Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XVI, № 1—2.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ВТОРАЯ СЕРІЯ
Томъ XVI.
№ 1—2.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1918.

Гастонъ Дарбу *)
(Gaston Darboux).

[1842—1917].

Телеграфъ принесъ печальную вѣсть о кончинѣ почетнаго члена Харьковскаго Математическаго Общества, одного изъ крупнѣйшихъ французскихъ математиковъ, Гастона Дарбу. Изъ четверки Дарбу, Пуанкаре, Пикаръ и Аппелль, этихъ звѣздъ первой величины, ярко блестѣвшихъ на французскомъ математическомъ небосклонѣ послѣдней четверти прошлаго столѣтія и первой четверти нынѣшняго, остаются въ живыхъ только младшіе—Пикаръ и Аппелль. Дарбу былъ значительно старше остальныхъ трехъ (онъ родился 13.VIII.1842, А. Пуанкаре 29.IV.1854, Э. Пикаръ 24.VII.1856, П. Аппелль 27.IX.1855) и можетъ быть поэтому производилъ впечатлѣніе старѣйшины французскихъ математиковъ. Немало содѣйствовало такому впечатлѣнію и то, что въ теченіе почти 15 лѣтъ (съ 12.XI.1889 по 4.IV.1913) онъ былъ деканомъ Faculté des Sciences de Paris, а съ 1900 г. Secrétaire perpétuel de l'Académie pour les sciences mathématiques.

Г. Дарбу, старшій изъ двухъ сыновей торговца мелочными товарами, родился въ Нимѣ (департ. Гаръ). Онъ рано потерялъ отца, умершаго въ 1849 г. Мать, взявшись за дѣло сама, отдала дѣтей сначала въ сосѣднюю школу, затѣмъ въ лицей въ Нимъ.

Въ ту эпоху режимъ во французскихъ школахъ былъ болѣе суровъ, чѣмъ въ настоящее время,—братья-полупансіонеры приходили въ лицей въ 6 ч. утра, уходили въ 8 ч. вечера.

Видя проявляемыя мальчиками способности, г-жа Дарбу, въ противность обычаямъ французской мелкой буржуазіи, не стала принуждать ихъ помогать ей въ торговлѣ, а предоставила имъ продолжать занятія, когда они получили baccalauréat ès sciences.

*) Доложено въ засѣданіи Мат. Общ. 19 февр. 1917 г. При печатаніи пополнено. Біографическія и библіографическія данныя взяты у E. Lebon. Savants du jour. Gaston Darboux. 1910.

Въ октябрѣ 1859 г. Дарбу поступилъ въ Classe de Mathématiques Spéciales въ лицей Montpellier и подъ руководствомъ превосходнаго преподавателя Charles Berger сталъ заниматься математикой. Его профессоръ, о которомъ Дарбу и впослѣдствіи вспоминалъ съ удовольствіемъ и чувствомъ, не ограничиваясь обязательными часами уроковъ, занимался съ нимъ по вечерамъ, читалъ съ нимъ сочиненія по высшей математикѣ и развилъ въ немъ тотъ вкусъ къ геометріи, который отличаетъ научную дѣятельность Гастона Дарбу.

Уже черезъ годъ Дарбу,—чтобы доставить удовольствіе своему учителю,—приступаетъ къ экзаменамъ для пріема въ Политехническую Школу, но хотя выдержалъ испытанія первой стадіи и признанъ былъ допустимымъ (admissible), не сталъ держать экзаменовъ второй ступени и вернулся въ классъ къ Берже.

Еще черезъ годъ, въ 1861 году онъ былъ принятъ первымъ сразу и въ Ecole Polytechnique и въ Ecole Normale. Чувствуя призваніе къ преподавательской дѣятельности, онъ отдалъ предпочтеніе послѣдней.

Это было настолько необычно,—всѣми предпочтеніе отдавалось Политехнической Школѣ,—что попало даже въ печать (J. J. Weiss отмѣтилъ это въ Journal des Débats 20.XI.1861). Впослѣдствіи примѣру Дарбу послѣдовали P. Appell, E. Picard и другіе.

Получивъ разрѣшеніе слушать лекціи и внѣ Ecole Nomale, Дарбу посѣщаетъ лекціи по математической физикѣ въ College de France своего maitre de conférences въ Ecole Normale (J. Bertrand'а). Съ тѣхъ поръ получило начало дружба, связывавшая Дарбу съ J. Bertrand'омъ. Физически они представляли полную противоположность—маленькій, подвижной и въ старости, съ копной волосъ на головѣ Бертранъ, и громаднаго роста, слегка сутулившійся, худощавый, съ маленькой коротко остриженной головой Дарбу.

20.IX.1864 г. Дарбу выдержалъ первымъ конкурсъ на agrégation des Sciences mathématiques. Три года онъ употребилъ на изученіе классическихъ работъ по геометріи Монжа, Гаусса, Понселе, Дюнена, Ламе, Якоби.

Къ этой области, которая всю его жизнь является для него излюбленнымъ полемъ дѣятельности, относится и сдѣланная имъ за это время его первая самостоятельная работа по теоріи ортогональныхъ поверхностей: Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales.

Интересно, что въ томъ же засѣданіи Академіи 1.VIII.1864 г., когда J. A. Serret представилъ мемуаръ Дарбу, O. Bonnet представилъ мемуаръ Moutard'а, доказывавшаго также результатъ, полученный Дарбу.

Серре, докладывая въ слѣдующемъ засѣданіи оба сообщенія, указалъ, что ни одинъ изъ авторовъ не могъ знать о работѣ другого и отмѣтилъ въ то же время, что работа Дарбу была имъ передана in extenso еще въ іюнѣ.

Результаты этой работы, а также дальнѣйшіе результаты, сообщенные въ нѣсколькихъ замѣткахъ въ Comptes rendus и Annales de l'Ecole Normale доставили матеріалъ для его докторской тезы «sur les surfaces orthogonales», отзывъ о которой давалъ M. Chasles и которую Дарбу защитилъ 14.VII.1866 г.

Въ $186^6/_7$ г. J. Bertrand передалъ ему свой курсъ Математической Физики въ Collège de France, въ 1867 г. Bouquet провелъ его въ свои замѣстители по преподаванію Mathématiques Spéciales въ лицеѣ Louis-le-Grand; послѣднее мѣсто Дарбу занималъ до октября 1872 г., когда онъ окончательно прекратилъ преподаваніе въ средней школѣ, чтобы исполнять обязанности maître de conférences по математикѣ въ Ecole Normale Supérieure. Въ началѣ слѣдующаго года Дарбу замѣщаетъ Ліувилля на каѳедрѣ раціональной механики въ Сорбоннѣ. Первый годъ его аудиторія была малочисленна,—престарѣлый и больной Ліувилль читалъ не регулярно, и слушатели Нормальной Школы привыкли замѣнять его лекціи conférences'ами Briot въ Нормальной Школѣ. Дѣло перемѣнилось со слѣдующаго года, и Дарбу получилъ аудиторію, способную оцѣнить его преподаваніе. (Въ числѣ этихъ его слушателей были П. Аппелль и Э. Пикаръ). Въ примѣчаніяхъ къ Курсу механики Despeyrous нашли отраженіе новыя точки зрѣнія, которыя Дарбу излагалъ на своихъ лекціяхъ механики въ Сорбоннѣ въ 1873—1878 гг.

Въ 1880 г. Дарбу замѣщаетъ M. Chasles на каѳедрѣ Высшей Геометріи, созданной для M. Chalses'я въ 1846 г., но Дарбу придалъ этому курсу совершенно иной характеръ,—мѣсто приложенія проективной геометріи заняла на послѣдующія 30 лѣтъ геометрія дифференціальная. Памятникомъ этого преподаванія являются четырехтомные Leçons sur la théorie générales des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal (1887—1896),—первые два тома которыхъ въ послѣдніе годы вышли вторымъ изданіемъ, и Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonneés curvilignes t. L. 1898 (и единственный; позднѣе вышло второе изданіе уже въ одномъ томѣ). Избранный въ 1884 г. членомъ Парижской Академіи съ 1900 г. Дарбу становится на смѣну J. Bertrand'a ея Secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques. Его организаторскіе таланты проявлены имъ на посту декана Faculté des Sciences въ Парижѣ, которымъ онъ пробылъ не полныя пять трехлѣтій (1889—1903). Въ то же время онъ былъ съ 1882 г. членомъ высшаго совѣта по Народному Образованію (Conseil supérieur de l'Instruction publique), съ 1908 г.—его вицепредсѣдателемъ.

Но мы не будемъ останавливаться на этой сторонѣ его дѣятельности при всей ея важности для Франціи,—въ Сорбоннѣ она сказалась происшедшей за это время реконструкціей преподаванія—созданіемъ новыхъ лабораторій и каѳедръ.

Въ области средняго образованія литературнымъ памятникомъ его интереса къ средней школѣ является Cours complet pour la Classe de Mathématiques A, B, publié sous la diréction de M. Darboux, въ который вошли какъ отдѣльныя части: Ариѳметика J. Tannery, Геометрія J. Hadamard'a, Аммебра и Тригонометрія C. Bourlet и Космографія Tisserand'a и Andoyer.

Нельзя обойти молчаніемъ дѣятельность Дарбу на почвѣ научной журналистики. Въ 1870 г. вмѣстѣ съ J. Houël'емъ Дарбу явился основателемъ и первымъ редакторомъ Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques (впослѣдствіи въ 1884 г. преобразовавшагося въ Bulletin des Sciences mathématiques) [1], въ Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure онъ съ 1885 по 1901 Secrétaire de la publication, съ 1901—Directeur de la publication.

Онъ являлся представителемъ Франціи на различныхъ международныхъ конгрессахъ и въ международныхъ научныхъ предпріятіяхъ; въ частности онъ принималъ дѣятельное участіе въ Association Internationale des Académies, имѣющей цѣлью изданіе международнаго каталога научной литературы и другія международныя научныя предпріятія.

Хотя центръ тяжести научныхъ интересовъ Дарбу лежалъ въ области геометріи, но и въ области анализа ему принадлежитъ рядъ весьма цѣнныхъ изслѣдованій. Какъ указываетъ C. Jordan въ своемъ отзывѣ при присужденіи Darboux въ 1884 г. первой преміи Petit D'Ormoy, всѣ его работы отличаются чрезвычайной ясностью, глубокимъ знаніемъ всѣхъ средствъ анализа, рѣдкимъ умѣньемъ связывать вопросы повидимому различные и восходить къ истиннымъ началамъ предложеній, чтобы дать имъ всю доступную имъ общность.

C. Jordan отличаетъ на первомъ мѣстѣ Mémoire sur les fonctions discontinues (Ann. Ecole Norm. (2) t. IV. p. 57—112. t. VIII. p. 195—202 (1874—9), въ которомъ авторъ подвергаетъ пересмотру основанія теоріи функцій. Авторъ беретъ со всѣми надлежащими развитіями опредѣленіе интеграла по Риману доказываетъ теорему, позволяющую самымъ точнымъ образомъ установить условія интегрируемости и показываетъ, какъ

[1]) Дарбу напечаталъ въ немъ 67 рефератовъ и анализовъ собраній сочиненій, книгъ и мемуаровъ.

это опредѣленіе приводитъ къ безчисленному множеству функцій, не имѣющихъ производной.

Отмѣтимъ простые примѣры $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\operatorname{Sin}[(n+1)!x]}{n!}$ и $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\operatorname{Cos} a_n x}{a_n}$ если положить число a_n удовлетворяютъ условію $\lim\limits_{n=+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{a_n} = 0$. Въ рядѣ мемуаровъ Дарбу занимается разложеніями въ ряды. Отмѣтимъ въ особенности Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en serie (J. Liouv. (3) IV. p. 557, 377—407). Авторъ занимается установленіемъ точныхъ признаковъ для опредѣленія величины членовъ тригонометрическаго ряда и примѣняетъ полученные результаты къ вопросу, поставленному Лапласомъ въ Calcul des probabilités о приближенномъ вычисленіи функцій очень большого числа. Прилагаетъ свою методу Дарбу къ Лежандровымъ полиномамъ, къ ряду Лагранжа, къ полиномамъ Jacobi-Чебышева и затѣмъ къ разложеніямъ по этимъ функціямъ.

Наибольшій интересъ вызывали у Darboux однако дифференціальныя уравненія. Здѣсь мы имѣемъ во-первыхъ его работу объ особенныхъ рѣшеніяхъ дифференціальнаго уравненія 1-го порядка (Bull. Soc. phil. 6-e s. 23.XI.1872 p. 180—186 и особенно Bull. Sc. Math. t. 4. 1873 p. 158—173), въ которой разрѣшается парадоксъ установленіемъ, что дифференціальное уравненіе 1-го порядка особеннаго рѣшенія вообще не имѣетъ, и что методъ Лагранжа даетъ вообще геометрическое мѣсто особенныхъ точекъ интегральныхъ кривыхъ, а не ихъ огибающую, т. е. особенное рѣшеніе. Завершая длинную полемику, мемуаръ давалъ удовлетворительное для своего времени рѣшеніе. Окончательное разъясненіе было однако возможно только съ привлеченіемъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго и дано Hamburger'омъ (Crelle's J. B. 112).

Аналогичную работу далъ позже Darboux для уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка: Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du 1-er ordre (Mém. sav. étr. t. 27. 1880, 243 p.), являвшуюся отвѣтомъ на тему, заданную на Grand Prix des Sciences mathématiques и увѣнчанную Академіей (отчетъ J. Bertrand'a C. R. 1877 t. 84 p. 804). Въ числѣ другихъ результатовъ мемуаръ содержитъ точное установленіе характера особенныхъ рѣшеній, правила опредѣленія ихъ по самому дифференціальному уравненію; изученіе соотношеній прикосновенія между особеннымъ рѣшеніемъ и интегралами полными и общими, наконецъ распространеніе на уравненія въ частныхъ производныхъ метода интегрированія при помощи дифференцированія.

Въ области интегрированія дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ идетъ затѣмъ обширный Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Bull. Sc. math. (2) t. II 1878 p. 60—96, 123—144, 151—200), въ которомъ устанавливается цѣлый рядъ уравненій, интегрируемыхъ подобно уравненію Jacobi при помощи частныхъ рѣшеній. Уравненія эти получили названіе уравненія Darboux. Свои результаты Darboux распространилъ затѣмъ на системы алгебраическихъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (C. R. t. 86. 1877. p. 1012—1014).

По отношенію къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ необходимо отмѣтить работы Дарбу, относящіяся къ уравненіямъ въ частныхъ производныхъ 2-го порядка (C. R. t. 70. 1870 p. 675—678, 746—749, и полнѣе Ann. Ec. Norm. t. 7. 1870 p. 163—173) и представляющія наиболѣе существенное, что достигнуто въ этой области послѣ Монжа и Ампера. Дарбу даетъ основанія метода, который приложимъ къ уравненіямъ любого порядка съ любымъ числомъ перемѣнныхъ и м. б. распространенъ даже на совокупныя уравненія. Онъ даетъ собственно два метода,—одинъ соотвѣтствующій методу Cauchy, другой—методу Якоби для уравненій 1-го порядка. Они пополняютъ методъ Монжа, когда онъ непримѣнимъ, и приводятъ къ цѣли всегда, когда имѣемъ дѣло съ интегралами, не содержащими знака квадратуръ, т. е. Амперовыми интегралами 1-го класса. (Мемуаръ Дарбу переведенъ на нѣмецкій языкъ въ приложеніи къ нѣмецкому переводу Maser'a книги P. Mansion Theorie d. partiellen Differentialgleichungen l. Ordnung.

Разумѣется, этимъ далеко не исчерпывается все, что сдѣлано Дарбу въ области анализа. Прежде всего вся его четырехтомная Théorie des surfaces посвящена съ аналитической стороны интегрированію различныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ. И въ другихъ работахъ по геометріи и по механикѣ рѣшаются тѣ или другіе вопросы анализа, необходимые для разрѣшенія поставленнаго вопроса прикладной математики. Такъ, въ статьяхъ Sur la composition des forces en statique (Bull. Sc. math. t. IX. 1875 p. 287) и въ статьѣ Sur le théorème fondamental de la géométrie projective (Math. Ann. t. XII p. 56—58) Дарбу занимается функціональнымъ уравненіемъ

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

и доказываетъ, что единственнымъ его рѣшеніемъ будетъ $\varphi(x)=A.x$, если наложить на $\varphi(x)$ одно единственное условіе—принимать въ какомъ-н. интервалъ только такія положительныя и отрицательныя значенія, которыя по абсолютной величинѣ менѣе опредѣленнаго предѣла.

Наконецъ въ Théorie des Surfaces опубликовано то, что сдѣлано Дарбу въ области варіаціоннаго исчисленія. Дарбу принадлежитъ честь дать одновременно и независимо отъ Вейерштрасса методъ, носящій имя послѣдняго [1]). Правда, онъ далъ его въ примѣненіи къ частнымъ случаямъ геодезическихъ линій и нѣкоторыхъ вопросовъ механики, но методъ самъ собою распространяется на общій случай, какъ это и показалъ Кнезеръ, введя понятіе трансверсальности.

