x)$ n'est pas analytique.

On voit ainsi que la restriction que nous avons dùe introduire dans l'énoncé du théorème (1) est vraiment essentielle.

Il serait intéressant d'étudier ces fonctions qu'on pourrait appeler *newtoniennes* à cause de la convergence de l'interpolation entre coordonnées équidistantes qui les rapproche des fonctions analytiques ou *tayloriennes*.

3. Sans nous arrêter plus longtemps sur les conditions de convergence de la formule d'interpolation entre coordonnées èquidistantes, bornons nous à la considération d'un exemple tout à fait élémentaire de *divergence en tout intervalle du segment considéré*. C'est le cas de la fonction $|x|$ sur un segment $(-h,+h)$. Prenons, par exemple, le segment $(-1,+1)$. Construisons le polynome de Newton $P_{2n}(x)$ de degré $2n$. On aura, évidemment,

$$(2)\quad P_{2n}(x)=1+\frac{-\frac{1}{n}(x+1)}{\frac{1}{n}}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\Delta_{n+i}(x+1)\ldots x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{i-1}{n}\right)}{(n+i)!\left(\frac{1}{n}\right)^{n+i}},$$

où $\Delta_{n+i}$ est la différence d'ordre $(n+i)$ de $|x|$; pour $x=-1$, les accroissements finis étant égaux à $\frac{1}{n}$. Donc, d'après la formule connue pour le calcul des différences successives, on a

$$\Delta_{n+i} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}(n+i) + \frac{i-2}{n}\frac{(n+i)(n+i-1)}{2} - \dots$$

$$= 2\left[\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}(n+i)\dots\right]$$

et, après quelques transformations élémentaires,

$$\Delta_{n+i} = (-1)^{i-1}\frac{2.(n+i-2)!}{(i-1)!n!}.$$

Par conséquent,

$$P_{n}(x) = -x + 2\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(-1)^{i-1}n^{n+i}}{(n+i)(n+i-1).n!(i-1)!}.(x+1)\dots x\left(x-\frac{1}{n}\right)\dots\left(x-\frac{i-1}{n}\right).$$

A cause de la symmétrie de $|x|$ nous pouvons nous borner à considérer les valeurs négatives de $x$ et nous remarquons alors que tous les termes sous la somme sont de même signe. Donc, pour reconnaitre que $|P_{2n}(x)|$ croît au dela de toute limite dans tout intervalle, il suffit de constater que le seul terme

$$I_n(x) = \frac{2n^{2n}(x+1)\dots x\left(x-\frac{1}{n}\right)\dots\left(x-\frac{n-1}{n}\right)}{2n(2n-1)\,n!\,(n-1)!}$$

croît indéfiniment avec $n$. Or, en posant $x = -\frac{\lambda}{n} - \frac{1}{2n}$, on a

$$|I_n(x)| = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(n-\lambda-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(n+\lambda-\frac{1}{2}\right)}{(2n-1).(n!)^2}$$

$$> \frac{(n-\lambda-1)!\,(n+\lambda-1)!}{8n.(n!)^2} > \frac{e^{\frac{\lambda^2}{n}}}{8n^3}$$

ou bien

$$|I_n(x)| > \frac{e^{nx^2}}{8n^3}$$

ce qui démontre notre assertion.

4. On doit également à M. Runge la remarque importante qui si l'on condense convenablement les nœuds près des extrémités du segment, l'interpolation converge sur tout le segment pour toutes les fonctions analytiques.

Pour des fonctions quelconques le problème de la convergence peut être abordé comme il suit: soit $f(x)$ la fonction donnée et $P_n(x)$ son polynome d'approximation de degré $n$ sur le segment considéré: on a

$$E_n = \mathrm{Max}\, | f(x) - P_n(x) |.$$

Si $R_n(x)$ est le polynome de Lagrange, correspondant aux nœuds $a_0, a_1, \ldots, a_n$, et $A_{n+1}(x) = (x - a_0)\ldots(x - a_n)$, on aura

$$R_n(x) = A_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(a_i) - P(a_i)}{(x-a)\, A'_{n+1}(a_i)} + P_n(x).$$

