О преобразованіи плоскости на плоскость вблизи особыхъ линій.

Н. Ѳ. Спенглеръ.

Положимъ, что преобразованіе плоскости (A, B) на плоскость (X, Y) задано уравненіями

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha, \beta), \\ y &= \varphi(\alpha, \beta), \end{aligned} \tag{1}$$

при чемъ f и φ однозначны и непрерывны вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка.

Если якобіевскій опредѣлитель системы (1) не равенъ нулю въ нѣкоторой точкѣ (α_0, β_0), то область Γ, достаточно близкая къ этой точкѣ, преобразуется взаимно однозначно на область Z плоскости (X, Y). Если же область Γ недостаточно близка къ точкѣ (α_0, β_0), то, хотя бы въ этой области якобіевскій опредѣлитель и не обращался въ нуль, преобразованіе области Γ на область Z могло бы быть и не взаимно однозначнымъ. Напримѣръ, если $x = \alpha^3 + 3\beta$, $y = \beta^3 + 3\alpha$, то точки

$$\alpha = \frac{3}{2}, \ \beta = \frac{\sqrt{21} - 3}{4} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\sqrt{21} - 3}{4}, \ \beta = \frac{3}{2},$$

лежащія въ односвязной области, въ которой якобіевскій опредѣлитель не равенъ нулю, соотвѣтствуютъ одной и той же точкѣ плоскости (X, Y).

Назовемъ особыми точками тѣ, для которыхъ якобіанъ системы (1) обращается въ нуль. Соотвѣтствующія имъ точки на плоскости (X, Y) также будемъ называть особыми. Легко доказать теорему: *если область Z плоскости (X, Y) односвязна и не заключаетъ особыхъ точекъ, то въ ней α, β можно опредѣлить, какъ однозначныя функціи отъ x, y.*

Якобіевскій опредѣлитель преобразованія (1), вообще говоря, обращается въ нуль вдоль нѣкоторой кривой $\triangle$.

Уравненіе этой кривой будетъ

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0. \tag{2}$$

При помощи преобразованія (1) кривая $\triangle$ переходитъ на плоскости (X, Y), положимъ, въ кривую D. Уравненіями послѣдней являются уравненія (1) и (2).

Нашей задачей является изслѣдованіе преобразованія (1) вблизи линіи $\triangle$.

Пусть линія $\triangle$ пересѣкается нѣкоторой кривой

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\tau), \\ \alpha &= \beta(\tau) \end{aligned} \tag{3}$$

въ точкѣ $[\alpha_0 = \alpha(\tau_0), \beta_0 = \beta(\tau_0)]$, при чемъ предполагаемъ, что $\alpha'(\tau_0)$ и $\beta'(\tau_0)$ не обращаются одновременно въ нуль. Кривая (3) преобразуется на плоскости (X, Y) въ

$$\begin{aligned} x &= f[\alpha(\tau), \beta(\tau)], \\ y &= \varphi[\alpha(\tau), \beta(\tau)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Угловой коэффиціентъ касательной къ послѣдней въ точкѣ пересѣченія съ кривой D будетъ

$$m = \left[\frac{\varphi_\alpha{}'\alpha' + \varphi_\beta{}'\beta'}{f_\alpha{}'\alpha' + f_\beta{}'\beta'}\right]_{\tau=\tau_0}.$$

Въ силу (2) этотъ коэффиціентъ не зависитъ отъ отношенія $\frac{\beta'}{\alpha'}$, т. е. отъ направленія кривой (3) въ точкѣ пересѣченія ея съ кривой $\triangle$, если только одно изъ выраженій $\varphi_\alpha{}'\alpha' + \varphi_\beta{}'\beta'$, $f_\alpha{}'\alpha' + f_\beta{}'\beta'$, а слѣдовательно, вслѣдствіе (2), и оба не обращаются въ нуль въ точкѣ (α_0, β_0). Въ послѣднемъ случаѣ кривая (4) имѣетъ, вообще говоря, точку возврата въ точкѣ

$$x_0 = f[\alpha(\tau_0), \beta(\tau_0)], \; y_0 = \varphi[\alpha(\tau_0), \beta(\tau_0)].$$