Затруднительнѣе дать детальную оцѣнку работѣ Дарбу по геометріи. Въ библіографическомъ спискѣ, приводимомъ E. Lebon'омъ l. c. и оканчивающемся 1910 годомъ, геометрическихъ работъ Дарбу перечислено по геометріи дифференціальной 75 мемуаровъ и замѣтокъ (сверхъ указанныхъ выше двухъ капитальныхъ сочиненій и вышедшихъ отдѣльно Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré 1872 p. 89 и Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires 1873 p. XIII+340 напечатанныхъ первоначально въ Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux; сюда же относятся 6 замѣтокъ отнесенныхъ къ математической физикѣ и относящихся къ поверхности волны (5) и приложенію методовъ математической физики къ тѣламъ, ограниченнымъ циклидами; къ синтетической геометріи относится 16 замѣтокъ и 28—къ аналитической геометріи (изъ нихъ 18—примѣчанія къ Application de l'Algèbre à la Géométrie Bourdon'a) и двѣ рѣчи: Etude sur le Développement des Méthodes géométriques—сообщеніе прочтенное на Международномъ Конгрессѣ во время Всемірной Выставки въ С.-Луи въ секціи прикладной математики 24.IX.1904 (на русскій языкъ переведена С. П. Слугиновымъ) и Les origines les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale—рѣчь произнесенная на III международномъ математическомъ конгрессѣ въ Римѣ 17.IV.1908 г.

Въ своей небольшой рѣчи L'esprit de géométrie et l'esprit de finesse (напечатано въ изданномъ къ юбилею Дарбу сборникѣ Eloges académiques et discours) произнесенной имъ на банкетѣ, данномъ ему объединеніемъ Scientia 28.VI.1900. Дарбу напоминаетъ тотъ пассажъ B. Pascal'я (Pensées 21.IX n° II. Différence entre l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse) въ которомъ Pascal говоритъ, что геометры разсуждаютъ хорошо на основаніи своихъ принциповъ, легко различимыхъ, грубыхъ, умы же тонкіе, принужденные оперировать съ принципами, очень многочислен-

---

[1]) Какъ указываетъ J. Hadamard (Leçons sur le calcul des variations, t. I, p. 381) Дарбу началъ излагать свой методъ въ $186^{6}/7$ году на лекціяхъ въ Collège de France.

ными и столь не связанными, что легко упустить какой-нибудь, принуждены схватывать вещь съ одного взгляда.

Дарбу находитъ, что этой параллелью, ему несовсѣмъ понятной, Паскаль погрѣшилъ противъ математиковъ: если математическій языкъ и формулы требуютъ выучки, то къ тому же быстро идутъ и другія науки. Что касается самого Дарбу, для него esprit géométrique—геометрическій духъ рисовался совсѣмъ иначе,—онъ противопоставлялъ его чисто-аналитическимъ выкладкамъ. Очень характерно для него то мѣсто въ его римской рѣчи, гдѣ онъ говоритъ о роли аналитико-геометрическаго метода. Указавъ, что въ геометріи дифференціальной совсѣмъ оставлено направленіе, стремившееся создать изъ нея доктрину, независимую отъ анализа,—направленіе, начатое Jacobi, продолженное J. Bertrand'омъ и Os. Bonnet, и почти исключительно господствуютъ методы аналитическіе, примѣняющіе оси координатъ, Дарбу говоритъ, что онъ далекъ отъ осужденія этого стремленія, при условіи, чтобы изслѣдованіе оживлялось и вдохновлялось непрерывно геометрическимъ духомъ, который всегда долженъ присутствовать. Для поясненія Дарбу приводитъ примѣръ изъ личныхъ воспоминаній. Лѣтъ 30 тому назадъ, аналитикъ изъ самыхъ выдающихся принесъ Дарбу работу, только что имъ оконченную, о поверхности развертывающейся, описанной около сферы и около поверхности 2-го порядка; при помощи своихъ изящныхъ формулъ, симметричныхъ и умѣло выведенныхъ, онъ пришелъ къ заключенію, что ребро возврата этой развертывающейся должно быть ректифицируемо алгебраически, и былъ очень изумленъ, когда Дарбу указалъ ему, что этотъ результатъ, не лишенный самъ по себѣ интереса, очевиденъ геометрически, и относится ко всякой развертывающейся, описанной около сферы, ибо ребро возврата есть одна изъ развертокъ кривой прикосновенія развертывающейся со сферою.

Итакъ, будемъ слѣдовать аналитическимъ методамъ, но не будемъ слѣдовать имъ слѣпо,—вотъ мораль, которую извлекаетъ изъ этого случая Дарбу и которой слѣдовалъ всегда онъ самъ,—сводить аналитическій аппаратъ къ возможному минимуму, замѣняя, гдѣ можно, счетъ геометрическими соображеніями. «Какъ большая дорога, аналитическій методъ хорошъ, онъ даетъ пути самые надежные, но проселки (chemins de traverse) имѣютъ свою прелесть и гораздо лучше освѣщаютъ истинную связь вещей». Этого метода держался Дарбу и въ своихъ работахъ объ особенныхъ рѣшеніяхъ, гдѣ геометрическая интерпретація играетъ не послѣднюю роль въ изслѣдованіи.

Все многообразіе его личныхъ результатовъ нѣсколько скрадывается тѣмъ, что онъ переплавилъ при помощи однообразнаго метода въ одно цѣлое предыдущіе результаты и собственныя изслѣдованія въ величественномъ зданіи своей Théorie des surfaces. «Аналитическіе методы иногда упрекаютъ въ длиннотахъ и темнотѣ, утверждаютъ даже, что постоянное пользованіе координатами имѣетъ въ себѣ что-то искусственное. Примѣненіе подвижнаго тріедра и метода относительныхъ движеній, комбинируемое съ разсудительнымъ выборомъ криволинейныхъ координатъ, устраняетъ въ большинствѣ случаевъ эти упреки,—такъ характеризуетъ Дарбу въ своей рѣчи свой излюбленный пріемъ, которымъ онъ систематически пользуется въ своей Théorie des surfaces.

Ограничимся напоминаніемъ его м. б. наиболѣе блестящаго открытія,—новой системы триортогональныхъ поверхностей, которую онъ присоединилъ къ открытому ранѣе случаю софокусныхъ поверхностей 2-й степени.

Наша попытка охарактеризовать научную физіономію была бы неполна, если бы мы не упомянули о работахъ Дарбу по механикѣ, занимающихъ 36 нумеровъ въ спискѣ его сочиненій. Извѣстно, что значеніе и интересъ курса механики Despeyrous—въ тѣхъ многочисленныхъ (числомъ 22) примѣчаніяхъ, которыя присоединилъ къ этому курсу Дарбу, извлекши ихъ изъ своихъ мемуаровъ и замѣтокъ въ Mémoires de Bordeaux и Bull. des Sc. mathém. Не будемъ перечислять ихъ содержанія (въ книжкѣ E. Lebon'а приведенъ анализъ ихъ, сдѣланный Ph. Gilbert'омъ). Ограничимся указаніемъ на вышедшій отд. книжкою и также первоначально напечатанный въ Mém. de Bordeaux его Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constante, appliquées en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de position dans l'espace. 1877—8. IV+61 p.

Таково обширное наслѣдство, оставленное ученому міру сошедшимъ въ могилу французскимъ геометромъ, съ 1906 г. состоявшимъ почетнымъ членомъ Харьковскаго Математическаго Общества.

Д. Синцовъ.

О среднемъ значенiи числа классовъ чисто коренныхъ формъ отрицательнаго опредѣлителя.

И. М. Виноградова (Петроградъ).

Гауссъ въ art. 302 своего сочиненія Disquisitiones Arithmeticae безъ доказательства даетъ формулу для средняго значенія числа классовъ чисто коренныхъ квадратичныхъ формъ отрицательнаго опредѣлителя, прибавляя, что эта формула получена съ помощью довольно труднаго теоретическаго изслѣдованія (per disquisitionem theoreticam satis difficilem).

Въ настоящей работѣ мы имѣемъ въ виду вывести формулу Гаусса съ указаніемъ верхняго предѣла погрѣшности, основываясь на довольно элементарныхъ соображеніяхъ. Въ работѣ, которая вскорѣ появится въ печати, мы совершенно инымъ путемъ трактовали тотъ же вопросъ, но тогда могли указать верхній предѣлъ погрѣшности порядка $m^{5/6}\log m$, а въ настоящей работѣ устанавливаемъ верхній предѣлъ порядка $m^{3/4}(\log m)^2$.

§ 1. Выводъ асимптотическаго выраженія для обобщенной суммы Гаусса.

Пусть n и λ обозначаютъ числа, удовлетворяющія условіямъ

$$n \geqq 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$-1 < \lambda < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ξ — цѣлое число, удовлетворяющее условію

$$0 < \xi \leqq \frac{n}{4} - \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

и наконецъ η и T положительныя числа, причемъ η можетъ безпредѣльно убывать, а T можетъ безпредѣльно возрастать.

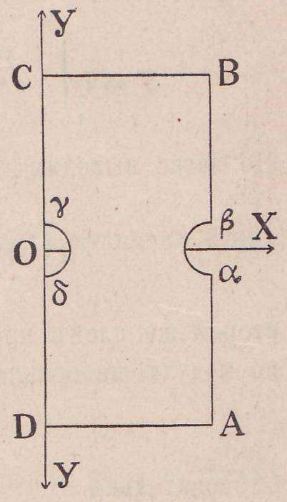
Будемъ разсматривать на плоскости комплекснаго перемѣннаго $z = x + yi$ область Ω, ограниченную контуромъ $A\alpha\beta BC\gamma\delta DA$ (черт. 1), состоящимъ изъ прямыхъ

$$x = 0,\ x = \xi,\ y = T,\ y = -T$$

и полуокружностей радіуса η, описанныхъ вокругъ точекъ 0 и ξ, которыми эти точки изъ области исключаются. Въ области Ω (внутри и на контурѣ) функція

$$\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+z)^2}}{e^{2\pi i z}-1}$$

не имѣетъ другихъ особенныхъ точекъ кромѣ полюсовъ $z = k$, съ вычетами $\dfrac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}}{2\pi i}$, гдѣ k пробѣгаетъ всѣ цѣлыя числа, которыя > 0 и $< \xi$.



Черт. 1.

Отсюда по извѣстной теоремѣ Коши объ интегрированіи по контуру заключаемъ, что сумма

$$\sum_{k>0}^{k<\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}$$

представится слѣдующею суммой интеграловъ функціи $\dfrac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+z)^2}}{e^{2\pi i z}-1}$

$$\int_{A\alpha}+\int_{\alpha\beta}+\int_{\beta B}+\int_{BC}+\int_{C\gamma}+\int_{\gamma\delta}+\int_{\delta D}+\int_{DA}$$

Но легко показать, что каждый изъ интеграловъ $\int_{BC}$ и $\int_{DA}$ въ предѣлѣ при $T=\infty$ обращается въ 0 и далѣе, что

$$\underset{\eta=0}{\text{пред.}}\left(\int_{\alpha\beta}+\int_{\gamma\delta}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{n}\lambda^2} - \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+\xi)^2}$$

Поэтому можемъ написать

$$\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{n}\lambda^2} + \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+\xi)^2} + \sum_{k>0}^{k<\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2} =$$

$$= \underset{\eta=0,\ T=\infty}{\text{предѣлъ}}\left(-i\int_\eta^T \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+yi)^2}}{e^{-2\pi y}-1}dy - i\int_\eta^T \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda-yi)^2}}{e^{2\pi y}-1}dy\right) +$$

$$+ \underset{\eta=0,\ T=\infty}{\text{предѣлъ}}\left(i\int_\eta^T \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+\xi+yi)^2}}{e^{-2\pi y}-1}dy + i\int_\eta^T \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+\xi-yi)^2}}{e^{2\pi y}-1}dy\right) \quad . \ . \ . \ (4)$$

Первое слагаемое правой части равенства (4) обозначимъ чрезъ S', а второе чрезъ S''. Послѣ простыхъ преобразованій получимъ

$$S'=i\int_0^\infty e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+yi)^2}dy+ie^{\frac{2\pi i}{n}\lambda^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{4\pi\lambda}{n}y}-e^{\frac{4\pi\lambda}{n}y}}{e^{2\pi y}-1}e^{-\frac{2\pi i}{n}y^2}dy \quad . \; . \; (5)$$

Не легко выводимъ равенство

$$i\int_0^\infty e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+yi)^2}dy=i\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}t^2}dt-\int_0^\lambda e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt$$

второй же членъ правой части равенства (5) въ силу условій (1) и (2) по модулю не больше

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{e^{2\pi y}-1}dy=\frac{1}{\pi}$$

Слѣдовательно

$$S'=i\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}t^2}dt-\int_0^\lambda e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt+\frac{\theta'}{\pi};\ |\theta'|\leqq 1$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ и пользуясь условіемъ (3), найдемъ

$$S''=-i\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}t^2}dt+\int_0^{\lambda+\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt+\frac{\theta''}{\pi};\ |\theta''|\leqq 1$$

На основаніи всего доказаннаго мы равенство (4) можемъ представить такъ

$$\sum_{k=1}^{k=\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}=\int_\lambda^{\lambda+\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt+2\theta''';\ |\theta'''|<1$$

Отсюда легко заключить, что

$$\sum_{k=1}^{k=\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}=O(\sqrt{n}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Положимъ далѣе

$$\xi=\left[\frac{n}{4}-\lambda\right]$$

Въ этомъ случаѣ разность $\xi-\left[\frac{n}{4}\right]$ по модулю не больше 1. Далѣе легко видѣть, что каждый изъ интеграловъ

$$\int_0^\lambda e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt;\quad \int_{\lambda+\xi}^\infty e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt$$

по модулю не больше 1. Поэтому, замѣчая что

$$\int_0^\infty e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}\,dt = \frac{1+i}{4}\sqrt{n}$$

будемъ имѣть

$$\sum_{k>0}^{k<\frac{n}{4}} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2} = \frac{1+i}{4}\sqrt{n} + 5\theta;\ |\theta| < 1 \ \ldots\ldots\ldots \ (7)$$

§ 2. Опредѣленіе порядка, котораго не превосходитъ порядокъ суммъ $\sum\limits_{x>P}^{x\leqq Q} \sin 2\pi\left(\frac{n}{x} - Ax\right)$ и $\sum\limits_{x>P}^{x\leqq Q} \cos 2\pi\left(\frac{n}{x} - Ax\right)$.

1°. Пусть n обозначаетъ число, удовлетворяющее условію

$$n \geqq 16 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

R и A любыя числа и λ, P, Q—числа удовлетворяющія неравенствамъ

$$\sqrt[3]{n} \leqq \lambda + P \leqq \lambda + Q \leqq \sqrt{\frac{n}{2}} \ \ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Опредѣляя число x_s равенствомъ

$$\lambda + x_s = \sqrt{\frac{n}{s-A}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (3)$$

мы при помощи цѣлыхъ чиселъ μ и ν, найденныхъ изъ условій

$$x_{\mu+1} < P \leqq x_\mu$$
$$x_\nu < Q \leqq x_{\nu-1}$$

составимъ рядъ

$$x_{\mu+1} < x_\mu < x_{\mu-1} < \ldots < x_{\nu+1} < x_\nu < x_{\nu-1}$$

Сумму

$$S = \sum_{x>P}^{x\leqq Q} \sin 2\pi\left(R + \frac{n}{\lambda+x} - Ax\right)$$

разложимъ по схемѣ

$$S = \sum_{x>P}^{x\leqq x_\mu} + \sum_{x>x_\mu}^{x\leqq x_{\mu-1}} + \sum_{x>x_{\mu-1}}^{x\leqq x_{\mu-2}} + \ldots + \sum_{x>x_{\nu+1}}^{x\leqq x_\nu} + \sum_{x>x_\nu}^{x\leqq Q} \ \ldots \ (4)$$

Займемся опредѣленіемъ порядка, котораго не превосходитъ порядокъ одной изъ полученныхъ суммъ. Для того, чтобы одновременно разсмотрѣть всѣ случаи, обратимся къ суммѣ

$$T = \sum_{x>a}^{x\leqq b} \sin 2\pi\left(R + \frac{n}{\lambda+x} - Ax\right),$$

гдѣ a и b цѣлыя числа, удовлетворяющія неравенствамъ

$$x_s \leqq a \leqq b \leqq x_{s-1},$$

причемъ s обозначаетъ одно изъ чиселъ

$$\mu+1,\ \mu,\ \mu-1, \ldots \nu+1,\ \nu$$

Замѣчая, что функція sx при цѣлыхъ x принимаетъ цѣлыя значенія, можемъ написать

$$T = \sum_{x>a}^{x\leqq b} \sin 2\pi\left(R + \frac{n}{\lambda+x} - Ax + sx\right) = \sum_{x>a}^{x\leqq b} \sin 2\pi\left(R + \frac{n}{\lambda+x} + \frac{nx}{(\lambda+x_s)^2}\right)$$

Отсюда послѣ очевидныхъ преобразованій получимъ неравенство

$$|T| < \left|\sum_{x>a}^{x\leqq b} \sin 2\pi \frac{n(x-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+x)}\right| + \left|\sum_{x>a}^{x\leqq b} \cos 2\pi \frac{n(x-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+x)}\right| \quad . \ (5)$$

2°. Разсматривая z, какъ комплексное перемѣнное

$$z = x + yi,$$

функцію

$$\phi(z) = \frac{n(z-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+z)}$$

представимъ такъ

$$\phi(z) = \varphi(x,\ y) + i\psi(x,\ y),$$

гдѣ

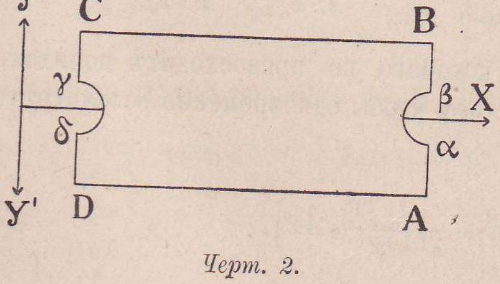
$$\varphi(x,\ y) = \frac{n}{(\lambda+x_s)^2}\,\frac{(x-x_s)^2(\lambda+x)+(-2x_s+x-\lambda)y^2}{(\lambda+x)^2+y^2}$$

$$\psi(x,\ y) = \frac{n}{(\lambda+x_s)^2}\,\frac{[(\lambda+x)^2-(\lambda+x_s)^2]y+y^3}{(\lambda+x)^2+y^2}.$$

Функція

$$\frac{e^{2\pi i\phi(z)}}{e^{2\pi iz}-1}$$

за исключеніемъ полюсовъ $z=k$, гдѣ k пробѣгаетъ всѣ цѣлыя числа, которыя $>a$ и $<b$, не имѣетъ особенныхъ точекъ въ области, (внутри и на контурѣ) ограниченной контуромъ $A\alpha\beta BC\gamma\delta DA$, (черт. 2.), состоящимъ изъ прямыхъ $x=a$, $x=b$, $y=T$, $y=-T$ и полуокружностей радіуса η, описанныхъ вокругъ точекъ a и b,



Черт. 2.