Donc,

$$| f(x) - R_n(x) | < E_n \sum_{i=0}^{i=n} \left| \frac{A_{n+1}(x)}{(x-a_i) A'_{n+1}(a_i)} \right| + E_n.$$

Il s'agit de déterminer le polynome $A_{n+1}(x)$, pour lequel

$$\sum_{i=0}^{i=n} \left| \frac{A_{n+1}(x)}{(x-a_i)\, A'_{n+1}(a_i)} \right|$$

soit aussi petit que possible pour toute valeur de $x$ sur le segment considéré. Sans résoudre la question, nous remarquerons que *ce minimum est de l'ordre de* $\log n$ et que, en particulier, *cette somme est de l'ordre de* $\log n$ *pour* $A_{n+1}(x) = \cos\,(n+1) \arccos x$.

On a donc

$$| f(x) - R_n(x) | < k E_n \log n,$$

où $k$ est une constante fixe, si $A_{n+1}(x) = \cos\,(n+1)\, arc \cos x$.

Pour la démonstration on pourra consulter [1]) les pages 54—56 de mon Mémoire «Sur l'ordre de la meilleure approximation etc.» (Publié par l'Académie de Belgique, t. IV, 1912).

Remarquons ainsi qu'il *est possible de distribuer les nœuds de la sorte que l'interpolation converge pour toute fonction satisfaisant à une condition de Dini-Lipschitz, mais il n'est pas possible de donner une distribution valable pour l'ensemble de toutes les fonctions continues.*

5. Examinons encore la question de la convergence des polynomes de Lagrange *à l'extérieur* des points d'interpolation ou, en d'autres termes, la question de *l'extrapolation.*

Il est toujours possible de prolonger la fonction $f(x)$ à l'extérieur du segment $(-1, +1)$ et de supposer que $f(x) - P_n(x) = \varepsilon_n(x)$ tend encore

---

[1]) Voir aussi D. Jackson, «On the accuracy of trigonometric interpolation». Transactions of the American Mathematical Society 1913.

vers 0 sur une partie extérieure à ce segment. Pour que l'extrapolation soit possible, c'est-à-dire, en conservant les notations du § précédent, pour que $f(x) - R_n(x)$ tende vers 0 à l'extérieur du segment $(-1, +1)$ il sera nécessaire et suffisant que

$$B_n(x) = A_{n+1}(x) \sum \frac{\varepsilon_n(a_i)}{(x-a)A'_{n+1}(a_i)}$$

tende vers 0 à l'extérieur du segment. Pour être dans les conditions les plus favorables d'extrapolation, il faudra déterminer le polynome $A_{n+1}(x)$ par la condition suivante: il faut choisir *les racines* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *de* $A_{n+1}(x)$ *par la condition que si on considère tous les polynomes* $H_n(x)$ *pour lesquels* $|H_n(a_i)| \leqq 1$, *la plus grande valeur* $M$ *qu'ils peuvent atteindre en un point extérieur* $x$ *soit aussi petite que possible*. Il est aisé de voir qu'on *devra prendre* $A_{n+1}(x) = \sqrt{1-x^2}.\ \sin n \arccos x$.

En effet, les points $a_i$ étant donnés, on voit que le polynome $H_n(x)$ qui en un point extérieur $x$ prend la plus grande valeur $M$ sera donné par l'expression

$$H_n(x) = A_{n+1}(x) \sum \frac{(-1)^i}{(x-a_i)A'_{n+1}(a_i)} \tag{3}$$

Par conséquent, si $A_{n+1}(x) = \sqrt{1-x^2}.\ \sin n \arccos x$, on aura

$$H_n(x) = \cos n \arccos x;$$

donc, en des points $a_i$ de $(-1, +1)$ différents des racines de

$$\sqrt{1-x^2}.\ \sin n \arccos x = 0.$$

$|H_n(a_i)|$ resterait inférieur à 1, de sorte que le polynome (3) relatif à ces points $a_i$ conduirait au point $x$ à une valeur supérieure à $M$.