Направленіе касательной въ этой точкѣ кривой (4) будетъ въ послѣднемъ случаѣ, вообще говоря, зависѣть отъ вторыхъ производныхъ $\alpha''(\tau)$, $\beta''(\tau)$, т. е. отъ кривизны кривой (3) въ точкѣ (α_0, β_0). Въ общемъ же случаѣ кривыя (4) при любомъ отношеніи $\frac{\beta'}{\alpha'}$ будутъ касаться кривой D въ точкѣ $(x_0\ y_0)$. Возникаетъ вопросъ, будутъ ли при этомъ кривыя (4) пересѣкать въ точкѣ (x_0, y_0) кривую D или нѣтъ, т. е. преобразуется ли область, лежащая по обѣ стороны кривой $\triangle$, въ область, лежащую также по обѣ стороны кривой D или только по одну. Этимъ вопросомъ мы и займемся.

Ограничимся тѣми участками кривыхъ $\triangle$ и D, которые не пересѣкаютъ сами себя. Относительно нихъ мы сдѣлаемъ еще слѣдующія предположенія. Положимъ, что кривая $\triangle$ выражается въ параметрической формѣ

$$\begin{aligned} \alpha &= g(\sigma), \\ \beta &= h(\sigma), \end{aligned} \tag{5}$$

при чемъ

$$\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1 .$$

Тогда кривая D при помощи (1) также выразится въ параметрической формѣ, положимъ, слѣдующей

$$\begin{aligned} x &= k(\sigma), \\ y &= l(\sigma). \end{aligned} \tag{6}$$

Предположимъ еще, что функціи g, h, k, l такъ же, какъ f, φ аналитическія и, кромѣ того, для нашихъ кривыхъ

$$\begin{aligned} [g'(\sigma)]^2 + [h'(\sigma)]^2 &\neq 0, \\ [k'(\sigma)]^2 + [l'(\sigma)]^2 &\neq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

При этихъ предположеніяхъ координаты любой точки, лежащей достаточно близко отъ кривой $\triangle$, можно выразить черезъ длину τ нормали, опущенной изъ этой точки на кривую, и черезъ значеніе σ, соотвѣтствующее основанію нормали [1]). Поэтому, взявъ область Γ на плоскости (A, B), достаточно близкую къ кривой (5), можемъ при помощи формулъ

$$\begin{aligned} \alpha &= g(\sigma) - h'(\sigma)\tau, \\ \beta &= h(\sigma) + g'(\sigma)\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

преобразовать ее взаимно-однозначно на область P плоскости (Σ, T), при чемъ область P опредѣляется условіями

$$\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad |\tau| < \varepsilon, \tag{P}$$

гдѣ ε достаточно мало. Перемѣнныя σ и τ, выраженныя въ функціяхъ отъ α, β, будутъ однозначными аналитическими функціями.

Точно также область Z, достаточно близкую къ кривой (6), при помощи формулъ

$$\begin{aligned} x &= k(s) - l'(s)t, \\ y &= l(s) + k'(s)t \end{aligned} \tag{9}$$

---

[1]) Bliss. Transactions of the American Mathematical Society T. V, стр. 487.

можно преобразовать взаимно-однозначно на область плоскости (S, T), опредѣляемую условіями

$$\sigma_0 \leq s \leq \sigma_1, \quad |t| < \eta. \tag{10}$$

Разрѣшая уравненія (9) относительно s, t, причемъ беремъ тѣ вѣтви, которыя обращаются въ σ, 0 на кривой D, и подставляя въ полученныя формулы вмѣсто x, y ихъ значенія изъ (1), а затѣмъ значенія α, β изъ (8), получимъ

$$\begin{aligned} s &= s(\sigma, \tau), \\ t &= t(\sigma, \tau). \end{aligned} \tag{11}$$

Послѣднія формулы опредѣляютъ преобразованіе области P плоскости (Σ, T) на область U плоскости (S, T), причемъ мы должны предполагать, что ε выбрано достаточно малымъ и предѣлы σ_0 и σ_1 замѣнены болѣе узкими σ_0' и σ_1' такъ, что область U лежитъ внутри области (10).

Кривая $\triangle$ соотвѣтствуетъ значенію $\tau = 0$, т. е. кооординатной оси Σ въ плоскости (Σ, T). Также и кривая D соотвѣтствуетъ значенію $t = 0$, т. е. координатной оси S въ плоскости (S, T).