которыми эти точки изъ области исключаются. Примѣняя къ этой функціи теорему Коши объ интегрированіи по контуру, получимъ, разсуждая подобно тому, какъ въ § 1, общую формулу

$$\sum_{x>a}^{x<b} e^{2\pi i \frac{n(x-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+x)}} = -\text{пред.}_{\eta=0}\, i\int_\eta^T \left(\frac{e^{-2\pi\psi(a,\ y)}}{e^{-2\pi y}-1}+\frac{e^{2\pi\psi(a,\ y)}}{e^{2\pi y}-1}\right)e^{2\pi i\varphi(a,\ y)}dy+$$

$$+\text{пред.}_{\eta=0}\, i\int_\eta^T \left(\frac{e^{-2\pi\psi(b,\ y)}}{e^{-2\pi y}-1}+\frac{e^{2\pi\psi(b,\ y)}}{e^{2\pi y}-1}\right)e^{2\pi i\varphi(b,\ y)}dy+$$

$$+\int_a^b\left(\frac{-e^{-2\pi\psi(x,\ T)}}{e^{2\pi ix-2\pi T}-1}+\frac{e^{2\pi\psi(x,\ T)}}{e^{2\pi ix+2\pi T}-1}\right)e^{2\pi i\varphi(x,\ T)}dy+\theta;\ |\theta|\leqq 1\ \ldots (6)$$

3^0. Число T мы положимъ равнымъ

$$T=\sqrt{x_{s-1}-x_s}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Тогда при

$$x_s\leqq x\leqq x_{s-1};\ 0\leqq y\leqq T$$

можемъ написать

$$\psi(x,\ y)=\frac{n}{(\lambda+x_s)^2}\,\frac{[(\lambda+x)^2-(\lambda+x_s)^2]y}{\lambda+x)^2}+\frac{\theta'}{2};\ |\theta'|\leqq 1\ \ldots (8)$$

Въ самомъ дѣлѣ на основаніи (3), (1) и (2) найдемъ

$$\frac{1}{6}<\frac{\sqrt{n}}{2\left(s-A\right)^{\frac{3}{2}}}<x_{s-1}-x_s<\frac{\sqrt{n}}{\left(s-A\right)^{\frac{3}{2}}}$$

и слѣдовательно

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}}<T<\sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}}\ \ldots\ldots (9)$$

Пользуясь найденными неравенствами, нетрудно заключить, что въ тождествѣ

$$\psi(x,\ y)=\frac{n}{(\lambda+x_s)^2}\,\frac{[(\lambda+x)^2-(\lambda+x_s)^2]y}{(\lambda+x)^2}+\frac{ny^3}{(\lambda+x)^2[(\lambda+x)^2+y^2]}$$

второй членъ правой части не больше $\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\leqq\frac{1}{2}$, чѣмъ равенство (8) доказано. Пользуясь (3), изъ равенства (8) легко выводимъ

$$\psi(x,\ y)\leqq y+\frac{1}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Обращаясь къ первому члену правой части равенства (6) видимъ, что по модулю онъ не больше

$$\int_0^T \left| e^{-2\pi\psi(a,\ y)} + \frac{e^{2\pi\psi(a,\ y)} - e^{-2\pi\psi(a,\ y)}}{e^{2\pi y} - 1} \right| dy$$

Замѣчая, что въ интервалѣ $(0,\ T)$ $\psi(a,\ y) \geqq 0$ получимъ

$$\int_0^T e^{-2\pi\psi(a,\ y)} dy < T$$

Разбивая далѣе интегралъ

$$\int_0^T \frac{e^{2\pi\psi(a,\ y)} - e^{-2\pi\psi(a,\ y)}}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

по схемѣ

$$\int_0^T = \int_0^{\frac{\log 2}{2\pi}} + \int_{\frac{\log 2}{2\pi}}^T$$

и замѣчая, что $2\psi(a,\ y) \leqq 3$ при $y \leqq 1$ видимъ, что первый интегралъ этой схемы не больше

$$\int_0^{\frac{\log 2}{2\pi}} \frac{e^{6\pi y} - 1}{e^{2\pi y} - 1} dy < 1$$

второй же интегралъ не больше интеграла

$$2\int_0^T e^{2\pi\psi(a,\ y) - 2\pi y} dy,$$

который въ силу неравенства (10) будетъ меньше

$$2e^{\pi}T$$

Итакъ первый членъ правой части равенства (6) по модулю будетъ меньше

$$(2e^{\pi} + 1)T + 1$$

Ко второму члену примѣнимы тѣже разсужденія, и онъ слѣдовательно по модулю будетъ также меньше

$$(2e^{\pi} + 1)T + 1$$

4°. Обратимся наконецъ къ третьему члену правой части равенства (6). Въ силу (9) по модулю онъ будетъ меньше

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}}} \left(\int_a^b e^{-2\pi\psi(x,\ T)} dx + \int_a^b e^{-2\pi T + 2\pi\psi(x,\ T)} dx \right) \quad . \ . \ . \ . \ (11)$$

Но изъ (8) слѣдуетъ неравенство

$$-\psi(x,\ y) < -\frac{x-x_s}{4T} + \frac{1}{2}$$

и потому первый интегралъ будетъ меньше

$$e^{\pi}\int_{x_s}^{x_{s-1}} e^{-\frac{(x-x_s)\pi}{2T}}\,dx < \frac{2e^{\pi}}{\pi}T$$

Второй же интегралъ на основаніи (8) будетъ меньше

$$e^{\pi}\int_{x_s}^{x_{s-1}} e^{2\pi T\left(\frac{n}{(\lambda+x_s)^2}-\frac{n}{(\lambda+x)^2}-1\right)}\,dx\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (12)$$

Но производная функціи

$$F(x) = \frac{n}{(\lambda+x_s)^2} - \frac{n}{(\lambda+x)^2} - 1$$

равна $\frac{2n}{(\lambda+x)^3}$. Эта производная при возрастаніи x отъ x_s до x_{s-1} убываетъ и наименьшее ея значеніе будетъ $\frac{2n}{(\lambda+x_{s-1})^3}$; сама же функція $F(x)$ возрастаетъ и при $x = x_{s-1}$ обращается во 0. Поэтому въ интервалѣ $(x_s,\ x_{s-1})$ можемъ положить

$$F(x) < -\frac{2n(x_{s-1}-x)}{(\lambda+x_{s-1})^3}$$

Выраженіе (12) окажется меньше

$$e^{\pi}\int_{x_s}^{x_{s-1}} e^{-\frac{4\pi T n(x_{s-1}-x)}{(\lambda+x_{s-1})^3}}\,dx < \frac{e^{\pi}(\lambda+x_{s-1})^3}{4\pi T n} < e^{\pi}T$$

и выраженіе (11) будетъ меньше

$$\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi}{3}}}\left(\frac{2e^{\pi}}{\pi}+e^{\pi}\right)T < 2e^{\pi}T$$

На основаніи найденнаго результата и доказаннаго въ пунктѣ 3⁰ изъ равенства (6) выводимъ

$$\left|\sum_{x>a}^{x\leqq b} e^{2\pi i\frac{n(x-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+x)}}\right| < (6e^{\pi}+2)T+4 < K\sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}},$$

гдѣ K постоянное число, независящее отъ a, b, n, λ. Отсюда на основаніи формулы (5) находимъ

$$|T| < 2K\sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}}$$

и далѣе на основаніи формулы (4)

$$|S| < 2K\sum_{s=\mu+1}^{s=\nu}\sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}} = 2K\sum_{s=\nu}^{s=\mu+1}\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(s-A)^{\frac{3}{4}}} < L\sqrt{\frac{n}{P}}, \quad (13)$$

гдѣ L постоянное число, независящее отъ чиселъ, участвующихъ въ выраженіи для суммы S.

5^0. Пусть въ суммѣ

$$S' = \sum_{x>P}^{x\leqq Q}\sin 2\pi\left(\frac{n}{x} - Ax\right)$$

числа P, Q, n связаны неравенствами

$$2\sqrt[3]{n} \leqq P \leqq Q \leqq \sqrt{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Можемъ написать

$$|S'| < \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=3}\left|\sum_{x>\frac{1}{4}P}^{x\leqq\frac{1}{4}Q}\sin 2\pi\left(\frac{\frac{n}{4}}{x+\frac{\varepsilon}{4}} - 4Ax + A\varepsilon\right)\right| + 8$$

Но такъ какъ при условіи (14)

$$\sqrt[3]{\frac{n}{4}} \leqq \frac{1}{4}P \leqq \frac{1}{4}Q \leqq \sqrt{\frac{n}{8}},$$

то къ каждой изъ полученныхъ суммъ примѣнимы заключенія предыдущаго пункта, если въ нихъ замѣнимъ n на $\frac{n}{4}$. Найдемъ при $\frac{n}{4} \geqq 16$

$$|S'| < 4L\sqrt{\frac{n}{P}}$$

Точно такъ же докажемъ, что при соблюденіи условіи (14)

$$\left|\sum_{x>P}^{x\leqq Q}\cos 2\pi\left(\frac{n}{x} - Ax\right)\right| < 4L\sqrt{\frac{n}{P}}$$

послѣ чего результаты настоящаго § можемъ формулировать такъ

Теорема. Если n данное число $\geqq 64$, A другое данное число и числа P и Q удовлетворяютъ неравенствамъ

$$2\sqrt[3]{n} \leqq P \leqq Q \leqq \sqrt{2n}$$

то можно положить

$$\left|\sum_{x>P}^{x\leqq Q} \sin 2\pi\left(\frac{n}{x} - Ax\right)\right| < N\sqrt{\frac{n}{P}}$$

$$\left|\sum_{x>P}^{x\leqq Q} \cos 2\pi\left(\frac{n}{x} - Ax\right)\right| < N\sqrt{\frac{n}{P}},$$

гдѣ N постоянное число независящее отъ n, A, P, Q.

§ 3. Формула Н. Я. Сонина.

Въ дальнѣйшемъ мы часто будемъ пользоваться извѣстною формулой Н. Я. Сонина, доказательство которой можно найти въ его статьѣ «Объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ, содержащемъ числовую функцію $[x]$». Варш. унив. изв. 1885 г. Согласно этой формулѣ, полагая

$$\varrho(x) = [x] - x + \frac{1}{2};\quad \sigma(x) = \int_0^x \varrho(x)dx$$

будемъ имѣть

$$\sum_{x>a}^{x\leqq b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) -$$

$$- \sigma(b)f'(b) - \sigma(a)f'(a) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

Пусть μ обозначаетъ наибольшее значеніе $|f'(x)|$ въ интервалѣ $(a,\ b)$. Тогда замѣчая, что

$$|\varrho(x)| \leqq \frac{1}{2};\quad |\sigma(x)| \leqq \frac{1}{8}$$

найдемъ

$$\sum_{x>a}^{x\leqq b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) + \frac{\theta}{2}\mu;\quad |\theta| \leqq 1 \quad . \ . \ . \ (1)$$

Если же предѣлъ $\lim\limits_{\xi=\infty} f'(\xi) = 0$ и $f''(\xi)$ не мѣняетъ знака въ интервалѣ $(a,\ \infty)$ выводимъ

$$\sum_{x>a}^{x\leqq b} f(x) = C + \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) + \frac{\theta}{4}f'(b),$$

гдѣ $|\theta| \leqq 1$ и C постоянное число, независящее отъ b.

§ 4. Воспомогательная формула изъ теоріи рядовъ Фурье.

Условимся символомъ $\{a\}$ обозначать дробь числа a, т. е. разность

$$a-[a]$$

Пользуясь извѣстнымъ изъ теоріи рядовъ Фурье соотношеніемъ

$$x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)$$

справедливымъ при

$$-\pi<x<\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и замѣчая, что при нецѣломъ a

$$x=2\pi\{a\}-\pi$$

всегда удовлетворяетъ условіямъ (1) получимъ

$$\{a\}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi a}{1}+\frac{\sin 4\pi a}{2}+\frac{\sin 6\pi a}{3}+\ldots\right),$$

если воспользуемся равенствомъ

$$\sin k(2\pi\{a\}-\pi)=(-1)^k \sin 2\pi a$$

Примѣняя къ ряду

$$\frac{\sin 2\pi a}{1}+\frac{\sin 4\pi a}{2}+\frac{\sin 6\pi a}{3}+\ldots$$

преобразованіе Абеля и замѣчая, что каковы бы ни были цѣлыя числа k и l, всегда

$$\left|\sin 2\pi k a+\sin 2\pi(k+1)a+\sin 2\pi(k+2)a+\ldots+\sin 2\pi(k+l)a\right|<\frac{2}{\sin \pi a}$$

найдемъ

$$\{a\}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi a}{1}+\frac{\sin 4\pi a}{2}+\frac{\sin 6\pi a}{3}+\ldots+\frac{\sin 2\pi N a}{N}\right)+$$
$$+\frac{4\theta}{\pi(N+1)\sin \pi a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ $|\theta|\leqq 1$. Для случая же, когда a цѣлое, имѣетъ мѣсто очевидное равенство

$$\{a\}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi a}{1}+\frac{\sin 4\pi a}{2}+\frac{\sin 6\pi a}{3}+\ldots+\frac{\sin 2\pi N a}{N}\right)-\frac{1}{2}\,. \quad (3)$$

§ 5. Порядокъ, котораго не превосходитъ порядокъ функціи $\tau(a)$.

Представивъ цѣлое число a въ видѣ

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

гдѣ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ обозначаютъ всѣ различные простые дѣлители числа a, мы для функціи $\tau(a)$, обозначающей число всѣхъ дѣлителей числа a, получимъ выраженіе

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$$

Обозначая буквою ε нѣкоторое положительное число $\leqq 1$ найдемъ

$$\frac{\tau(a)}{a^\varepsilon} \leqq \frac{\alpha_1 + 1}{2^{\varepsilon\alpha_1}} \cdot \frac{\alpha_2 + 1}{3^{\varepsilon\alpha_2}} \cdot \frac{\alpha_3 + 1}{4^{\varepsilon\alpha_3}} \ldots \frac{\alpha_k + 1}{(k+1)^{\varepsilon\alpha_k}}$$

Произведеніе правой части полученнаго неравенства разобьемъ на 2 произведенія, изъ которыхъ первое состоитъ изъ множителей вида $\frac{\alpha_i + 1}{(i+1)^{\varepsilon\alpha_i}}$, для которыхъ $i + 1 < e^{\frac{1}{\varepsilon}}$, или равно 1, если такихъ множителей нѣтъ. Второе же произведеніе состоитъ изъ остальныхъ множителей, или $= 1$, если ихъ нѣтъ. Въ первомъ произведеніи число множителей меньше $e^{\frac{1}{\varepsilon}}$ и каждый изъ нихъ не больше наибольшаго значенія функціи $\frac{2x}{2^{\varepsilon x}}$ (гдѣ $x \geqq 1$), равнаго $\frac{2}{\varepsilon e \log 2}$. Во второмъ же произведеніи, если оно не равно 1, каждый множитель $\frac{\alpha_i + 1}{(i+1)^{\varepsilon\alpha_i}}$ будетъ $< \frac{\alpha_i + 1}{e^{\alpha_i}}$ и слѣдовательно меньше наибольшаго (при $x \geqq 1$) значенія функціи $\frac{2x}{e^x}$, равнаго $\frac{2}{e} < 1$. Изъ сказаннаго слѣдуетъ неравенство

$$\tau(a) < Ma^\varepsilon,$$

гдѣ $M = \left(\frac{2}{\varepsilon e \log 2}\right)^{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}$ конечное число при всякомъ положительномъ ε.