Les nœuds étant ainsi choisis, on a, par conséquent,

$$|B_n(x)| \leqq \frac{E_n}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right],$$

si $|f(x) - P_n(x)| \leqq E_n$ sur $(-1, +1)$.

Donc, *pour qu'une fonction* $f(x)$ *soit extrapolable à l'extérieur de* $(-1, +1)$, *quelque soit* $n$, *il suffit qu'elle soit analytique; pour qu'elle soit extrapolable pour une infinité de valeurs de* $n$, *il suffit qu'elle soit quasi-analytique*. Naturellement, pour ces fonctions, l'extrapolation pourrait se faire également avec d'autres nœuds [1]), et *on retrouverait nécessairement la même fonction, à cause de l'unicité du prolongement analytique et quasi-analytique* [2]).

---

[1]) Les nœuds indiqués auraient seulement l'avantage de fournir une extrapolation dans des points de l'axe réel aussi éloignés que possible.

[2]) D'après mon mémoire «Sur les propriétés des fonctions analytiques réelles».

6. Mais il est intéressant de rechercher, s'il existe d'autres fonctions extrapolables que les fonctions analytiques et quasi-analytiques. On a, à cet égard, une première proposition que voici:

*Si les polynomes interpolateurs de Lagrange* $R_{n_0}(x), R_{n_1}(x), \ldots, R_{n_k}(x)$ *de la fonction* $f(x)$ *relatifs respectivement à des nœuds*

$$(a_0^0, a_1^0, \ldots, a_{n_0}^0), (a_0^1, a_1^1, \ldots, a_{n_1}^1) \text{ etc.}$$

*du segment* $(-1, +1)$, *restent bornés dans une certaine partie extérieure au segment; s'il en est de même des polynomes* $R'_{n_k}(x, \alpha)$ *qu'on obtient en ajoutant un nœud arbitraire* $\alpha$ *du segment* $(-1, +1)$, *la fonction* $f(x)$ *se prolonge analytiquement ou quasi-analytiquement dans cette partie extérieure suivant que* $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ *reste borné ou non.*

En effet,

$$R_{n_k}(x, \alpha) - R_{n_k}(x) = (f(\alpha) - R_{n_k}(\alpha)) \frac{(x - a_0^{(k)})(x - a_1^{(k)}) \ldots (x - a_{n_k}^{(k)})}{(\alpha - a_0^{(k)})(\alpha - a_1^{(k)}) \ldots (\alpha - a_{n_k}^{(k)})}.$$

Par conséquent, en supposant, pour fixer les idées, $x > 1$, on a

$$|f(\alpha) - R_{n_k}(\alpha)| < \varrho^{n_k},$$

si l'on prend $\frac{1-\alpha}{x-1} \leqq \varrho$ et $\frac{2}{x+1} \leqq \varrho$; donc $f(\alpha)$ est analytique dans le voisinage de $x = 1$.

Ici, comme dans le cas de l'interpolation équidistante, nous sommes amenés à introduire les polynomes $R_{n_k}(x, \alpha)$, si nous voulons retrouver les fonctions analytiques. En rejetant ces polynomes $R_k(x, \alpha)$ additionnels nous nous trouvons devant la question suivante: *quelles sont les fonctions* $f(x)$ *jouissant de la propriété de pouvoir être indéfiniment approchées sur un segment ABC par des polynomes* $P_n(x)$ *de degré* $n$ *qui se confondent en* $(n+1)$ *points de l'intervalle AB du segment ABC avec la fonction* $f(x)$.

Les fonctions analytiques, nous l'avons vu, jouissent de cette propriété (pourvu que la partie $BC$ ne soit trop grande); de plus, cette propriété disparait, en général, si la fonction n'est pas analytique ou admet une singularité au point $B$. Il est certain néanmoins que cette propriété peut se rencontrer chez certaines fonctions non-analytiques qui forment ainsi une nouvelle classe de fonctions qu'on pourrait appeler *extrapolables*. En voici un exemple. Soit une série convergente pour $|x| \leqq 1$