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} s(\sigma, 0) &\equiv \sigma, \\ t(\sigma, 0) &\equiv 0, \end{aligned} \tag{12}$$

откуда имѣемъ

$$\frac{\partial s(\sigma, 0)}{\partial \sigma} = 1, \quad \frac{\partial t(\sigma, 0)}{\partial \sigma} = 0. \tag{13}$$

До сихъ поръ мы не пользовались тѣмъ обстоятельствомъ, что на кривой $\triangle$ якобіевскій опредѣлитель $\dfrac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$ обращается въ нуль, и потому предыдущіе результаты справедливы для любыхъ кривыхъ $\triangle$ и D, удовлетворяющихъ перечисленнымъ выше условіямъ.

Воспользуемся теперь условіемъ (1). Имѣемъ

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} \frac{D(s, t)}{D(\sigma, \tau)} = \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} \frac{D(\alpha, \beta)}{D(\sigma, \tau)}. \tag{14}$$

Такъ какъ въ силу условій (7) опредѣлители $\dfrac{D(x, y)}{D(s, t)}$ и $\dfrac{D(\alpha, \beta)}{D(\sigma, \tau)}$ не обращаются въ нуль, то, вслѣдствіе (2), имѣемъ

$$\frac{D(s, t)}{D(\sigma, \tau)} = 0 \tag{15}$$

для $\tau = 0$.

Подставляя въ $\dfrac{D(s,\ t)}{D(\sigma,\ \tau)}$ значенія частныхъ производныхъ при $\tau=0$, получимъ

$$\left.\frac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0. \tag{16}$$

Очевидно, что $s(\sigma,\ \tau)$ и $t(\sigma,\ \tau)$ аналитическія функціи отъ σ, τ, такъ какъ f, φ, g, h аналитическія функціи. Въ силу (12) будемъ имѣть

$$t=t(\sigma,\ \tau)=\tau^p\,\varphi(\sigma,\ \tau), \tag{17}$$

при чемъ вблизи $\tau=0$ $\psi(\sigma,\ \tau)$ не обращается въ нуль. Отсюда заключаемъ, что производная $\dfrac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial\sigma}$ высшаго порядка малости относительно τ, чѣмъ $\dfrac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial\tau}$, и потому вблизи $\tau=0$ знакъ опредѣлителя $\dfrac{D(s,\ t)}{D(\sigma,\ \tau)}$ опредѣляется знакомъ производной $\dfrac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial\tau}$.

Такъ какъ $\dfrac{\partial s(\sigma,\ 0)}{\partial\sigma}=1$, то изъ уравненія $s=s(\sigma,\tau)$ вблизи $\tau=0$ σ опредѣлится, какъ аналитическая функція отъ s и τ. Подставляя это значеніе σ въ (17), мы найдемъ для τ разложеніе по дробнымъ степенямъ t съ коэффиціентами-аналитическими функціями отъ s, а затѣмъ найдемъ и σ въ функціи отъ s, t. Подставляя найденныя значенія для σ, τ въ (8) и затѣмъ значенія для s, t, опредѣленныя изъ (9) черезъ x, y, получимъ α, β въ функціяхъ отъ x, y, вообще говоря, неоднозначныхъ.

Замѣтимъ, что такъ какъ мы разсматриваемъ только вещественныя значенія перемѣнныхъ, то полученнымъ нами дробнымъ степенямъ t мы должны давать только вещественныя значенія. Поэтому, если опредѣлитель (2), а слѣдовательно, и производная $\dfrac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial\tau}$ не мѣняютъ знака то p въ (17) будетъ нечетнымъ числомъ и значенія дробныхъ степеней будутъ вполнѣ опредѣленны. Въ этомъ случаѣ α, β будутъ однозначными функціями отъ x, y вблизи любой точки кривой D, а такъ какъ точки кривыхъ D и $\triangle$ соотвѣтствуютъ другъ другу взаимно-однозначно, то легко доказать, что α, β будутъ однозначными функціями отъ x, y во всей области Z, достаточно близкой къ D.