§ 6. Асимптотическое выраженіе для суммы $\sum\limits_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]$.

Пусть n и x цѣлыя числа. Если n не дѣлится на x, то пользуясь формулою (2) § 4 и полагая $N=\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]$, получимъ равенство

$$\left\{\frac{n}{x}\right\}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{n}{x}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{n}{x}}{2}+\ldots+\frac{\sin 2\pi\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]\frac{n}{x}}{\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]}\right)+$$

$$+\frac{4\theta}{\pi\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\sin\pi\frac{n}{x}};\ |\theta|\leqq 1\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

Обозначивъ символомъ $R(x)$ абсолютно наименьшій вычетъ числа n по модулю x и пользуясь легко выводимымъ неравенствомъ

$$\sin 2\pi\frac{|R(x)|}{x}\geqq\frac{4|R(x)|}{x}$$

мы остаточный членъ равенства (1) можемъ представить въ формѣ

$$\theta'\frac{2\sqrt[3]{n}}{|\pi R(x)|};\ |\theta'|\leqq 1$$

Вспоминая же формулу (3) § 4 мы можемъ вообще написать

$$\left\{\frac{n}{x}\right\}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{n}{x}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{n}{x}}{2}+\ldots+\frac{\sin 2\pi\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]\frac{n}{x}}{\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]}\right)+\vartheta(x),$$

гдѣ $\vartheta(x)=-\frac{1}{2}$, или $|\vartheta(x)|\leqq\frac{2\sqrt[3]{n}}{\pi|R(x)|}$ смотря по тому, будетъ ли $n\equiv 0$ (Мод. x), или нѣтъ. Пользуясь выведеннымъ равенствомъ находимъ

$$\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{n}{x}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{n}{x}}{2}+\ldots+\frac{\sin 2\pi\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]\frac{n}{x}}{\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]}\right)+$$

$$+\theta''\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}n^{\frac{1}{3}}\vartheta(x);\ |\theta''|\leqq 1\quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

Но изъ равенства

$$S=\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{n}{x}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{n}{x}}{2}+\ldots+\frac{\sin 2\pi\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]\frac{n}{x}}{\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]}\right)=$$

$$=\sum_{t=1}^{t\leqq\frac{1}{2}n^{\frac{1}{6}}}\frac{1}{t}\sum_{x\geqq 2t\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}\sin 2\pi\frac{tn}{x}$$

согласно теоремѣ § 2 слѣдуетъ, что сумма S порядка

$$\sum_{t=1}^{t\leqq\frac{1}{2}n^{\frac{1}{6}}}\frac{1}{t}\sqrt{\frac{tn}{2t\sqrt[3]{n}}}=O(\sqrt[3]{n}\log n)\cdot$$

Обращаясь ко второму слагаемому суммы, стоящей въ правой части равенства (2), мы замѣтимъ, что число значеній x, для которыхъ $n\equiv 0$ (Мод. x) не больше $\tau(n)$. Вообще же число значеній x, для которыхъ $n\equiv\pm k$ (Мод. x), гдѣ $k<n$ заданное положительное цѣлое число будетъ не больше $\tau(n-k)+\tau(n+k)$. Замѣчая, что наибольшее значеніе суммы

$$\tau(n-k)+\tau(n+k);\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ [\sqrt{n}]$$

согласно § 5 меньше $M'n^{\varepsilon'}$, гдѣ $\varepsilon'>0$ и M' конечное постоянное число, найдемъ

$$\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}n^{\frac{1}{3}}\vartheta(x)=O\left[n^{\frac{1}{3}+\varepsilon'}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}\right]}\right)\right]=$$

$$=O\left(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon'}\log n\right)$$

Поэтому пользуясь равенствомъ (2) и замѣчая что

$$\sum_{x=1}^{x\leqq 2\sqrt[3]{n}}\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}-\frac{1}{2}\right)=O\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$$

можемъ написать

$$\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{n}}\left\{\frac{n}{x}\right\}=\frac{\sqrt{n}}{2}+O\left(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right), \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ ε постоянное положительное число, сколь угодно близкое къ 0. Примѣняя далѣе къ суммѣ

$$n+\sum_{x>1}^{x\leqq\sqrt{n}}\frac{n}{x}$$

формулу (2) § 3 получимъ

$$\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{n}}\frac{n}{x}=nE+\frac{n}{2}\log n+\sqrt{n}[\sqrt{n}]-n+\frac{1}{2}\sqrt{n}+\frac{\theta}{4}, \quad \ldots (4)$$

гдѣ E обозначаетъ постоянную Эйлера и $|\theta|\leqq 1$. Изъ равенствъ (3) и (4) слѣдуетъ

$$\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]=nE+\frac{n}{2}\log n+\sqrt{n}[\sqrt{n}]-n+O\left(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

Вставляя найденное выраженіе для $\sum\limits_{x>0}^{x\leqq\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]$ въ извѣстную формулу

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]=2\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]-[\sqrt{n}]^2$$

получимъ послѣ упрощеній асимптотическое равенство

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]=n(\log n+2E-1)+O\left(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

§ 7. Вспомогательныя предложенія, служащія для вывода формулы Гаусса. Асимптотическое выраженіе для суммы $\sum\limits_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}$.

1°. Пусть m, a и α обозначаютъ данныя цѣлыя числа, причемъ a и α положительны. Число всѣхъ различныхъ простыхъ дѣлителей числа a мы обозначимъ чрезъ k; тогда число рѣшеній сравненія

$$x^2+m\equiv t \pmod{a}$$

будетъ не болѣе 2^{k+2}. Положимъ

$$\mu=\left[\frac{\alpha}{a}\right]+1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Тогда въ рядѣ абсолютно наименьшихъ вычетовъ чиселъ

$$m+1^2,\ m+2^2,\ m+3^2,\ \ldots,\ m+\alpha^2$$

будетъ не болѣе $\mu 2^{k+3}$ по модулю равныхъ t, если t удовлетворяетъ условію

$$0 \leqq t \leqq \frac{a}{2}$$

Принявъ сказанное во вниманіе и примѣняя къ дроби $\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}$ въ случаѣ, когда она равна O формулу (3) § 4 и формулу (2) того же § въ противномъ случаѣ, получимъ

$$\sum_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{m+x^2}{a}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{m+x^2}{a}}{2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\sin 2\pi N\frac{m+x^2}{a}}{N}\right)+\theta\frac{\mu 2^{k+3}}{N}\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{t=1}^{t\leqq\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{\pi t}{a}}\right);\ |\theta|<1$$

Но замѣчая, что

$$\sum_{t=1}^{t\leqq\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{\pi t}{a}}=O(a\log a)$$

мы послѣднее равенство можемъ переписать такъ

$$\sum_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{t=1}^{t=N}\frac{1}{t}\sum_{x=1}^{x=\alpha}\sin 2\pi t\,\frac{m+x^2}{a}+O\left(\frac{\mu 2^k a\log a}{N}\right)\quad . \ . \ (2)$$

2°. Сумма

$$S_t=\sum_{x=1}^{x=\alpha}\sin 2\pi t\,\frac{m+x^2}{a}$$

представляетъ собою коэффиціентъ при i въ выраженіи для суммы

$$\Omega_t=\sum_{x=1}^{x=\alpha}e^{2\pi i\frac{m+x^2}{4n}}$$

гдѣ

$$n=\frac{a}{4t}\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Сумму Ω_t разложимъ по схемѣ

$$\Omega_t = \sum_{x>0}^{x\leqq n} + \sum_{x>n}^{x\leqq 2n} + \sum_{x>2n}^{x\leqq 3n} + \ldots + \sum_{x>\left[\frac{\alpha}{n}\right]n}^{x=\alpha} \quad \ldots \ldots . (4)$$

Изъ легко выводимыхъ соотношенiй

$$\sum_{x>2sn}^{x\leqq(2s+1)n} e^{2\pi i \frac{m+x^2}{4n}} = e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} \sum_{k>0}^{k<n} e^{\frac{2\pi i}{4n}\left(-\{sn\}+k\right)^2} + O(1)$$

$$\sum_{x>(2s-1)n}^{x\leqq 2sn} e^{2\pi i \frac{m+x^2}{4n}} = e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} \sum_{k>0}^{k<n} e^{\frac{2\pi i}{4n}\left(\{sn\}+k\right)^2} + O(1)$$

воспользовавшись формулою (7) § 1 найдемъ

$$\sum_{x>2sn}^{x\leqq(2s+1)n} e^{2\pi i \frac{m+x^2}{4n}} = \frac{1+i}{2}\sqrt{n}\, e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} + O(1)$$

$$\sum_{x>(2s-1)n}^{x\leqq 2sn} e^{2\pi i \frac{m+x^2}{4n}} = \frac{1+i}{2}\sqrt{n}\, e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} + O(1)$$

Наконецъ, примѣнивъ аналогичныя преобразованiя къ послѣдней суммѣ схемы (4), получимъ согласно формулѣ (6) § 1

$$\sum_{x>\left[\frac{\alpha}{n}\right]n}^{x=\alpha} e^{2\pi i \frac{m+x^2}{4n}} = O(\sqrt{n})$$

На основанiи всего изложеннаго изъ формулы (4) выводимъ

$$\Omega_t = (1+i)\sqrt{n} \sum_{s-1}^{s\leqq\frac{\alpha}{2n}} e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} + O\left(\frac{\alpha}{n}+\sqrt{n}\right)$$

Отсюда, согласно сказанному въ началѣ пункта и вспоминая равенство (3) находимъ

$$S_t = \sqrt{\frac{a}{4t}} \sum_{s=1}^{s\leqq\frac{2\alpha}{a}t} \left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)\right] +$$

$$+ O\left(\frac{\alpha}{a}t + \sqrt{\frac{a}{t}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots . (5)$$

Введемъ въ разсмотрѣнiе число $M \geqq 1$, выборомъ котораго распорядимся ниже и положимъ

$$N = [M]$$

Тогда пользуясь (5) равенство (2) напишемъ такъ

$$\sum_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{\sqrt{a}}{t^{\frac{3}{2}}}\sum_{s>0}^{s\leqq\frac{2\alpha}{a}t}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)\right]+O\left(\frac{M\alpha}{a}+\sqrt{a}+\left(\frac{\alpha}{a}+1\right)\frac{2^k a\log a}{M}\right)\quad . \quad . \ (6)$$

3⁰. Положивъ $\alpha\leqq a$ мы формулу (6) напишемъ такъ

$$\sum_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}+O\left(\sqrt{a}\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{1}{\sqrt{t}}+M+\frac{2^k a\log a}{M}\right)$$

Отсюда, полагая

$$M=a^{\frac{2}{3}}{}^{k}a^{\frac{1}{3}}\left(\log a\right)^{\frac{2}{3}}$$

найдемъ на основанiи § 5

$$\sum_{x=0}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}+O\left(a^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2^k\log a}\right)=\frac{\alpha}{2}+O\left(a^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right)$$

4⁰. Въ частности положимъ

$$\alpha=2a$$

Тогда въ равенствѣ (6) сумма, соотвѣтствующая данному t, напишется такъ

$$S'_t=\sum_{s>0}^{s=4t}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)\right]$$

Пусть d есть общiй наибольшiй дѣлитель чиселъ a и $4t$. При помощи цѣлыхъ чиселъ

$$\sigma=\frac{a}{d};\quad \tau=\frac{4t}{d}$$

мы сумму S'_t напишемъ такъ

$$S'_t=\sum_{s>0}^{s=\tau d}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{\sigma s^2}{\tau}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{\sigma s^2}{\tau}\right)\right]$$

Разбивая далѣе S'_t по схемѣ

$$S'_t=\sum_{s>0}^{s=\tau}+\sum_{s>\tau}^{s=2\tau}+\ldots+\sum_{s>\tau d-\tau}^{s=\tau d}$$

мы видимъ, что каждая изъ d суммъ этой схемы приводится къ суммѣ

$$\sum_{s>0}^{s=\tau}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{\sigma s^2}{\tau}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{\sigma s^2}{\tau}\right)\right],$$

которая въ силу того, что числа σ и τ взаимно простыя, будетъ порядка $\sqrt{\tau}$. Слѣдовательно S'_t будетъ порядка

$$d\sqrt{\tau}=O(\sqrt{td})$$

Обозначимъ далѣе символомъ $\delta(t)$ общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и t тогда $d\leqq 4\delta(t)$ и слѣдовательно

$$S'_t=O\left(\sqrt{t\delta(t)}\right)$$

Пользуясь найденнымъ результатомъ, изъ формулы (6) выводимъ

$$\sum_{x=1}^{x=2a}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=a+O\left(\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{\sqrt{a\delta(t)}}{t}+M+\sqrt{a}+\frac{2^k a\log a}{M}\right) \quad . \; . \; (7)$$

Но пусть α пробѣгаетъ всѣ различные дѣлители числа a. Тогда

$$\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{\sqrt{a\delta(t)}}{t}=O\left(\sum_{\alpha}\sqrt{a\alpha}\sum_{t>0}^{t\leqq\frac{M}{\alpha}}\frac{1}{\alpha t}\right)=O\left(\sqrt{a}\log M\sum_{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

и такъ какъ обозначая чрезъ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ различные простые дѣлители числа a, найдемъ

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=O\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{p_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{p_2}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\sqrt{p_k}}\right)}\right)=O(2^k),$$

то можемъ написать

$$\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{\sqrt{a\delta(t)}}{t}=O(2^k\sqrt{a}\log M)$$

Поэтому, полагая $M=\sqrt{a}$, найдемъ изъ (7)

$$\sum_{x=1}^{x=2a}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=a+O(2^k\sqrt{a}\log a)$$

Отсюда получаются такія асимптотическія равенства

$$\sum_{x=1}^{x=a}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{a}{2}+O(2^k\sqrt{a}\log a)\quad\ldots\ldots.\ (8)$$

и

$$\sum_{x=1}^{x\leqq\frac{a}{2}}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{a}{4}+O(2^k\sqrt{a}\log a)\quad\ldots\ldots.\ (9)$$

5^0. Въ заключеніе этого §'а докажемъ слѣдующую лемму

Лемма. Если $P\geqq 0$, $M\geqq P$ и $\Delta>0$ заданныя числа и при любомъ цѣломъ i, удовлетворяющемъ условію

$$0<i\leqq M,$$

имѣетъ мѣсто неравенство

$$\left|\sum_{x=P+1}^{x=P+i} f(x)\right|\leqq\Delta,$$

то

$$\left|\sum_{x=P+1}^{x=P+M}\sqrt{x}f(x)\right|\leqq\Delta\sqrt{M+P}$$

Доказательство. Полагая

$$\beta_i=\sum_{x=P+1}^{x=P+i} f(x)$$

и замѣчая, что $|\beta_i|\leqq\Delta$ найдемъ

$$\left|\sum_{x=P+1}^{x=P+M}\sqrt{x}f(x)\right|=|\beta_1\sqrt{P+1}+\beta_2(\sqrt{P+2}-\sqrt{P+1})+$$
$$+\beta_3(\sqrt{P+3}-\sqrt{P+2})+\ldots+\beta_M(\sqrt{P+M}-\sqrt{P+M-1})|\leqq$$
$$\leqq\Delta\,|\sqrt{P+1}+(\sqrt{P+2}-\sqrt{P+1})+(\sqrt{P+3}-\sqrt{P+2})+\ldots+$$
$$+\ldots+(\sqrt{P+M}-\sqrt{P+M-1})|=\Delta\sqrt{P+M},$$

чѣмъ лемма доказана

Пользуясь этою леммой и теоремою § 2 находимъ

$$\sum_{x>P}^{x\leqq Q}\sqrt{x}\sin 2\pi\left(\frac{n}{x}-Ax\right)=O\left(\sqrt{n\frac{Q}{P}}\right)$$

$$\sum_{x>P}^{x\leqq Q}\sqrt{x}\cos 2\pi\left(\frac{n}{x}-Ax\right)=O\left(\sqrt{n\frac{Q}{P}}\right)$$

§ 8. Доказательство формулы Гаусса.