$$f(x) = \sum A_n S_n(x)$$

où $S_n(x) = \frac{\sin 2^n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ ($A_n$ sont des constantes). La somme $\sum_0^n A_n S_n(x)$ est un polynome de degré $2^n - 1$ qui se confond avec $f(x)$ en $2^n$ points:

$$\cos\frac{k\pi}{2^{n+1}},\quad \cos\frac{(k+1)\pi}{2^{n+1}},\ \ldots,\ \cos\frac{k+2^n-1}{2^{n+1}}\pi$$

qui, par un choix convenable de $k$, peuvent toujours être placés dans un intervalle arbitraire de longueur 1 du segment $(-1, +1)$. Parmi les exemples des fonctions extrapolables nous pourrions indiquer aussi la fonction de Weierstrass [1]) sans dérivées. Mais il sera impossible, en général, de faire tendre vers 0 la partie du segment où se trouvent tous les nœuds donnés. En effet, si le polynome de Lagrange de degré donné $n_k$ tendait dans ce cas vers un polynome limite, ce serait nécessairement le polynome de Taylor, et la fonction serait analytique [2]) (si les degrés de ces polynomes $n_k$ sont tels que $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ reste borné), ou tout au moins indéfiniment dérivable et développable en série de Taylor, dont la sommation pourrait être faite par grouppement de termes (si $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ n'est pas borné).

7. Abordons, enfin, une question connexe aux précédentes, celle du calcul approché des *intégrales définies*. Les géomètres qni se sont occupés de cette question supposent, en général, *analytique* la fonction sous l'intégrale, et c'est en partant de cette hypothèse et en faisant intervenir les dérivées successives qu'ils obtiennent des bornes supérieures de l'erreur commise. Or, on peut dans la méthode de Gauss et ses diverses généralisations rejeter cette restriction et obtenir très simplement une borne supérieure de l'erreur qui même pour les fonctions analytiques sera, en général, plus précise que la borne qu'on obtient en faisant intervenir les dérivées successives. En effet, soit

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

l'intégrale à calculer, où $f(x)$ est une fonction continue, et soit $E_n f(x)$ la meilleure approximation de $f(x)$ au moyen d'un polynome de degré $n$ sur $ab$. Ecrivons $f(x) = P_{2n+1}(x) + [f(x) - P_{2n+1}(x)]$, ou $P_{2n+1}(x)$ est le polynome d'approximation de degré $(2n+1)$ de $f(x)$. Ceci posé, pour cal-

[1]) Voir le § 7 de mon article «Sur la valeur asymptotique de la mellieure approximation des fonctions analytiques» (en russe). Communications de la Soc. Math. de Kharkow, t. XIII.

[2]) Cela résulte de la proposition suivante qui est une coséquence immédiate de mes recherehes citées sur les fonctions analytiques réelles: *Si la série* $f(x) = \Sigma x^n P_n(x)$, *ou* $P_n(x)$ *est un polynome de degré non supérieur à* $kn$, $k$ *étant fixe, converge en un point différent de l'origine,* $f(x)$ *est analytique à l'origine.*

culer l'intégrale $I$, appliquons le procédé de Gauss, en désignant par $I_{n+1}$ la valeur approchée

$$I_{n+1}=\sum_{i=0}^{i=n} A_i f(a_i),$$

où $a_i$ sont les racines du polynome de Legendre de degrè $(n+1)$ et $A$ les coefficients de Gauss jouissant de la propriété fondamentale que

$$\sum_{i=0}^{i=n} A_i a_i^k = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \qquad (\text{si } 0 \leqq k \leqq 2n+1).$$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} A_i P_{2n+1}(a_i) = \int_a^b P_{2n+1}(x)\,dx,$$

et par conséquent

$$I - I_{n+1} = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{i=n} A_i f(a_i)$$

$$= \int_a^b [f(x) - P_{2n+1}(x)]\,dx - \sum_{i=0}^{i=n} A_i [f(a_i) - P_{2n+1}(a)].$$

D'où

(4) $$|I - I_{n+1}| < 2(b-a)\, E_{2n+1} f(x),$$

car

$$\sum_{i=0}^{i=n} |A_i| = b - a.$$

Notre inégalité (4) montre que *le procédé de Gauss est applicable à toutes les fonctions continues*. Appliquons aussi l'inégalité (4) à une fonction analytique. Soit

