Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $X^3\varrho+Y^3=1$.

(Окончательный результатъ).

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ концѣ послѣдней замѣтки, посвященной этому уравненію, я высказалъ предположительно слѣдующую простую теорему:

«*Уравненіе* $X^3\varrho+Y^3=1$ *не имѣетъ ни одного рѣшенія, если основная единица порядка* $0(\sqrt[3]{\varrho})$ *не имѣетъ вида* $B\sqrt[3]{\varrho}+C$, *и одно рѣшеніе* $X=B$, $Y=C$, *если она имѣетъ видъ* $B\sqrt[3]{\varrho}+C$».

Эта теорема оказывается вѣрной. Дѣйствительно, въ моихъ замѣткахъ заключались доказательства слѣдующихъ положеній:

Замѣчаніе: «У одной изъ двухъ единицъ $M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$, или ей обратной, коэффиціенты M, P и Q не одного знака, и одинъ изъ нихъ можетъ быть нулемъ, коэффиціенты же другой всѣ три не равны 0 и одного знака».

Теорема I: «Никакая степень двучленной единицы не можетъ быть опять двучленной единицей».

Теорема II: «Квадратъ единицы не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$».

Теорема III: «Кубъ единицы не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$».

Доказательство этой послѣдней теоремы довольно сложное.

И, наконецъ, теорема IV: «Если $(a(\sqrt[3]{\varrho})+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$, вида $(B\sqrt[3]{\varrho}+C)$, то m простое число, дѣлитель $ab\varrho$». Эта послѣдняя теорема тоже вѣрная, но она должна быть замѣнена слѣдующей новой:

Теорема IV. «Никакая степень единицы, кромѣ первой, не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$».

Доказательство этой теоремы слѣдующее:

Пусть $[a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c]^m=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$, тогда, какъ легко убѣдиться,

$$M=\frac{(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m+\zeta(a\zeta^2(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\zeta\sqrt[3]{\varrho}+c)^m+\zeta^2(a\zeta^4(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\zeta^2\sqrt[3]{\varrho}+c)^m}{3(\sqrt[3]{\varrho})^2}$$

(т. е. $=(\zeta,\ \varepsilon_0)$)

Предположимъ что $M=0$. Разсмотримъ отдѣльно случаи m вида $3.\gamma+2$, и m вида $3.\gamma+1$, m же вида $3.\gamma$ разсматривать не нужно, на основанiи теоремы III.

1) $M=0$, $m=3.\gamma+2$, тогда

$$(\zeta^2a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^m+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)^m=-(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m.$$

На основанiи теоремы II можно предполагать m нечетнымъ, и тогда $(\zeta^2a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)$ дѣлитель $-(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$, т. е. единица, т. е. $-a(\sqrt[3]{\varrho})^2+2b\sqrt[3]{\varrho}-c$ есть единица

т. е. $$-a^3\varrho^2+8b^3\varrho-c^3-6abc\varrho=\pm 1$$
но $$a^3\varrho^2+b^3\varrho+c^3-3abc\varrho=1$$

откуда сложенiемъ получаемъ $9b\varrho(b^2-ac)=2$ или 0; слѣд.

$$b^2-ac=0,\quad \text{или}\quad b=0,$$

но b^2-ac есть коэффицiентъ «обратной» единицы и слѣд., по «замѣчанiю» $\neq 0$, слѣдовательно $b=0$, т. е. основная единица двучленная, и не только m-тая, но и никакая ея степень, по теоремѣ I, не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho}+Q$.

2) $M=0$, $m=3.\gamma+1$, тогда

$$(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)^m+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^m=-((a(\sqrt[3]{\varrho^2}+b(\sqrt[3]{\varrho}+c)^m,$$

откуда, аналогично предыдущему, получаемъ, что $a=0$, т. е., что основная единица двучленная; примѣняемъ теорему I, ч. и д. т.

Такимъ образомъ мы получили неожиданно простое рѣшенiе вопроса. Рѣшенiемъ можетъ быть только одна основная единица, которую легко вычислить.

20 ноября 1915 г.