Займемся разысканіемъ средняго значенія числа классовъ положительныхъ чисто коренныхъ квадратичныхъ формъ. Если обозначимъ чрезъ $h(-\triangle)$ число чисто коренныхъ классовъ для опредѣлителя $-\triangle$, то задача приведется къ отысканію асимптотическаго выраженія для суммы

$$\sum_{\triangle=1}^{\triangle\leqq m} h(-\triangle)$$

Вспоминая результаты мемуара Липшица, которые воспроизводитъ Бахманнъ въ главѣ 13 своей книги «Analytische Zahlentheorie» мы будемъ исходить изъ равенства

$$\sum_{\triangle=1}^{\triangle\leqq m} h(-\triangle) = \sum \mu(k) F\left(\frac{m}{k^2}\right); \; k = 1,\, 3,\, 5, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ $\mu(k)$ обозначаетъ извѣстную числовую функцію Мебіуса, функція $F(n)$ при $n < 1$ равна 0, а при $n > 1$ опредѣляется равенствомъ

$$F(n) = \psi(n) + \sigma(n) - \chi(n) - \eta(n), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

въ которомъ $\psi(n)$, $\sigma(n)$, $\chi(n)$, $\eta(n)$ обозначаютъ числа системъ цѣлыхъ значеній перемѣнныхъ x, y, z, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l} xz - y^2 \leqq n \\ 0 < x < z \\ -\frac{1}{2}x < y \leqq \frac{1}{2}x \end{array}\right\} \text{ для функціи } \psi(n) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} xz - y^2 \leqq n \\ x = z \\ 0 \leqq y < \frac{x}{2} \end{array}\right\} \text{ для функціи } \sigma(n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4xz - y^2 \leqq n \\ 0 < x < z \\ -x < y \leqq x \end{array}\right\} \text{ для функціи } \chi(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4xz - y^2 \leqq n \\ x = z \\ 0 \leqq y < x \end{array}\right\} \text{ для функціи } \eta(n)$$

Полагая $z = x + t$ мы видимъ отсюда, что $\psi(n)$, $\sigma(n)$, $\chi(n)$, $\eta(n)$ можно также разсматривать, какъ числа системъ цѣлыхъ значенiй перемѣнныхъ x, y, t, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l} tx + x^2 - y^2 \leqq n \\ x > 0;\ t > 0 \\ -\frac{1}{2}x < y \leqq \frac{1}{2}x \end{array}\right\} \text{ для функцiи } \psi(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 \leqq n \\ t = 0 \\ 0 \leqq y < \frac{x}{2} \end{array}\right\} \text{ для функцiи } \sigma(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4tx + 4x^2 - y^2 \leqq n \\ x > 0;\ t > 0 \\ -x < y \leqq x \end{array}\right\} \text{ для функцiи } \chi(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 - y^2 \leqq n \\ t = 0 \\ -x < y \leqq x \end{array}\right\} \text{ для функцiи } \eta(n)$$

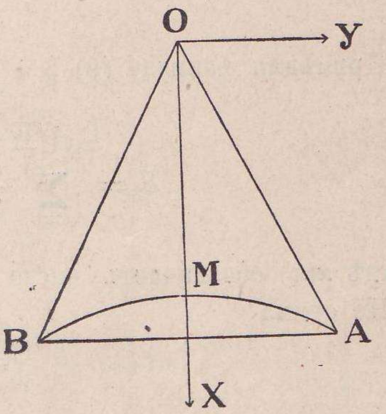
Мы обратимся сначала къ опредѣленiю функцiи $\psi(n)$. Построимъ область Ω, ограниченную прямыми OA и OB (черт. 3) съ уравненiями

$$y = \frac{x}{2},\ y = -\frac{x}{2}$$

и дугою AMB кривой съ уравненiемъ

$$x^2 - y^2 = n$$

причемъ прямую $y = -\frac{x}{2}$ къ области не причисляемъ.



Черт. 3.

Легко видѣть, что система x_1, y_1, t_1 цѣлыхъ чиселъ лишь въ томъ случаѣ можетъ удовлетворять неравенствамъ (3), если точка (x_1, y_1) лежитъ въ области Ω. Съ другой стороны нетрудно убѣдиться, что точкѣ (x_1, y_1), лежащей въ области Ω, соотвѣтствуетъ $\left[\frac{n + {y_1}^2}{x} - x\right]$ различныхъ значенiй t, которыя вмѣстѣ съ числами x_1, y_1 удовлетворяютъ неравенствамъ (3). Отсюда слѣдуетъ равенство

$$\psi(n)=\sum_{\Omega}\left[\frac{n+y^2}{x}-x\right]=\sum_{\Omega}\left(\frac{n+y^2}{x}-x\right)-\sum_{\Omega}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}, \quad . \; . \; . \; (5)$$

гдѣ суммированіе, обозначенное символомъ $\sum\limits_{\Omega}$ распространяется на всѣ пары чиселъ x, y, принадлежащія области Ω. Легко видѣть далѣе, что въ точкахъ A и B $x=\sqrt{\frac{4n}{3}}$ и въ точкѣ M $x=\sqrt{n}$. Пусть Ω' обозначаетъ область, ограниченную прямыми OA, OB, AB, причемъ OB къ области не причисляется и пусть Ω'' обозначаетъ область, ограниченную прямою AB и дугою AMB, причемъ AMB къ области не причисляется. Равенство (5) мы можемъ написать такъ

$$\psi(n)=\sum_{\Omega'}\left(\frac{n+y^2}{x}-x\right)-\sum_{\Omega''}\left(\frac{n+y^2}{x}-x\right)-\sum_{\Omega'}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}+\sum_{\Omega''}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\} \quad . \; (6)$$

1^0. Обращаясь къ суммѣ

$$S_3=\sum_{\Omega'}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

мы ее перепишемъ такъ

$$S_3=\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\;\sum_{y>-\frac{x}{2}}^{y\leqq\frac{x}{2}}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

Примѣняя формулу (9) § 1 отсюда выводимъ

$$S_3=\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{x}{2}+O\left(\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}2^{\varkappa(x)}\sqrt{x}\log x\right)$$

гдѣ $\varkappa(x)$ обозначаетъ число различныхъ простыхъ дѣлителей числа x. Но сумма

$$\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}2^{\varkappa(x)}\sqrt{x}\log x$$

очевидно порядка

$$\log n\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x}\tau(x)$$

но такъ какъ извѣстно что

$$\sum_{x=1}^{x\leqq i}\tau(x)=O(i\log i)$$

то примѣняя лемму пункта 5^0 § 7 найдемъ

$$\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x}\,\tau(x)=O\left(n^{\frac{3}{4}}\log n\right)$$

и слѣдовательно окончательно можемъ написать

$$S_3=\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{x}{2}+O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right)\quad\ldots\ldots\ldots(7)$$

2^0. Обращаясь къ суммѣ

$$S_4=\sum_{\Omega''}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

мы можемъ представить ее въ видѣ

$$S_4=\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\ \sum_{y>-\sqrt{x^2-n}}^{y<\sqrt{x^2-n}}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

но примѣняя къ суммѣ

$$\sum_{y>-\sqrt{x^2-n}}^{y<\sqrt{x^2-n}}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

формулу (6) § 7, найдемъ отсюда, положивъ $M=\sqrt{x}$

$$S_4=\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x^2-n}-$$

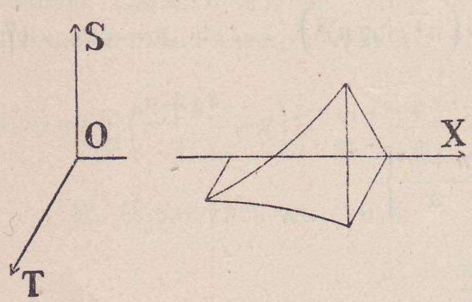
$$-\frac{2}{\pi}\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\ \sum_{t=1}^{t\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{s>0}^{s\leqq 2\frac{\sqrt{x^2-n}}{x}t}\frac{\sqrt{x}}{t^{\frac{3}{2}}}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)\right]+$$

$$+O\left(\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}2^{\varkappa(x)}\sqrt{x}\log x\right),$$

гдѣ $\varkappa$ имѣетъ то же значеніе, что и въ пунктѣ 1^0.

Разсмотримъ область Ω''' перемѣнныхъ x, t, s, ограниченную поверхностями $x=\sqrt{n}$, $x=\sqrt{\frac{4n}{3}}$, $t=0$, $t=\sqrt{x}$, $s=0$, $s=2\frac{\sqrt{x^2-n}}{x}t$, изъ которой исключены точки поверхностей $x=\sqrt{a}$, $t=0$, $s=0$ (черт. 4). Тогда второй членъ полученнаго выраженія для S_4, если отбросить множитель $-\frac{2}{\pi}$, представится суммой

$$H=\sum_{\Omega'''}\frac{\sqrt{x}}{t^{\frac{3}{2}}}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)\right]$$



Черт. 4.

Проведемъ прямую въ этой области, соотвѣтствующую данной парѣ значеній s и t. На этой прямой x измѣняется отъ нѣкотораго числа $\alpha\geqq\sqrt{n}$ до $\sqrt{\frac{4n}{3}}$ и слѣдовательно часть суммы H соотвѣтствующая этой прямой, представится такъ

$$\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\sum_{x>\alpha}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)\right]\sqrt{x},$$

что согласно пункту 5^0 § 7 будетъ порядка $\frac{\sqrt{tn}}{t^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{n}}{t}$. Поэтому можемъ написать

$$H=O\left(\sum_{\Omega^{IV}}\sqrt{\frac{n}{t}}\right),$$

гдѣ суммированіе, обозначенное символомъ $\sum\limits_{\Omega^{IV}}$ распространяется по t и s на всю область Ω^{IV} перемѣнныхъ t и s, ограниченную прямыми $s=0$, $t=\sqrt[4]{\frac{4n}{3}}$, $s=t$. Можно написать поэтому

$$H=O\left(\sum_{t>0}^{t\leqq\sqrt[4]{\frac{4n}{3}}}\sqrt{n}\right)=O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$$

Наконецъ повторяя тѣ же разсужденія, что въ концѣ пункта 1⁰, находимъ

$$\sum_{x>n}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}} 2^{\varkappa(x)}\sqrt{x}\log x = O\left(\sum_{x>n}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x}\tau(x)\log x\right) = O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right)$$

На основаніи всего сказаннаго будетъ

$$S_4 = \sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x^2-n} + O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

3⁰. Обращаясь къ суммѣ

$$S_1 = \sum_{\Omega'}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right)$$

мы перепишемъ ее такъ

$$S_1 = \sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\;\sum_{y>-\frac{x}{2}}^{y\leqq\frac{x}{2}}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right)$$

Примѣняя сюда формулу (1) § 3 и замѣчая, что

$$\varrho\left(\frac{x}{2}\right) - \varrho\left(-\frac{x}{2}\right) = 0,$$

получимъ

$$S_1 = \sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\left(n - \frac{11}{12}x^2\right) + O\left(\sqrt{n}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

4⁰. Обращаясь наконецъ къ суммѣ

$$S_2 = \sum_{\Omega''}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right)$$

мы можемъ ее представить такъ

$$S_2 = \sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\;\sum_{y>-\sqrt{x^2-n}}^{y\leqq\sqrt{x^2-n}}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right)$$

Примѣнивъ сюда формулу (1) § 3 получимъ

$$S_2 = -\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{4}{3x}\left(x^2-n\right)^{\frac{3}{2}} + O\left(\sqrt{n}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Вспоминая формулы (7), (8), (9), (10), (6) находимъ наконецъ

$$\psi(n)=\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\left(n-\frac{11}{12}x^2\right)+\frac{4}{3}\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\left(x^2-n\right)^{\frac{3}{2}}-$$
$$-\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{x}{2}+\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x^2-n}+O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right)\quad .\ .\ .\ .\ .\ (11)$$

5^0. Изъ неравенствъ (4) слѣдуетъ, что $\sigma(n)$ можно разсматривать, какъ число системъ цѣлыхъ значеній x, y, удовлотворяющихъ неравенствамъ

$$x^2-y^2=n$$
$$0\leqq y<\frac{x}{2}$$

Отсюда легко найдемъ

$$\sigma(n)=\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{x}{2}-\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x^2-n}+O\left(\sqrt{n}\right)$$

Отсюда и изъ (11) заключаемъ

$$\psi(n)+\sigma(n)=\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\left(n-\frac{11}{12}x^2\right)+\frac{4}{3}\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{(x^2-n)^{\frac{3}{2}}}{x}+O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right).\ (12)$$

Входящія въ найденное выраженіе суммы мы вычислимъ по формулѣ (1) § 3. Принимая

$$f(x)=n-\frac{11}{12}x^2,$$

найдемъ

$$\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\left(n-\frac{11}{12}x^2\right)=\frac{32}{27\sqrt{3}}n^{\frac{3}{2}}-\frac{n}{2}-\frac{2}{9}n\varrho\left(\sqrt{\frac{4n}{3}}\right)+O\left(\sqrt{n}\right).\ (13)$$

Взявъ же

$$f(x)=\frac{(x^2-n)^{\frac{3}{2}}}{x}$$

найдемъ

$$f'(x)=(x^2-n)^{\frac{1}{2}}\left(2+\frac{n}{x^2}\right)$$
$$f''(x)=(x^2-n)^{\frac{3}{2}}\left(2x+\frac{2n^2}{x^3}-\frac{n}{x}\right),$$

откуда видно, что $f'(x) > 0$ при $\sqrt{n} < x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}$ и при тѣхъ же условіяхъ $f'(x) < \frac{11}{4\sqrt{3}} n^{\frac{1}{2}}$. Поэтому будемъ имѣть

$$\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{(x^2-n)^{\frac{3}{2}}}{x} = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{(x^2-n)^{\frac{3}{2}}}{x} dx + \frac{1}{6}\varrho\left(\sqrt{\frac{4n}{3}}\right) + O\left(\sqrt{n}\right). \quad (14)$$

Изъ выведенныхъ формулъ (13) и (14), замѣчая что

$$\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{(x^2-n)^{\frac{3}{2}}}{x} dx = n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{8}{9\sqrt{3}}\right)$$

безъ труда получаемъ на основаніи формулы (12)

$$\psi(n) + \sigma(n) = \frac{2\pi}{9} n^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{2} + O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right)$$

Совершенно такимъ же образомъ найдемъ

$$\chi(n) + \eta(n) = \frac{\pi}{18} n^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{4} + O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right)$$

и далѣе согласно (2)

$$F(n) = \frac{\pi}{6} n^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{4} + O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right)$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (1), получимъ

$$\sum_{\triangle=1}^{\triangle\leqq m} h(-\triangle) = \frac{\pi}{6} m^{\frac{3}{2}} \sum \frac{\mu(k)}{k^3} - \frac{m}{4} \sum \frac{\mu(k)}{k^2} +$$

$$+ O\left(m^{\frac{3}{4}} \sum \frac{\left(\log \frac{m}{k}\right)^2}{k^{\frac{3}{2}}}\right); \; k = 1, 3, 5, \ldots \leqq \sqrt{m}$$

Отсюда, замѣчая что положивъ

$$e = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots$$

будемъ имѣть

$$\sum \frac{\mu(k)}{k^3} = \frac{8}{7} e + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\sum \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{8}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

безъ труда найдемъ

$$\sum_{\Delta=1}^{\Delta \leq m} h(-\Delta) = \frac{4\pi}{21e} m^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\pi^2} m + O\left(m^{\frac{3}{4}} (\log m)^2\right).$$ *)

---

*) Статья поступила въ редакцію въ маѣ 1916 г.

Приложенія принципа сходимости къ теоріи униформизаціи.

В. И. Смирновъ (Петроградъ).

---

§ 1. Униформизировать заданную аналитическую функцію $y=f(x)$ значитъ, какъ извѣстно, найти перемѣнную t (униформизирующая перемѣнная) такъ, чтобы соотвѣтствующія значенія y и x были однозначными функціями этой перемѣнной, и чтобы при аналитическомъ продолженіи этихъ функцій можно было получить всѣ возможныя значенія для y и x. Униформизирующая перемѣнная t будетъ многозначной функціей на Римановой поверхности (x, y), соотвѣтствующей заданной аналитической функціи. Многозначность t можетъ происходить, какъ отъ многосвязности упомянутой Римановой поверхности, такъ и отъ существованія точекъ развѣтвленія функціи t на этой поверхности.

Изъ всѣхъ возможныхъ способовъ униформизаціи наиболѣе существеннымъ является способъ униформизаціи съ предѣльнымъ кругомъ (Grenzkreisuniformisierung).

Въ этомъ случаѣ x и y суть функціи отъ t, опредѣленныя внутри нѣкотораго круга (напр. круга, описаннаго изъ начала координатъ, какъ центра, радіусомъ единица); кругъ этотъ является естественной границей, и, кромѣ того, x и y суть аутоморфныя функціи отъ t, такъ что при замѣнѣ t нѣкоторыми дробными линейными функціями отъ t, не мѣняющими упомянутаго круга, функціи x и y принимаютъ прежнія значенія.

Упомянутый выше кругъ радіуса единицы будетъ въ дальнѣйшемъ часто встрѣчаться, и мы его для сокращенія будемъ называть кругомъ C.

Въ 1907 году одновременно Poincaré и Koebe [1]) доказали, что для всякой аналитической функціи существуетъ униформизирующая перемѣнная t указаннаго только-что типа и съ заданными напередъ точками развѣтвленія на Римановой поверхности. Оба названные геометра поль-

---

[1]) Poincaré. Acta Mathematica t. 31.
Koebe. Nachrichten d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1907.