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{3-x} = \log 2.$$

D'après la formule (6) de mon article «Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation etc.» (Bull. de l'Académie de Belgique, 1913, No. 2), on a

$$E_n\left(\frac{1}{3-x}\right) = \frac{1}{8(3+2\sqrt{2})^n}.$$

Donc, ici

(5) $$|I - I_{n+1}| < \frac{1}{2(3+2\sqrt{2})^{2n+1}}.$$

L'évaluation bien connue de l'erreur d'après M. A. Markoff[1]) donnerait

$$I - I_{n+1} = \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!}\left\{\frac{1.2\ldots(n+1)}{(n+2)\ldots(2n+2)}\right\}^2 [\log(3-x)]^{(2n+2)},$$

où $|x| < 1$. On aurait donc

$$(6) \qquad |I - I_{n+1}| < \frac{2}{(2n+2)(2n+3)}\left\{\frac{1.2\ldots(n+1)}{(n+2)\ldots(2n+2)}\right\}^2 \backsim \frac{\pi}{2n\,.\,4^{2n+2}}$$

et on voit immédiatement que le second membre de (5) est beaucoup plus petit que celui de (6). L'inégalité (5) montre, en particulier, qu'il suffit de prendre $n = 5$ dans la formule de Gauss pour avoir déjà une erreur inférieure à $\frac{2}{10^9}$ $\Big($l'inégalité (6) donnerait dans les mêmes conditions $\frac{2}{10^8}\Big)$.

On arrive à une inégalité équivalente pour la méthode de Hermite-Tchebychef dans le cas de l'intégrale

$$H = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a, d'après Hermite, la valeur approchée de $H$,

$$H_n = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f(a_i) \qquad \left(a_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right);$$

et par un raisonnement analogue au précédent on obtient

$$H - H_n = \int_{-1}^{+1} \frac{[f(x) - P_{2n-1}(x)]\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{i=n}[f(a_i) - P_{2n-1}(a_i)],$$

d'où

$$(7) \qquad |H - H_n| < 2\pi\, E_{2n-1} f(x).$$

8. Les conclusions sont moins satisfaisantes pour le calcul des intégrales par la méthode de Cotes. En effet, soit

$$C_{n+1} = A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + A_n f(1)$$

la valeur approchée de l'intégrale

$$C = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

[1]) Voir, p. ex., Encyklop. der math. Wissenschaften II A 2, p. 125.

où $A_i$ sont les coefficients de Cotes. En vertu de la propriété de ces coefficients, on a $C_{n+1} = C$, si $f(x)$ est un polynome de degré non supérieur à $n$. Par conséquent,

$$C - C_{n+1} = \int_0^1 [f(x) - P_n(x)]\,dx - \sum_{i=1}^{i=n} A_i [f(a_i) - P_n(a_i)],$$

donc

$$|C - C_{n+1}| < E_n f(x) \left[\sum_{i=1}^{i=n} |A_i| + 1\right]. \tag{8}$$

Tant que $n$ n'est pas très grand, on a $A_i > 0$, et par conséquent, $\sum |A_i| = 1$. Dans ce cas la formule de Cotes qui est d'un emploi facile n'est pas à dédaigner, car on a alors ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$)

$$|C - C_{n+1}| < 2\,E_n(f(x)). \tag{8(bis)}$$

Ainsi, en faisant $n = 9$, pour calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{3 - x} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x} = \log 2$$

on commet une erreur inférieure à $\dfrac{4}{8[3 + 2\sqrt{2}]^9} = \dfrac{1}{2(3 + 2\sqrt{2})^9} < \dfrac{1}{10^7}$.

Mais, si $n$ croît indéfiniment, il est probable que $\sum |A_i|$ croît indéfiniment; il peut donc exister des fonctions pour lesquelles la formule de Cotes serait inapplicable pour $n$ très grand. Il ne serait pas sans intérêt d'étudier d'une façon détaillée cette question qui est étroitement liée à la question de la convergence des polynomes de Newton.