Итакъ, *если опредѣлитель* $\dfrac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)}$ *на кривой* $\triangle$ *обращается въ нуль, но при переходѣ черезъ эту кривую знака не мѣняетъ, и если кривая* $\triangle$ *и соотвѣтствующая ей кривая* D *удовлетворяютъ вышеприведеннымъ условіямъ, то* α, β *являются однозначными функціями отъ* x, y *вблизи кривой* D.

Разсмотримъ теперь случай, когда $\dfrac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$ мѣняетъ знакъ при переходѣ черезъ кривую $\triangle$. Тогда изъ (14) заключаемъ, что $\dfrac{D(s, t)}{D(\sigma, \tau)}$, а слѣдовательно, и $\dfrac{\partial t(\sigma, \tau)}{\partial \tau}$ мѣняетъ знакъ при переходѣ τ черезъ значеніе $\tau = 0$.

Имѣемъ

$$t(\sigma, \tau) = t(\sigma, \tau) - t(\sigma, 0) = \tau \frac{\partial t(\sigma, \theta\tau)}{\partial \tau}, \tag{18}$$

откуда видимъ, что такъ какъ τ и $\dfrac{\partial t}{\partial \tau}$ мѣняютъ одновременно знакъ, то $t(\sigma, \tau)$ знака не мѣняетъ при переходѣ τ черезъ значеніе 0. Это значитъ, что область P, расположенная по обѣ стороны оси Σ, преобразуется въ область U, расположенную только по одну сторону оси S. Въ этомъ случаѣ въ (17) p есть четное число, а потому въ разложеніи τ по дробнымъ степенямъ t показатели будутъ имѣть четные знаменатели, и слѣдовательно, каждому значенію t будетъ соотвѣтствовать два значенія τ. Если t достаточно мало, то эти значенія τ будутъ различныхъ знаковъ.

Вернемся теперь къ плоскостямъ (A, B) и (X, Y). Очевидно, что область Γ, расположенная по обѣ стороны кривой $\triangle$, въ разсматриваемомъ случаѣ преобразуется въ область Z, расположенную только по одну сторону кривой D. Это слѣдуетъ изъ того, что для всѣхъ точекъ области Z нормали t, опущенныя изъ этихъ точекъ на кривую D, имѣютъ одинаковые знаки. Иначе можно въ этомъ убѣдиться при помощи слѣдующихъ разсужденій. Положимъ, что имѣемъ точку (x_0, y_0), не лежащую на кривой D, и положимъ что мы соединили эту точку съ точкой (x_1, y_1) кривой D и слѣдующей за ней по кривой (x_2, y_2) отрѣзками прямыхъ, не пересѣкающими кривой, въ другихъ точкахъ. Площадь треугольника съ вершинами (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) будетъ

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Будемъ приближать точку (x_2, y_2) къ точкѣ (x_1, y_1). Тогда, начиная съ нѣкотораго момента, опредѣлитель будетъ сохранять одинъ и тотъ же знакъ. Въ зависимости отъ того, будетъ ли этотъ знакъ положителенъ или отрицателенъ, скажемъ, что точка (x_0, y_0) находится съ лѣвой или съ правой стороны кривой D. Возьмемъ точку (x_0, y_0) изъ области Z, а за точку (x_1, y_1) выберемъ основаніе нормали, опущенной изъ точки (x_0, y_0) на кривую D. Тогда, изслѣдуя преобразованіе взятыхъ точекъ въ области U, легко убѣдимся, что точки области Z всѣ лежатъ по одну сторону кривой D.

Итакъ, *если опредѣлитель* $\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$ *на кривой* $\triangle$ *обращается въ нуль и при переходѣ черезъ эту кривую мѣняетъ знакъ, и если кривая* $\triangle$ *и соотвѣтствующая ей кривая* D *удовлетворяютъ приведеннымъ выше условіямъ, то область* Γ, *расположенная по обѣ стороны кривой* $\triangle$, *преобразовывается въ область* Z, *расположенную только по одну сторону кривой* D, *и перемѣнныя* α, β *являются двузначными функціями отъ* x, y, *вблизи кривой* D.

Замѣтимъ, что если область Γ расположена только по одну сторону кривой $\triangle$, то между областями Γ и Z будетъ существовать взаимно однозначное соотвѣтствіе.