зовались при этомъ доказательствѣ т. н. методой наложенія поверхностей (Methode der Ueberlagerungsfläche). Примѣненіе этой методы, какъ будетъ показано ниже, требуетъ нѣкотораго перехода къ предѣлу. Въ настоящей статьѣ я примѣняю къ этому вопросу т. н. принципъ сходимости аналитическихъ функцій. Кромѣ того, съ помощью этого же принципа я разбираю нѣкоторые другіе вопросы, связанные съ теоріей униформизаціи. Какъ извѣстно, этотъ принципъ даетъ также возможность установить т. н. теорему Riemann'а о возможности конформнаго отображенія односвязной области, состоящей изъ конечнаго числа листовъ, на кругъ безъ помощи уравненія Laplace'а при очень общихъ предположеніяхъ объ изображаемой области [1]). Наоборотъ, отсюда, раздѣляя въ аналитической функціи, совершающей указанное конформное преобразованіе, вещественную и мнимую часть, можно получить функцію Green'а для заданной области.

§ 2. Въ настоящемъ параграфѣ изложимъ кратко методу наложенія поверхностей для того случая, когда $y = f(x)$ есть алгебраическая функція, и для простоты изложенія будемъ искать униформизирующую перемѣнную t такъ, чтобы она не имѣла точекъ развѣтвленія на заданной Римановой поверхности (рѣчь идетъ объ униформизаціи съ предѣльнымъ кругомъ). Въ настоящемъ случаѣ эта поверхность имѣетъ конечное число листовъ. Если родъ поверхности p равенъ нулю, то, какъ извѣстно, x и y могутъ быть выражены раціонально черезъ нѣкоторую перемѣнную t; если же родъ равенъ единицѣ, то x и y суть эллиптическія функціи нѣкоторой перемѣнной t [2]). Итакъ, въ этихъ двухъ случаяхъ униформизирующая перемѣнная имѣется, и остается предположить

$$p \geqslant 2.$$

Сдѣлаемъ упомянутую Риманову поверхность односвязной при помощи $2p$ купюръ и для простоты предположимъ, что всѣ эти купюры проходятъ черезъ одну и ту же точку D на поверхности. Края проведенныхъ купюръ будутъ служить границами полученной односвязной поверхности и, какъ у всякой односвязной поверхности, вся граница будетъ представлять собою одну непрерывную линію. Линія эта будетъ составлена изъ $4p$ частей, при чемъ тѣ части, которыя являются краями одной и той же купюры, мы будемъ называть соотвѣтствующими частями. Соотвѣтствующія части могутъ быть наложены другъ на друга

---

[1]) Carathéodory. Mathematische Annalen. B. 72.
Bieberbach. Nachrichten d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1913.

[2]) Picard. Traité d'analyse. t. II (Paris. 1905) стр. 547.

вполнѣ безъ складокъ и разрыва. Представимъ теперь себѣ, что у насъ имѣется кромѣ основного еще безконечное множество экземпляровъ указанной выше односвязной поверхности, и будемъ совершать въ опредѣленной послѣдовательности пришиваніе экземпляровъ къ свободнымъ краямъ основного экземпляра и пришитыхъ уже экземпляровъ, помня, что ко всякой свободной сторонѣ можно пришить сторону ей соотвѣтствующую, ибо, какъ было сказано выше, стороны эти могутъ быть вполнѣ совмѣщены. Процессъ обшиванія разобьемъ на отдѣльныя стадіи. Основную односвязную поверхность назовемъ ω_1 и обошьемъ ее нѣсколькими экземплярами такъ, чтобы всякій ея край и всякая вершина (точка пересѣченія различныхъ частей границы) оказались внутри новой поверхности ω_2 [1]). Съ полученной поверхностью ω_2 поступимъ такъ же, какъ и ω_1 и т. д. Такимъ образомъ получимъ неограниченный рядъ односвязныхъ поверхностей ω_1, ω_2, $\omega_3 \ldots$ и при томъ такихъ, что всякая поверхность изъ этого ряда лежитъ со всей своей границей цѣликомъ внутри слѣдующей поверхности ряда. Отмѣтимъ внутри поверхности ω_1 какую-либо точку O, не совпадающую съ точкой развѣтвленія поверхности. Предположимъ, не ограничивая общности, что точка O лежитъ въ началѣ координатъ. Въ виду произвольности формы купюръ можно, напримѣръ, предположить, что онѣ состоятъ изъ ряда аналитическихъ линій, пересѣкающихся подъ угломъ, отличнымъ отъ нуля. Въ этомъ предположеніи, какъ извѣстно, существуетъ для всякой поверхности ω_n аналитическая функція

$$u = \varphi_n(z),$$

опредѣленная внутри ω_n и преобразующая ω_n въ кругъ C такъ, что начало координатъ O и направленіе вещественной оси при этомъ не мѣняются [2]).

Существованіе функціи $\varphi_n(z)$ можетъ быть доказано либо методою Schwarz'a, либо при помощи принципа сходимости, какъ было указано въ § 1. Въ виду предположенія, что точка O лежитъ въ началѣ координатъ, имѣемъ вблизи этой точки разложеніе:

$$\varphi_n(z) = a_n z + \ldots,$$

гдѣ

$$a_n > 0$$

---

[1]) О возможности этого см. Koebe. Math. Annalen. B. 67.
Klein und Fricke. Vorles. üb. d. Theorie d. automorphen Functionen B. II. S. 464.

[2]) См. напр. Osgood. Lehrbuch der Functionentheorie (Leipzig und Berlin. 1907). S. 594.

въ силу неизмѣняемости направленія вещественной оси. При безпредѣльномъ увеличеніи n поверхности ω_n будутъ стремиться къ нѣкоторой предѣльной поверхности ω, имѣющей безчисленное множество листовъ. Мы будемъ при этомъ считать, что нѣкоторая точка принадлежитъ къ поверхности, если эта точка принадлежитъ къ какой-нибудь поверхности ω_n (а слѣд. и ко всѣмъ слѣдующимъ поверхностямъ ω_n).

Сказанное можно записать такъ:

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots; \quad \lim_{n=\infty} \omega_n = \omega.$$

Во всякой точкѣ поверхности ω функціи $\varphi_n(z)$ опредѣлены при достаточно большихъ значеніяхъ n. Существенный пунктъ описываемой методы состоитъ въ томъ, чтобы доказать, что

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z)$$

существуетъ во всякой точкѣ поверхности ω и что предѣльная функція $\varphi(z)$ преобразуетъ конформно поверхность ω въ кругъ C на плоскости перемѣнной u. Если это доказано, то ясно, что $\varphi(z)$ и будетъ униформизирующая перемѣнная требуемаго типа, т. е.

$$\varphi(z) = t.$$

Дѣйствительно, поверхность ω состоитъ изъ безчисленнаго множества экземпляровъ поверхности ω_1. Пусть $\xi(z)$ и $\eta(z)$ значенія функціи $\varphi(z)$ въ какихъ-либо двухъ экземплярахъ ω_1. Исключая z, получимъ

$$\eta = \chi(\xi),$$

гдѣ $\chi(\xi)$ — знакъ аналитической функціи. Если путемъ аналитическаго продолженія расширимъ область измѣненія ξ до всего круга C, то область измѣненія η будетъ также состоять изъ всего круга C, такъ какъ ξ и η являются отдѣльными вѣтвями функціи $\varphi(z)$. Слѣд. аналитическая функція $\chi(\xi)$ преобразуетъ кругъ C самъ въ себя, а потому есть дробная линейная функція [1]). Слѣд. x и y суть однозначныя функціи отъ $\varphi(z)$, и однимъ и тѣмъ же значеніямъ (x, y) отвѣчаетъ безчисленное множество значеній перемѣнной $\varphi(z)$, связанныхъ между собою указанными выше линейными зависимостями. Итакъ, можно принять:

$$\varphi(z) = t.$$

Эта функція преобразуетъ всякій экземпляръ ω_1 въ нѣкоторый криволинейный многоугольникъ, и любой такой многоугольникъ можетъ

---

[1]) Klein und Fricke. Voresl. üb. d. Theorie d. automorphen Functionen. B. II. S. 480.

служить производящимъ многоугольникомъ [1]) фуксовой группы тѣхъ линейныхъ подстановокъ, которыя связываютъ отдѣльныя вѣтви функціи $\varphi(z)$. Эта фуксова группа принадлежитъ по терминологіи Poincaré къ первому семейству [1]), т. е. соотвѣтствующій производящій многоугольникъ лежитъ со своей границей цѣликомъ внутри круга C, такъ какъ соотвѣтствующій экземпляръ ω_1 лежитъ цѣликомъ внутри поверхности ω.

§ 3. Въ этомъ параграфѣ я формулирую принципъ сходимости аналитическихъ функцій и приведу нѣкоторыя замѣчанія о получаемой при этомъ предѣльной функціи.

Упомянутый принципъ формулируется такъ:

Заданъ рядъ аналитическихъ функцій

$$f_1(z),\quad f_2(z),\ldots,\quad f_n(z),\ldots$$

при чемъ функція $f_n(z)$ опредѣлена въ нѣкоторой области B_n $(n=1,\ 2,\ldots)$.

Всѣ функціи ограничены въ своей совокупности въ этихъ областяхъ, т. е. существуетъ такое положительное число M, что

$$|f_n(z)|<M$$

при всякомъ n и всякомъ z, лежащемъ въ области B_n, а эта послѣдняя заключается въ области B_{n+1}, т. е.

$$B_1\leqslant B_2\leqslant\ldots\leqslant B_n\leqslant\ldots;\quad \lim_{n=\infty}B_n=B \qquad (\text{см. § 2}).$$

Въ этомъ случаѣ можно выбрать рядъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ

$$n_1<n_2<n_3<\ldots$$

такъ, что рядъ функцій

$$f_{n_1}(z),\quad f_{n_2}(z),\quad f_{n_3}(z),\ldots$$

будетъ сходиться во всякой точкѣ, лежащей внутри области B, и сходимость будетъ равномѣрной во всякой области, лежащей цѣликомъ внутри B.

Иными словами, при сдѣланныхъ предположеніяхъ, изъ даннаго ряда функцій можно выбрать такой рядъ, который будетъ стремиться указаннымъ выше образомъ къ предѣльной функціи. Кромѣ того, надо замѣтить, что условіе общей ограниченности функцій $f_n(z)$ можно замѣ-

[1]) Polygone générateur см. Poincaré. Acta Mathematica t. I. p. 16.

нить условіемъ ограниченности этихъ функцій во всякой области, лежащей цѣликомъ внутра B [1]). Доказательство отъ этого не измѣнится.

Изъ формулы Cauchy

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f_n(z')}{z'-z}\,dz'$$

и изъ равномѣрной сходимости непосредственно ясно, что предѣльная функція $f(z)$ будетъ аналитической функціей внутри области B. Кромѣ того изъ формулы:

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{1.2\ldots k}{2\pi i}\int_K \frac{f_n(z')}{(z'-z)^{k+1}}\,dz'$$

слѣдуетъ

$$\lim_{n_k=\infty} f_{n_k}^{(k)}(z) = f^{(k)}(z),$$

и послѣднее имѣетъ мѣсто равномѣрно во всякой области, лежащей цѣликомъ внутри B. Докажемъ теперь, что *если всѣ функціи $f_{n_k}(z)$ принимаютъ всякое свое значеніе не болѣе одного раза, то функція $f(z)$ либо обладаетъ этимъ же свойствомъ, либо равна постоянной* [2]).

Положимъ для простоты письма

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z),$$

и пусть всѣ функціи $f_n(z)$ принимаютъ всякое свое значеніе одинъ лишь разъ. Въ этомъ случаѣ $f_n(z)$ преобразуетъ B_n въ однолистную область, и равенство

$$u = f_n(z)$$

опредѣляетъ z, какъ однозначную функцію u въ этой области. Для краткости такія функціи будемъ называть однозначно-обратимыми. Пусть $f(z)$ не есть постоянная. Покажемъ прежде всего, что $f'(z)$ не обращается въ нуль внутри B (какъ и функціи $f'_n(z)$ внутри B_n). Предположимъ, что это имѣетъ мѣсто въ точкѣ z_0. Окружимъ эту точку достаточно малымъ контуромъ K, на которомъ $f'(z)$ не обращается въ нуль.

Изъ упомянутой выше равномѣрной сходимости слѣдуетъ:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f''_n(z)}{f'_n(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f''(z)}{f'(z)}\,dz,$$

---

[1]) Доказательство принципа сходимости см. Koebe Math. Annalen. B. 69. S. 71 или Montel. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe (Paris. 1910).

[2]) См. также Carathéodory. Math. Annalen. B. 72. S. 120.

но
$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f''_n(z)}{f'_n(z)}\,dz = 0\text{ [1]} \qquad (n\text{ — произвольно})$$
слѣд.
$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f''(z)}{f'(z)} = 0,$$

т. е. $f'(z)$ не обращается въ нуль внутри контура K, что противорѣчитъ предположенію. Теперь докажемъ, что $f(z)$ не можетъ принимать въ различныхъ точкахъ одного и того же значенія. Предположимъ наоборотъ, что
$$f(z_1) = f(z_2).$$

Разсужденія, аналогичныя предыдущему, примѣненныя къ интегралу $\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)-f(z_1)}\,dz$, покажутъ неправильность нашего предположенія. Слѣдовательно, предположеніе доказано.

§ 4. Въ настоящемъ параграфѣ мы приложимъ принципъ сходимости къ доказательству одного предложенія изъ теоріи фуксовыхъ группъ [2]). Въ параграфѣ первомъ было указано, что униформизирующая перемѣнная t должна быть многозначной функціей на заданной Римановой поверхности, вѣтви этой функціи должны быть связаны линейными зависимостями, не мѣняющими круга C, и значенія перемѣнной t должны заполнить весь кругъ C. Послѣднее свойство перемѣнной t, является, какъ оказывается, слѣдствіемъ двухъ предыдущихъ. Обращаясь къ общей теоріи фуксовыхъ группъ, докажемъ вообще, что если данъ производящій многоугольникъ перваго семейства (см. стр. 5) фуксовой группы, то изъ условія прерывности группы, т. е. изъ условія, что многоугольники, полученные изъ производящаго путемъ примѣненія линейныхъ подстановокъ группы, нигдѣ не налягутъ другъ на друга, будетъ слѣдовать, что эти многоугольники заполнятъ внутри весь кругъ [3]). Пусть σ_0 производящій многоугольникъ фуксовой группы перваго семейства и $S_n(z)$ подстановки группы, такъ что $S_n(z)$ преобразуетъ многоугольникъ σ_0 въ многоугольникъ σ_n, также лежащій внутри круга C. Точки, связанныя между собою подстановками группы, называются эквивалентными. *Точки, эквивалентныя какой-либо точкѣ, лежащей внутри многоугольника σ_k, лежатъ внѣ многоугольника σ_k.* Кромѣ того, изъ

---

[1]) $\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$ выражаетъ, какъ извѣстно, число нулей голоморфной функціи $\varphi(z)$ внутри контура K.

[2]) См. Poincaré. Acta Mathematica t. I. S. 27 и Koebe. Math. Annalen. B. 67.

[3]) Аналогичное утвержденіе имѣетъ мѣсто и для многоугольниковъ другихъ семействъ.

теоріи фуксовыхъ группъ извѣстно, что неподвижныя точки эллиптическихъ подстановокъ группы находятся въ вершинахъ сѣти многоугольниковъ, и что можно конечнымъ числомъ эквивалентныхъ многоугольниковъ окружить данный многоугольникъ σ_0 такъ, что всякая точка периферіи послѣдняго будетъ лежать внутри взятой системы многоугольниковъ [1]). Послѣднее обстоятельство непосредственно ясно въ теоріи униформизаціи. Дѣйствительно, функція $\varphi(z)$ (см. § 2) преобразуетъ поверхность ω_2 въ область, состоящую изъ конечнаго числа многоугольниковъ и заключающую внутри себя производящій многоугольникъ σ_0. Итакъ, пусть σ_0 вполнѣ окруженъ конечнымъ числомъ эквивалентныхъ ему многоугольниковъ, и пусть совокупность этихъ многоугольниковъ и самого многоугольника σ_0 составляетъ нѣкоторую область α. Обозначимъ буквою δ наименьшее разстояніе контура σ_0 до контура α. Предположимъ теперь, что многоугольники σ_n не заполняютъ всего круга C. Тогда обычнымъ пріемомъ можно найти внутри круга C предѣльную точку a такую, что сколь угодно близко къ ней будутъ находиться точки, принадлежащія сѣти многоугольниковъ, но сама точка a не будетъ принадлежать ни къ одному изъ многоугольниковъ. Всякій многоугольникъ представляетъ собою ограниченную область, при чемъ точки границъ многоугольника являются внутренними точками въ сѣти многоугольниковъ. Отсюда слѣдуетъ, что сколь угодно близко къ точкѣ a находятся, хотя бы частью своей, безчисленное множество многоугольниковъ.

Дѣйствительно, если бы число многоугольниковъ было конечно, то можно было бы указать контуръ, отдѣляющій эти многоугольники отъ части плоскости, не заполненной многоугольниками, чего не можетъ быть, ибо, какъ только-что сказано, границы многоугольника не могутъ находиться на границѣ сѣти многоугольниковъ.

Опишемъ около точки a двѣ окружности съ радіусами r и r', при чемъ $r > r'$, такъ, чтобы обѣ эти окружности лежали внутри круга C. Отмѣтимъ тѣ многоугольники, которые лежатъ, хотя бы частью, внутри круга радіуса r' (такихъ многоугольниковъ будетъ безчисленное множество) и обозначимъ черезъ

$$X_1(z),\ X_2(z),\ X_3(z), \ldots$$

тѣ линейныя подстановки, которыя преобразуютъ эти многоугольники въ многоугольникъ σ_0. Эти подстановки не мѣняютъ круга C и слѣд. внутри круга радіуса r имѣемъ:

$$|X_n(z)| < 1. \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

---

[1]) См. Poincaré. Acta Mathematica t. I, p. 24.

Въ силу принципа сходимости можно изъ этихъ функцій выбрать рядъ, сходящійся внутри круга радіуса r. Для простоты предположимъ, что это будетъ рядъ:

$$X_1(z),\ X_2(z), \ldots,\ X_n(z), \ldots$$

Въ силу принципа сходимости можно найти такое цѣлое положительное число m, что

$$|X_{m+k}(z) - X_m(z)| < \delta$$

при всякомъ цѣломъ положительномъ k, если только z находится внутри круга радіуса r'. Тотъ многоугольникъ, который преобразуется въ σ_0 подстановкой $X_m(z)$, лежитъ, хотя бы частью, внутри круга радіуса r'.

Возьмемъ внутри этого многоугольника точку z_0 такъ, чтобы она лежала внутри круга радіуса r', и тогда $X_m(z_0)$ будетъ лежать внутри σ_0. Въ силу написаннаго выше неравенства всѣ точки $\psi_{m+k}(z)$ лежатъ внутри области α. Слѣд., если всѣ эти точки различны, то безчисленное множество ихъ попадетъ въ одинъ и тотъ же многоугольникъ, чего не можетъ быть, ибо всѣ эти точки, будучи эквивалентны z_0, эквивалентны между собою (см. выше); если же

$$\psi_{m+s}(z_0) = \psi_{m+t}(z_0),$$

то подстановка $\psi^{-1}_{m+s}\psi_{m+t}(z)$ имѣетъ двойную точку въ точкѣ z_0, лежащей внутри многоугольника, чего также не можетъ быть. Теорема такимъ образомъ доказана. Доказательство этого предложенія имѣется, какъ было указано въ началѣ этого параграфа, у Poincaré и Koebe, при чемъ оба геометра основываютъ свои доказательства на инваріантности нѣкоторыхъ выраженій относительно линейныхъ подстановокъ.

§ 5. Въ настоящемъ параграфѣ мы докажемъ при помощи принципа сходимости слѣдующую необходимую намъ для дальнѣйшаго теорему [1]): *если функція $f(z)$, голоморфная внутри круга C, однозначно-обратима въ этомъ кругѣ и при томъ*

$$f(0) = 0 \text{ и } f'(0) = 1,$$

то можно указать два постоянныхъ положительныхъ числа m_r и M_r такъ, что любая вышеупомянутая функція $f(z)$ будетъ удовлетворять неравенствамъ

$$m_r < |f(z)| < M_r$$

при условіи

$$|z| = r.$$

---

[1]) Теорема эта была дана Koebe въ его изслѣдованіи объ униформизаціи типа Schottky и болѣе общихъ типовъ.

Иначе говоря, модуль любой функціи, обладающей предыдущими свойствами, будетъ заключаться между опредѣленными числами m_r и M_r, когда z будетъ находиться на кругѣ, описанномъ изъ начала координатъ, какъ центра, радіусомъ $r < 1$. Доказательство существованія числа m_r можетъ быть получено элементарными соображеніями изъ теоріи аналитическихъ функцій, тогда какъ для доказательства существованія M_r потребовалось построеніе нѣкоторыхъ вспомогательныхъ Римановыхъ поверхностей [1]). Предполагая доказаннымъ существованіе m_r, мы, пользуясь принципомъ сходимости, докажемъ существованіе M_r.

Итакъ, пусть имѣется какая-либо функція $f(z)$, обладающая указанными выше свойствами. Покажемъ сначала, что minimum $|f(z)|$ на кругѣ C_r меньше единицы. Дѣйствительно, если бы это было не такъ, то модуль функціи $\frac{z}{f(z)}$, голоморфной внутри круга C_r и на его контурѣ, имѣлъ бы на контурѣ maximum, меньшій единицы. Съ другой стороны значеніе этой функціи во внутренней точкѣ $z = 0$ равно единицѣ, чего не можетъ быть. Предположимъ теперь, что не существуетъ числа M_r, т. е., что можно выбрать рядъ функцій

$$f_1(z),\ f_2(z), \ldots,\ f_n(z), \ldots$$

съ указанными выше свойствами такъ, что maximum ихъ модуля на окружности C_r будетъ расти безпредѣльно съ возрастаніемъ n. Очевидно, что maximum модуля этихъ функцій на окружности радіуса, большаго r, также будетъ безпредѣльно расти. Разсмотримъ кольцо, заключенное между окружностями C_r и $C_{r'}$, гдѣ

$$r < r' < 1,$$

и проведемъ также внутри этого кольца окружность C_ρ, гдѣ

$$r < \rho < r'.$$

Функціи

$$\frac{1}{f_1(z)},\ \frac{1}{f_2(z)}, \ldots,\ \frac{1}{f_n(z)}, \ldots$$

голоморфны и ограничены въ своей совокупности въ указанномъ выше кольцѣ. Ограниченность вытекаетъ изъ существованія числа m_r при всякомъ $r < 1$. Слѣд., на основаніи принципа сходимости изъ написан-

---

[1]) Koebe. Math. Annalen B. 69 S. 48 и Klein und Fricke. Vorles. üb. d. Theorie d. automorphen Functionen. B. II S. 499, гдѣ дано явное выраженіе для m_r и M_r.

наго выше ряда функцій можно выбрать рядъ, сходящійся въ упомянутомъ кольцѣ. Для простоты положимъ просто, что

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{f_n(z)} = \tau(z),$$

гдѣ $\tau(z)$—функція голоморфная внутри кольца. Отмѣтимъ на окружности C_ρ тѣ точки, въ которыхъ $|f_n(z)|$ достигаетъ своего maximum'а, т. е. $\left|\frac{1}{f_n(z)}\right|$ своего minimum'а. Этотъ послѣдній при возрастаніи n по предположенію стремится къ нулю. Намѣченныхъ точекъ будетъ безчисленное множество (это могутъ быть и совпадающія точки) и слѣд. онѣ будутъ имѣть на окружности C_ρ по крайней мѣрѣ одну точку сгущенія β. Покажемъ, что

$$\tau(\beta) = 0.$$

Окружимъ точку β кругомъ λ, лежащимъ внутри взятаго кольца. Въ силу принципа сходимости при достаточно большомъ n и всякомъ k имѣемъ внутри λ:

$$\left|\tau(z) - \frac{1}{f_{n+k}(z)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но внутри круга λ лежитъ безчисленное множество намѣченныхъ выше точекъ, а потому при достаточно большомъ значеніи k и при нѣкоторомъ значеніи $z = \xi$ будемъ имѣть:

$$\left|\frac{1}{f_{n+k}(\xi)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и слѣд. } |\tau(\xi)| < \varepsilon.$$

Итакъ, можно утверждать въ виду произвольной малости числа ε и радіуса круга λ, что въ сколь угодно близкомъ разстояніи отъ точки β находятся сколь угодно малыя значенія функціи $\tau(z)$ и слѣд.

$$\tau(\beta) = 0.$$

Отсюда видно, что голоморфная функція $\tau(z)$ имѣетъ нули на любой окружности C_ρ, проходящей внутри кольца, а потому $\tau(z)$ должно обращаться тождественно въ нуль. Отсюда, въ силу принципа сходимости, слѣдуетъ, что на окружности C_ρ при достаточно большомъ n и всякомъ k имѣемъ:

$$\left|\frac{1}{f_{n+k}(z)}\right| < \varepsilon,$$

чего не можетъ быть, ибо въ силу ранѣе доказаннаго minimum $|f_{n+k}(z)|$ меньше единицы на окружности C_ρ. Слѣд., высказанное предположеніе о томъ, что число M_r не существуетъ, неправильно [1]).

Существованіе числа M_r доказано нами лишь въ томъ предположеніи, что существуетъ m_r, и что функціи $f(z)$ не обращаются въ нуль при $z \neq 0$, но нигдѣ мы не пользовались однозначной обратимостью функцій $f_n(z)$. Эта послѣдняя служитъ лишь для доказательства существованія числа m_r. Если же существованіе на любомъ кругѣ C_r низшаго предѣла, отличнаго отъ нуля, для какого-либо ряда не однозначно-обратимыхъ функцій обнаружено какимъ-либо путемъ и выполнено указанное выше условіе, то для этого ряда функцій будетъ существовать и верхній предѣлъ, но онъ можетъ быть отличнымъ отъ того M_r, которое относилось къ функціямъ, упоминаемымъ въ теоремѣ.

Если кругъ C, упоминаемый въ теоремѣ, замѣненъ кругомъ C_R и

$$f'(0) = a_1,$$

то замѣной перемѣнныхъ легко придти къ слѣдующимъ неравенствамъ на кругѣ C_r $(r < R)$

$$a_1 . Rm_{\frac{r}{R}} < |f(z)| < a_1 R . M_{\frac{r}{R}} .$$

§ 6. Вернемся къ методѣ наложенія поверхностей и докажемъ теперь существованіе и свойство предѣльной функціи, о которой упоминалось въ § 2. Въ этомъ параграфѣ мы видѣли, что поверхность ω_n преобразуется въ кругъ C помощью нѣкоторой функціи $\varphi_n(z)$. Обозначимъ:

$$u_n = \varphi_n(z).$$

Пусть упомянутая въ § 2 точка O лежитъ въ началѣ координатъ, такъ что около точки O будутъ имѣть мѣсто разложенія:

$$u_1 = a_1 z + \ldots$$
$$u_n = a_1 a_n z + \ldots \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

гдѣ всѣ a_n суть положительныя числа. Функціи u_n удовлетворяютъ всѣмъ условіямъ принципа сходимости, при чемъ предѣльная функція u опредѣлена на упомянутой въ § 2 поверхности ω. Предположимъ сначала, что при всякомъ выборѣ послѣдовательности изъ функцій u_n функція u обращается тождественно въ нуль. Въ этомъ случаѣ можемъ написать:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = 0$$

---

[1]) Въ одномъ изъ номеровъ Comptes Rendus за 1916 г. американскій геометръ Gronwall даетъ точныя выраженія для m_r и M_r.

при всякомъ z, лежащемъ на ω. Поверхность ω_n содержитъ внутри себя поверхность ω_1, и слѣд., исключая z, получимъ, что u_n при всякомъ n есть функція u_1, голоморфная и однозначно-обратимая въ кругѣ C, и имѣющая разложеніе:

$$u_n = \alpha_n u_1 + \ldots \qquad (n = 2,\ 3, \ldots).$$

Въ силу существованія числа m_r и стремленія u_n къ нулю имѣемъ:

$$|u_n| < \alpha_n m_r \ \text{при}\ |z| = r$$

и слѣд.

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0.$$

Введемъ новыя функціи:

$$v_n = \frac{u_n}{\alpha_n} \qquad (n = 2,\ 3, \ldots).$$

Покажемъ, что функціи v_n ограничены во всякой области γ, лежащей внутри ω. Дѣйствительно, область γ, находясь внутри ω, лежитъ внутри какой-либо поверхности ω_n и слѣд. отображается помощью функціи v_n въ часть круга радіуса $\frac{1}{\alpha_n}$, гдѣ n—вполнѣ опредѣленное число. Обозначимъ буквою η наибольшее разстояніе контура этого отображенія отъ начала координатъ. Имѣемъ въ силу опредѣленія функцій v_n

$$v_{n+s} = v_n + \ldots$$

и слѣд. въ силу теоремы предыдущаго параграфа:

$$|v_{n+s}| < \frac{1}{\alpha_n} M_{\eta\alpha_n}$$

при всякомъ s. Отсюда непосредственно ясна ограниченность функцій v_n въ ихъ совокупности въ области γ. Слѣд. къ функціямъ v_n примѣнимъ принципъ сходимости, который даетъ предѣльную функцію v, не равную тождественно нулю, ибо $\frac{dv}{dz}$ въ точкѣ O обращается въ α_1, какъ и всякая $\frac{dv_n}{dz}$. Кромѣ того, функція v будетъ однозначно-обратима на поверхности ω (см. замѣчанія § 3). Докажемъ теперь, что функція v преобразуетъ поверхность ω на всю плоскость за исключеніемъ безконечно удаленной точки. Предположимъ наоборотъ, что v не принимаетъ на поверхности ω нѣкотораго значенія k, и обозначимъ:

$$a = |k|.$$

Возьмемъ n настолько большимъ, чтобы

$$\frac{m_{\frac{1}{2}}}{\alpha_n} > a + 1\,.$$

Какъ и раньше, всѣ v_{n+s} будемъ разсматривать, какъ функціи v_n на кругѣ радіуса $\frac{1}{\alpha_n}$, и на окружности радіуса $\frac{1}{2\alpha_n}$ имѣемъ на основаніи неравенства предыдущаго параграфа:

$$|v_{n+s}| > a + 1$$

и слѣд.

$$|v| \geq a + 1$$

на этой окружности. Этой послѣдней соотвѣтствуетъ на поверхности ω нѣкоторая замкнутая линія, и изображеніе этой линіи въ плоскости перемѣнной v есть также замкнутая линія, содержащая внутри себя начало координатъ и отстоящая отъ него на разстояніи, большемъ a. Отсюда непосредственно ясно, что v должно принять и значеніе k, а потому v преобразуетъ поверхность ω въ полную плоскость за исключеніемъ безконечно-удаленной точки, что, какъ извѣстно, не можетъ быть при $p \geqslant 2$ [1]). Итакъ, наше предположеніе о стремленіи u_n къ нулю при всякомъ z неправильно. Функціи u_n по модулю меньше единицы, и слѣд. къ нимъ приложимъ принципъ сходимости, который даетъ въ этомъ случаѣ нѣкоторую предѣльную функцію u, не равную тождественно нулю и однозначно-обратимую на поверхности ω.

Остается показать, что функція u преобразуетъ ω въ кругъ C. Положимъ для простоты письма:

$$\lim_{n=\infty} u_n = u\,.$$

Функцію u можно разсматривать, какъ функцію любого u_n въ кругѣ C, и, наоборотъ, во всякой области, лежащей внутри области значеній функціи u, можно разсматривать при достаточно большомъ n u_n, какъ функцію отъ u. Обозначимъ:

$$u = \lambda_n(u_n) \quad \text{и} \quad u_n = \mu_n(u).$$

---

[1]) Koebe. Math. Annalen. B. 67.

Какъ видно, любой точкѣ поверхности ω соотвѣтствуетъ точка v, лежащая на конечномъ разстояніи.

Докажемъ теперь, что если a принадлежитъ области значеній функціи u, то

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n(a) = a.$$

Въ плоскости перемѣнной u опишемъ около точки a кругъ любого малаго радіуса ε такъ, чтобы онъ цѣликомъ лежалъ внутри области значеній u. Въ силу принципа сходимости при достаточно большихъ значеніяхъ n имѣемъ:

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{4}$$

въ этомъ кругѣ и на его контурѣ. Окружимъ контуръ этого круга двумя концентрическими къ нему окружностями радіусовъ $\frac{3}{4}\varepsilon$ и $\frac{5}{4}\varepsilon$. Функція $\mu_n(u)$ преобразуетъ указанный кругъ радіуса ε въ область, контуръ которой находится въ силу написаннаго выше неравенства внутри образованнаго только-что кольца. Кромѣ того, эта область должна непремѣнно содержать точку a, ибо иначе мы имѣли бы:

$$|\mu_n(a) - a| > \frac{\varepsilon}{4},$$

чего не можетъ быть опять въ силу выше написаннаго неравенства. Слѣд., значенія u, соотвѣтствующія значеніямъ $u_n = a$, при достаточно большихъ значеніяхъ n лежатъ въ упомянутомъ выше кругѣ произвольно малаго радіуса ε и слѣд.

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n(a) = a.$$

Всѣ функціи $\lambda_n(z)$ опредѣлены въ кругѣ C и сами по модулю меньше единицы. Приложимъ къ этимъ функціямъ принципъ сходимости и обозначимъ предѣльную функцію черезъ $\lambda(z)$. Функція эта опредѣлена въ кругѣ C. Значеніе $z = 0$ и значенія, достаточно близкія къ нему, обязательно принадлежатъ къ области значеній функціи u, а слѣд. при этихъ z

$$\lambda(z) = z,$$

но тогда и во всемъ кругѣ C

$$\lambda(z) = z,$$

т. е.