Легко доказать обратную теорему. *Если преоброзованіе (1) таково, что нѣкоторая кривая* $\triangle$ *въ плоскости* (A, B) *преобразуется въ кривую* D *на плоскости* (X, Y), *при чемъ* $\triangle$ *и* D *обладаютъ перечисленными выше свойствами, и кромѣ того нѣкоторая область* Γ, *расположенная по обѣ стороны кривой* $\triangle$, *преобразуется въ область* Z, *расположенную по одну сторону отъ кривой* D, *то якобіевскій опредѣлитель* $\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$ *обращается въ нуль на кривой* $\triangle$ *и при переходѣ черезъ нее мѣняетъ знакъ.*

Дѣйствительно, мы опять можемъ выполнить преобразованія (8) и (9). Тогда кривыя $\triangle$ и D преобразуются соотвѣтственно въ оси Σ и S, а области Γ и Z въ области P и U, при чемъ область P расположена по обѣ стороны оси Σ, а область U только по одну сторону оси Z. Будутъ и здѣсь имѣть мѣсто формулы (12), (13), (14). При переходѣ τ черезъ значеніе нуль t обращается въ нуль, а знака не мѣняетъ, слѣдовательно,

$$\frac{\partial t(\sigma, 0)}{\partial \tau} = 0. \tag{16}$$

Кромѣ того, производная $\frac{\partial t(\sigma, \tau)}{\partial \tau}$ при переходѣ τ черезъ значеніе нуль должна измѣнить знакъ. Отсюда при помощи формулы (14) мы и убѣждаемся въ справедливости теоремы.

Примѣры. При помощи формулъ

$$x = \alpha\beta,$$
$$y = \alpha + \beta$$

плоскость (A, B) преобразуется въ часть плоскости (X, Y), лежащую внѣ параболы $y^2 = 4x$.

Возьмемъ болѣе сложный случай преобразованія

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha\beta + 2\alpha, \\ y &= \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta. \end{aligned} \tag{19}$$

Опредѣлитель этого преобразованія

$$\begin{vmatrix} 2\beta + 2 & 2\alpha \\ 2\alpha & -2\beta + 2 \end{vmatrix} = 4(1 - \alpha^2 - \beta^2)$$

обращается въ нуль на окружности $\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0$ и мѣняетъ знакъ при переходѣ черезъ эту окружность. Уравненіе окружности

$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 \tag{$\triangle$}$$

можемъ замѣнить слѣдующими уравненіями

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\varphi, \\ \beta &= \sin\varphi, \end{aligned}$$

и тогда уравненія кривой D получимъ изъ (19)

$$\begin{aligned} x &= \sin 2\varphi + 2\cos\varphi, \\ y &= \cos 2\varphi + 2\sin\varphi. \end{aligned} \tag{D}$$

Это, какъ не трудно видѣть, есть гипоциклоида съ тремя точками возврата, соотвѣтствующими значеніямъ $\varphi = 30^0$, $\varphi = 150^0$, $\varphi = 270^0$.

Пусть точка (α_0, β_0) есть точка окружности $\triangle$. Тогда прямая

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha_0 t, \\ \beta &= \beta_0 - (1 + \beta_0)\, t \end{aligned} \tag{20}$$

преобразуется въ

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha_0(1 + \beta_0) - 2\alpha_0(1 + \beta_0)\, t^2, \\ y &= \alpha_0^2 - \beta_0^2 + 2\beta_0 - 2\beta_0(1 + \beta_0)\, t^2, \end{aligned} \tag{21}$$

т. е. также въ прямую. Такимъ образомъ, когда точка (α, β) описываетъ прямую (20), точка (x, y) двигается также по прямой, но дойдя до точки, соотвѣтствующей (α_0, β_0), возвращается обратно, и при томъ значеніямъ $\pm t$ соотвѣтствуетъ одна и та же точка (x, y). Мы предполагали, что α_0 и $1 + \beta_0$ не равны одновременно нулю. Въ противномъ случаѣ можемъ взять прямую

$$\begin{aligned} \alpha &= t, \\ \beta &= 0. \end{aligned}$$

Замѣтимъ, что участки кривой D вблизи точекъ возврата не подчиняются условіямъ, при которыхъ мы доказывали предыдущія теоремы, и какъ разъ для этихъ участковъ полученные результаты невѣрны. Дѣйствительно, возьмемъ, напримѣръ, точку (0, —1) на кривой $\triangle$, и проведемъ черезъ нее прямую $\alpha = 0$. На плоскости (X, Y) взятой точкѣ соотвѣтствуетъ точка (0,—3), а прямая изображается точками, координаты которыхъ опредѣляются уравненіями

$$x = 0\,,$$
$$y = -\beta^2 + 2\beta\,,$$

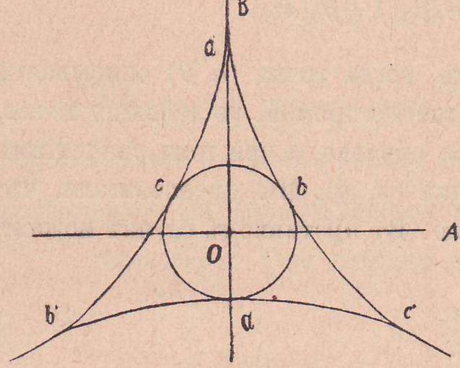
т. е. полупрямой, пересѣкающей кривую D въ точкѣ (0, —3).

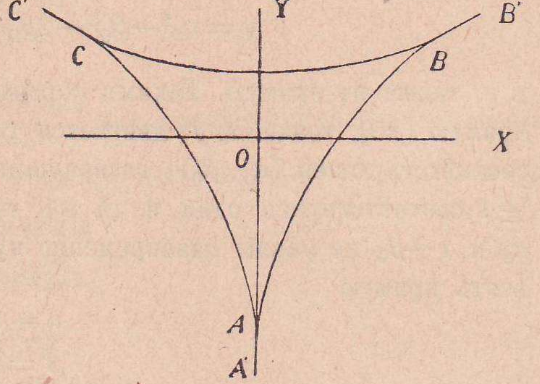
Такимъ образомъ точки плоскости (X, Y), которыя при переходѣ (α, β) черезъ $\triangle$ не могутъ на остальныхъ участкахъ кривой D выйти за предѣлы этой кривой, черезъ точку (0, —3) выходятъ изнутри кривой D наружу. Это относится и къ двумъ другимъ точкамъ возврата кривой D.

Прямая (20) пересѣкаетъ окружность $\triangle$, кромѣ точки (α_0, β_0), еще въ другой точкѣ, положимъ

$$\alpha_1 = \beta_0 + \alpha_0 t_1\,,$$
$$\beta_1 = \beta_0 - (1 + \beta_0) t_1.$$

Для всѣхъ значеній t отъ 0 до t_1 формулы (21) будутъ давать точки, лежащія внутри кривой D. Эти же точки мы получимъ, и давая t значенія отъ 0 до $-t_1$. Слѣдовательно, внѣ окружности $\triangle$ существуютъ области, преобразовывающіяся опять въ область лежащую внутри кривой D. Вычисляя значеніе $-t_1$ и подставляя его вмѣсто t въ (21), найдемъ уравненіе кривой, ограничивающей эти области. Это будетъ гипоциклоида, тождественная съ D, но повернутая около начала на 60°.





Кругъ $\triangle$ и каждый изъ криволинейныхъ треугольниковъ abc', bca', cab' преобразуются въ область, ограниченную кривой D. Для α, β, разсматриваемыхъ, какъ функціи отъ x, y, легко построить поверхность, аналогичную поверхности Риманна. Для этого вырѣжемъ изъ плоскости фигуру ABC, и затѣмъ три равныя между собой части плоскости, ограниченныя линіей $A'ABB'$ и расположенныя по лѣвую сторону этой линіи. Первую часть присоединимъ къ ABC по кривой AB, вторую по кривой BC и полупрямой BB' и третью по кривой CA и полупрямыми CC' и AA'.

Предыдущіе результаты легко распространить на пространство n измѣреній. Положимъ, что преобразованіе пространства $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ на пространство $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ задано уравненіями

$$\begin{aligned} x_1 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ x_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \end{aligned} \tag{22}$$

гдѣ f_1, $f_2, \ldots f_n$—аналитическія функціи отъ α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Возьмемъ въ пространствѣ $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ протяженіе n—1-го измѣренія $\triangle$, заданное уравненіями

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= g_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \\ \alpha_2 &= g_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &= g_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \end{aligned} \tag{23}$$

при чемъ точки $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})$ лежатъ въ нѣкоторой области T.

Протяженіе $\triangle$ при помощи формулъ (22) преобразуется въ протяженіе D, заданное, положимъ, уравненіями

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \\ x_2 &= k_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= k_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}). \end{aligned} \tag{24}$$

Предположимъ, что протяженія $\triangle$ и D не пересѣкаютъ сами себя, что функціи g и k аналитическія и что

$$\begin{aligned} &\sum_i \left[\frac{D(g_1, \ldots g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots g_n)}{D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})}\right]^2 \neq 0, \qquad i=1, 2, \ldots n \\ &\sum_i \left[\frac{D(k_1, \ldots k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots k_n)}{D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})}\right]^2 \neq 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Преобразуемъ область Γ пространства $(A_2, A_2, \ldots A_n)$, достаточно близкую къ $\triangle$, при помощи формулъ

$$\alpha_i = g_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}) + (-1)^i \frac{D(g_1, \ldots g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots g_n)}{D(\sigma_2, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})} \sigma_n \quad {\scriptstyle i=1,2,\ldots,n} \qquad (26)$$

на область P пространства $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_n)$. Если $|\sigma_n|$ достаточно мало, то преобразованіе (26) устанавливаетъ взаимно однозначную зависимость между областями Γ и P, при чемъ σ опредѣляются, какъ аналитическія функціи отъ α. Дѣйствительно, якобіевскій опредѣлитель системы (26) при $\sigma_n = 0$, какъ не трудно видѣть, будетъ

$$(-1)^{n+1} \sum \left[\frac{D(g_1, \ldots g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots g_n)}{D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})} \right]^2,$$

и слѣдовательно, въ силу (25) отличенъ отъ нуля.

Остается доказать, что σ будутъ однозначны относительно α. Положимъ обратное, т. е., что, какъ бы мало ни было по абсолютной величинѣ σ_n, всегда одной точкѣ α области Γ соотвѣтствуютъ двѣ точки σ' и σ'' области P. Можемъ выдѣлить два ряда точекъ σ' и σ'' стремящихся къ предѣламъ σ_0' и σ_0'', при чемъ въ послѣднихъ $\sigma_n = 0$. Эти предѣлы не могутъ быть различны, ибо тогда двумъ различнымъ точкамъ $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})$ соотвѣтствовала бы одна и таже точка протяженія $\triangle$, что противорѣчитъ условію о томъ, что $\triangle$ не пересѣкаетъ само себя. Но также σ_0' и σ_0'' не могутъ быть и равны, ибо тогда вблизи соотвѣтствующей точки α перемѣнныя $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ были бы двузначными функціями, что противорѣчитъ тому, что якобіевскій опредѣлитель системы (26) въ этой точкѣ не равенъ нулю.

Точно также область Z пространства $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, достаточно близкую къ D, можемъ преобразовать при помощи формулъ

$$x_i = k_i(s_1, s_2 \ldots s_{n-1}) + (-1)^i \frac{D(k_1, \ldots k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots k_n)}{D(s_1, s_2, \ldots s_n)} s_n \quad {\scriptstyle i=1,2,\ldots n} \qquad (27)$$

на нѣкоторую область пространства $(S_1, S_2, \ldots S_n)$, если только

$$|s_n| < \eta.$$

Разрѣшая уравненія (27) относительно s, беря тѣ вѣтви, которыя обращаются соотвѣтственно въ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}$, 0 на кривой D, и подставляя въ полученныя выраженія вмѣсто x ихъ значенія изъ (22), а вмѣсто α ихъ значенія изъ (26), получимъ

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1(\sigma_1\,,\ \sigma_2\,,\dots \sigma_n), \\ s_2 &= s_2(\sigma_1\,,\ \sigma_2\,,\dots \sigma_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_n &= s_n(\sigma_1\,,\ \sigma_2\,,\dots \sigma_n). \end{aligned} \tag{28}$$

Послѣднія формулы опредѣляютъ преобразованіе области P пространства $(\Sigma_1\,,\ \Sigma_2\,,\dots \Sigma_n)$ на область U пространства $(S_1\,,\ S_2\,,\dots S_n)$. При этомъ мы должны предполагать, что область P на столько сужена, что область U лежитъ въ области, которая опредѣляется формулами (27).

Протяженіе $\triangle$ соотвѣтствуетъ значенію $\sigma_n = 0$, т. е. координатному протяженію $n-1$-го измѣренія $(\Sigma_1\,,\ \Sigma_2\,,\dots \Sigma_{n-1})$ въ пространствѣ $(\Sigma_1,\ \Sigma_2,\dots \Sigma_n)$. Также и протяженіе D соотвѣтствуетъ значенію $s_n = 0$, т. е. координатному протяженію $n-1$-го измѣренія $(S_1,\ S_2,\dots S_{n-1})$ въ пространствѣ $(S_1,\ S_2,\dots S_n)$. Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} s_i(\sigma_1,\ \sigma_2,\dots \sigma_{n-1},\ 0) &= \sigma_i, \qquad i=1,2\dots,n-1 \\ s_n(\sigma_1,\ \sigma_2,\dots \sigma_{n-1},\ 0) &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

откуда имѣемъ

$$\begin{aligned} \left.\frac{D(s_1\,,\ s_2\,,\dots s_{n-1})}{D(\sigma_1\,,\ \sigma_2\,,\dots \sigma_{n-1})}\right|_{\sigma_n=0} &= 1, \\ \frac{\partial s_n(\sigma_1,\ \sigma_2,\dots \sigma_{n-1},\ 0)}{\partial \sigma_i} &= 0. \qquad i=1,2,\dots n-1 \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда аналогично тому, какъ изъ формулъ (13), (14), мы найдемъ, что въ случаѣ, когда якобіевскій опредѣлитель $\dfrac{D(x_1,\ x_2,\dots x_n)}{D(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots \alpha_n)}$ обращается въ нуль на $\triangle$, но не мѣняетъ знака при переходѣ черезъ $\triangle$, то $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots \alpha_n$ являются однозначными функціями отъ $x_1,\ x_2,\dots x_n$ въ области Z, достаточно близкой къ D. Если же нашъ опредѣлитель мѣняетъ знакъ, то α являются двузначными функціями отъ x.

Какъ мы видѣли, при условіи (25) координаты любой точки $(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots \alpha_n)$, достаточно близкой къ $\triangle$, можемъ выразить при помощи формулъ (26). Условимся говорить, что точка $(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\dots \alpha_n)$ лежитъ слѣва или справа отъ $\triangle$ смотря по тому, будетъ ли для нея σ_n положительно или отрицательно.

Итакъ, можемъ формулировать слѣдующія теоремы.

Пусть выполнены условія, наложенныя на функціи f и на протяженія $\triangle$ и D. *Тогда, если якобіевскій опредѣлитель системы (22) обращается въ нуль на* $\triangle$, *но при переходѣ черезъ* $\triangle$ *знака не мѣняетъ, то* α *являются однозначными функціями отъ* x *вблизи* D, *и область* Γ, *расположенная достаточно близко по обѣ стороны* $\triangle$, *преобразуется взаимно однозначно на область* Z, *расположенную также по обѣ стороны* D. *Если же якобіевскій опредѣлитель при переходѣ черезъ* $\triangle$ *мѣняетъ знакъ, то* α *являются двузначными функціями отъ* x *вблизи* D, *и область* Γ, *расположенная достаточно близко по обѣ стороны* $\triangle$, *преобразуется въ область* Z, *расположенную только по одну сторону* D. *Если же въ послѣднемъ случаѣ* Γ *расположена только по одну сторону* $\triangle$, *то между* Γ *и* Z *существуетъ взаимно однозначное соотвѣтствіе.*

Обратно, *если преобразованіе (22) таково, что нѣкоторое протяженіе* $\triangle$ n*—1-го измѣренія въ пространствѣ* $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ *преобразуется въ протяженіи* D *въ пространствѣ* $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, *при чемъ нѣкоторая область* Γ, *расположенная по обѣ стороны* $\triangle$, *преобразуется въ область* Z, *расположенную только по одну сторону* D, *то якобіевскій опредѣлитель системы (22) обращается въ нуль на* $\triangle$ *и при переходѣ черезъ* $\triangle$ *мѣняетъ знакъ.*