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n(z) = z,$$

слѣд. въ кругѣ радіуса $1 - \varepsilon$ имѣемъ при достаточно большихъ значеніяхъ n:

$$|z - \lambda_n(z)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lambda_n(z)$ заполнитъ своими значеніями кругъ радіуса $1-2\varepsilon$. Но $\lambda_n(z)$ даетъ значенія, принадлежащія области значеній функціи u, а потому, въ виду произвольной малости ε, можно утверждать, что область значеній функціи u будетъ состоять изъ всего круга C, что и требовалось доказать.

Въ виду единственности отображенія поверхности ω въ кругъ C при указанныхъ въ § 2 условіяхъ, можно утверждать, что любая послѣдовательность функцій u_n приводитъ къ одной и той же предѣльной функціи u, т. е. дѣйствительно

$$\lim_{n=\infty} u_n = u,$$

ибо всякая предѣльная функція, какъ показано, совершаетъ указанное выше преобразованіе, существенность котораго извѣстна.

Предыдущее доказательство показываетъ также, что любая односвязная область ω съ безчисленнымъ множествомъ листовъ можетъ быть конформно преобразована либо на всю плоскость, за исключеніемъ безконечно удаленной точки [1]), либо на кругъ C Для доказательства этого достаточно только установить въ каждомъ случаѣ приближенныя поверхности ω_n, состоящія изъ конечнаго числа листовъ и удовлетворяющія условіямъ:

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots; \quad \lim \omega_n = \omega.$$

28 декабря 1915 г.

(Поступило въ редакцію 19.v.1916).

---

[1]) Случай $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n = 0$.

Ариѳмологическая аналогія тригонометрическимъ рядамъ Фурье.

—Между двумя отдѣлами—анализомъ и ариѳмологіей существуетъ полное соотвѣтствіе.
—Почти каждому крупному отдѣлу анализа соотвѣтствуетъ свой особый отдѣлъ ариѳмологіи.

Н. В. Бугаевъ[1]).

Эрванда Когбетлянца.

Lucas[2]) изслѣдовалъ прерывныя функціи R и S, названныя имъ числовыми періодическими, и показалъ, что онѣ могутъ быть разсмотрѣны какъ прототипы sinus и cosinus, такъ какъ обладаютъ многими свойствами этихъ функцій. Въ частности оказалось, что онѣ отличаются своеобразной періодичностью остатковъ ихъ modulo p, аналогичной періодичности тригонометрическихъ функцій.

Построить на основаніи этого ихъ свойства разложенія любыхъ числовыхъ функцій въ конечные ряды по функціямъ R и S и составляетъ цѣль настоящаго очерка, цѣль, потребовавшую разработки теоріи этихъ функцій и въ частности болѣе точнаго выясненія ихъ относительной періодичности (mod. p).

Оказывается, что въ области функцій прерывнаго перемѣннаго существуютъ разложенія функцій въ конечные ряды по относительно ортогональнымъ функціямъ R и S, вполнѣ аналогичныя по содержанію и даже по внѣшнему виду разложеніямъ въ тригонометрическіе ряды въ области функцій непрерывнаго перемѣннаго, и этимъ лишній разъ подтверждается глубокая мысль Н. В. Бугаева, что корни всѣхъ свойствъ функцій непрерывныхъ надо искать въ свойствахъ функцій прерывныхъ—въ ариѳмологіи.

---

[1]) Рѣчь: „Математика и научно-философское міросозерцаніе“.

[2]) E. Lucas. American Journal of Mathem. I (1878) стр. 184, 289. Теорія этихъ функцій подробно изложена въ томѣ II Niedere Zahlentheorie Bachmann'a, въ дальнѣйшемъ эту книгу мы будемъ цитировать В. II.

§ 1.

Числовыя функціи $R(x)$ и $S(x)$—(x—цѣлое число)—опредѣляются изъ начальныхъ значеній

$$R(0)=0 \quad S(0)=2$$
$$R(1)=1 \quad S(1)=a$$

съ помощью рекуррентныхъ формулъ

$$\frac{R}{S}(x+2)=a\cdot\frac{R}{S}(x+1)-b\cdot\frac{R}{S}(x) \qquad (\mathrm{I}).$$

гдѣ a и b суть цѣлыя числа [1]).

Какъ показалъ Lucas, всегда существуетъ такое цѣлое P, стоящее въ связи съ даннымъ простымъ числомъ p, что имѣютъ мѣсто сравненія:

$$\left.\begin{array}{l} R(x+P)\equiv R(x) \\ S(x+P)\equiv S(x) \end{array}\right\} (\mathrm{mod.}\ p)$$

Но въ зависимости отъ значеній основныхъ чиселъ a и b, опредѣляющихъ функціи R и S, число P можетъ имѣть то или иное выраженіе черезъ p. Мы установимъ, что возможны лишь пять различныхъ случаевъ. Обозначимъ δ показатель, къ которому принадлежитъ b (mod. p) и введемъ число π, полагая $\delta.\pi=p-1$. Далѣе назовемъ q то наименьшее и отличное отъ нуля значеніе аргумента x, при которомъ $R(x)\equiv 0$ (mod. p); оно связано съ числомъ p различно въ зависимости отъ значенія символа Лежандра $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ гдѣ $\Delta=a^2-4b$: а именно при $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$ q будетъ дѣлителемъ $p-1$, а при $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$—дѣлителемъ числа $p+1$. Итакъ, вводя цѣлое число h, мы имѣемъ:

$$h.q=p-\left(\frac{\Delta}{p}\right).\ {}^{2)}$$

Обозначимъ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ π и h черезъ d

$$d=D(\pi,h)=D\left[\frac{p-1}{\delta},\ \frac{p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)}{q}\right]$$

[1]) B. II стр. 72.

[2]) B. II стр. 86.

По опредѣленію P мы имѣемъ $S(P)\equiv 2$ и $R(P)\equiv 0$ и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$S^2(x)-\Delta . R^2(x)=4b^x \qquad \text{(II) [1]}$$

Отсюда, полагая $x=P$, мы получимъ $4\equiv 4b^P$ (mod. p) и ergo P кратно δ:

$$P=\delta . P_1$$

Изъ $R(P)\equiv 0$ слѣдуетъ также [2]), что P кратно q:

$$P=q . P_2$$

Разсмотримъ сперва случай $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$: $\pi\delta=hq$; сокращая на d и полагая $\pi=d\pi_1$, $h=dh_1$ $(D(\pi_1, h_1)=1)$ получаемъ $\pi_1\delta=h_1q$ и отсюда $\frac{P_1}{P_2}=\frac{q}{\delta}=\frac{\pi_1}{h_1}$ и слѣдовательно $P_1=\omega\pi_1$, $P_2=\omega h_1$. Такимъ образомъ $P=\omega . \pi_1 . \delta$. Но съ другой стороны

$$R(\pi_1\delta)=R(h_1q)\equiv 0 \quad \text{(mod. } p\text{) [2]}$$

и изъ (II) мы получаемъ:

$$S^2(\pi_1\delta)\equiv 4b^{\pi_1\delta}\equiv 4 \quad \text{(mod. } p).$$

И т. к.

$$2S(2x)=S^2(x)+\Delta . R^2(x) \qquad \text{(III) [3]}$$

то, подставляя $x=\pi_1\delta$, имѣемъ:

$$2S(2\pi_1\delta)\equiv S^2(\pi_1\delta)\equiv 4 \quad \text{т. е.} \quad S(2\pi_1\delta)\equiv 2 \quad \text{(mod. } p);$$

ясно, что и $R(2\pi_1\delta)\equiv R(2h_1 . q)\equiv 0$ (mod. p), а отсюда съ помощью формулъ

$$\left.\begin{aligned} 2 . S(x+y)&=S(x) . S(y)+\Delta R(x) . R(y) \\ 2R(x+y)&=S(x) . R(y)+R(x) . S(y) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV) [4]}$$

мы легко убѣждаемся въ томъ, что при $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$ $P\leq 2\pi_1\delta$ т. е. $\omega\leq 2$ и получаются лишь два возможныхъ случая:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{A)} & \omega=1 & P=\pi_1 . \delta \\ \text{B)} & \omega=2 & P=2\pi_1 . \delta \end{array}\right\} \left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$$

---

[1]) В. II стр. 78 форм. (85).

[2]) В. II стр. 86.

[3]) В. II стр. 81 форм. (88).

[4]) В. II стр. 79 форм. (86).

Разсмотримъ теперь $\left(\frac{\varDelta}{p}\right)=-1$. Опять таки $\delta . P_1 = q . P_2$, но на этотъ разъ $hq = p + 1 = \pi\delta + 2$; вводимъ теперь $d_1 = D(q,\ \delta)$; ясно, что т. к. $hq = \pi\delta + 2$, то $d_1 \leq 2$. Полагаемъ $\delta = d_1 . \delta_1$ и $q = d_1 . q_1$:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{q}{\delta} = \frac{q_1}{\delta_1}$$

т. к. $D(\delta_1,\ q_1) = 1$, то ясно, что $P_1 = \omega q_1$, $P_2 = \omega\delta_1$ и $P = \omega . q_1 \delta = \omega . \frac{q\delta}{d_1}$. Итакъ P имѣетъ видъ $P = \mu . \frac{q\delta}{2}$, гдѣ μ — цѣлое число.

Установимъ ограниченіе для значеній μ: изъ формулы (II)

$$S^2(q\delta) - \varDelta\, R^2(q\delta) \equiv S^2(q\delta) \equiv 4b^{q\delta} \equiv 4 \pmod{p}$$

и ergo

$$2 . S(2q\delta) \equiv S^2(q\delta) \equiv 4 \text{ т. е. } S(2q\delta) \equiv 2 \pmod{p},$$

что вмѣстѣ съ $R(2q\delta) \equiv 0 \pmod{p}$ даетъ

$$P \leq 2q\delta, \quad \text{т. е. } \mu \leq 4.$$

Покажемъ, что случай $\mu = 3$ приводитъ къ періоду $P = \frac{q\delta}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ: если-бы $P = 3\ \frac{q\delta}{2}$, то (см. (IV))

$$2R\left(q\delta + q\frac{\delta}{2}\right) \equiv S(q\delta) . R\left(\frac{q\delta}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

и

$$2S\left(\frac{3q\delta}{2}\right) \equiv 2S(0) \equiv 4 \equiv S(q\delta) . S\left(q\frac{\delta}{2}\right)$$

и сопоставляя мы имѣемъ

$$S(q\delta) \text{ не} \equiv 0 \pmod{p}$$

и необходимо

$$R\left(q\frac{\delta}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Покажемъ, что

$$S\left(\frac{q\delta}{2}\right) \equiv +2 \pmod{p}.$$

Такъ какъ $R\left(\frac{q\delta}{2}\right)\equiv 0$, то (см. (III))

$$2S(q\delta)\equiv S^2\left(q\frac{\delta}{2}\right)\equiv 4b^{q\frac{\delta}{2}} \quad (\text{mod. } p)$$

такъ какъ $P=\omega.\frac{q\delta}{d_1}$, то ясно, что въ разсматриваемомъ случаѣ $d_1=1$; значитъ q дѣлится на 2 и

$$b^{q\frac{\delta}{2}}=b^{\frac{q}{2}.\delta}\equiv 1 \ (\text{mod. } p), \text{ ergo } S(q\delta)\equiv +2 \quad (\text{mod. } p).$$

и изъ

$$S(q\delta)\,.\,S\left(q\frac{\delta}{2}\right)\equiv 4 \quad (\text{mod. } p)$$

мы получаемъ $S\left(q\frac{\delta}{2}\right)\equiv +2$, чѣмъ и показано, что въ случаѣ $\mu=3$ $P=q\frac{\delta}{2}$. Итакъ возможны при $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$ лишь три различныхъ случая:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{C)} & \mu=1 & P=q\frac{\delta}{2} \\ D) & \mu=2 & P=q\delta \\ \text{E)} & \mu=4 & P=2q\delta \end{array}\right\}\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$$

Примѣры

A)	$a=7$	$b=12$	$p=13$	$P=\pi_1\delta$
B)	$a=5$	$b=6$	$p=17$	$P=2\pi_1\delta$
D)	$a=17$	$b=75$	$p=7$	$P=q\delta$
E)	$a=4$	$b=15$	$p=7$	$P=2q\delta$

показываютъ, что формы періода A), B), D) и E) встрѣчаются въ дѣйствительности, что-же касается формы C) $P=q\frac{\delta}{2}$, то она можетъ встрѣтиться лишь въ случаѣ четныхъ q и δ, и легко показать, что необходимыми и достаточными условіями того, чтобы P было формы $q\frac{\delta}{2}$ является также нечетность $\frac{q}{2}$ и $\frac{\delta}{2}$. Вопросъ о томъ, встрѣчается-ли эта возможная форма періода въ дѣйствительности мы оставляемъ открытымъ, такъ какъ онъ для насъ не представляетъ интереса. Мы отмѣчаемъ главный результатъ всего произведеннаго разбора: *періодъ P всегда дѣлится на δ.*

§ 2.

Мы ставимъ теперь вопросъ объ относительной ортогональности функцій R и S modulo p, понимая подъ ней слѣдующее: докажемъ, что при всякихъ a, b и p имѣютъ мѣсто сравненія (mod. p)

$$\left.\begin{array}{l}
\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x) \equiv 0, \quad \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x) \equiv 0, \quad \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x) . R(n\delta x) \equiv 0 \\
\int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2(n\delta x) \equiv -\Delta . \int_0^{\frac{P}{\delta}} R^2(n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta} \left(0 < n < \frac{P}{2\delta}\right) \\
\int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2\left(\frac{P}{2\delta} . \delta x\right) = \int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2\left(\frac{Px}{2}\right) \equiv \frac{4P}{\delta} \\
\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x) . R(m\delta x) \equiv \int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x) . S(m\delta x) \equiv \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x) . S(m\delta x) \equiv 0 \left(\begin{array}{c} m \neq n \\ m < \frac{P}{2\delta} \\ n < \frac{P}{2\delta} \end{array}\right)
\end{array}\right\} \quad (V)$$

причемъ подъ знакомъ $\int_0^{N+1}$ надо понимать знакъ интеграла по конечнымъ разностямъ т. е.

$$\int_0^{N+1} f(x) = \sum_{k=0}^{N} f(k).$$

Группа формулъ (V) вполнѣ аналогична формуламъ, выражающимъ ортогональность функцій $\sin nx$ и $\cos nx$.

Переходя къ доказательству ихъ, отмѣтимъ, что функціи S и R допускаютъ [1]) такое выраженіе:

$$S(x) = \alpha_1^x + \alpha_2^x \quad R(x) = \frac{\alpha_1^x - \alpha_2^x}{\alpha_1 - \alpha_2}, \tag{VI}$$

гдѣ α_1 и α_2 суть корни уравненія

$$\xi^2 - a\xi + b = 0 .$$

Такъ какъ неопредѣленный интегралъ по конечнымъ разностямъ отъ α^x берется такъ:

$$\int \alpha^x = \frac{\alpha^x}{\alpha - 1},$$

[1]) В. II) стр. 75 форм. (73) и (74).

то по форм. (VI) мы имѣемъ:

$$\int S(n\delta x) = \frac{\alpha_1^{n\delta x}}{\alpha_1^{n\delta}-1} + \frac{\alpha_2^{n\delta x}}{\alpha_2^{n\delta}-1} = \frac{b^{n\delta}\,.\,S(n\delta\,.\,\overline{x-1}) - S(n\delta x)}{1 - S(n\delta) + b^{n\delta}};$$

такъ какъ $b^{\delta} \equiv 1$ то получаемъ сравненіе:

$$[2 - S(n\delta)]\,.\int S(n\delta x) \equiv S(n\delta\,.\,\overline{x-1}) - S(n\delta x) \quad (\text{mod. } p) \qquad (\text{VII})$$

Совершенно аналогичнымъ путемъ получается сравненіе:

$$[2 - S(n\delta)]\,.\int R(n\delta x) \equiv R(n\delta\,.\,x-1) - R(n\delta x) \quad (\text{mod. } p) \qquad (\text{VIII})$$

Функціи $R(x)$ и $S(x)$ при отрицательныхъ значеніяхъ аргумента легко опредѣляются изъ начальныхъ значеній съ помощью формулъ (I), переписанныхъ такъ:

$$S(x) = \frac{a\,.\,S(x+1) - S(x+2)}{b} \qquad R(x) = \frac{a\,.\,R(x+1) - R(x+2)}{b}.$$

Такимъ путемъ мы напримѣръ получимъ:

$$S(-1) = \frac{2a-a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} = \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} = b^{-1}.S(1)$$

$$S(-2) = \left(\frac{a^2}{b} - 2\right)\frac{1}{b} = \frac{a^2 - 2b}{b^2} = \alpha_1^{-2} + \alpha_2^{-2} = b^{-2}.S(+2)$$

и легко показать, что формулы (VI) годны и при $x < 0$ и что вообще

$$S(-x) = b^{-x}.S(x) \quad \text{и} \quad R(-x) = -a^{-x}.R(x)$$

и въ частности

$$S(-n\delta) = b^{-n\delta}.S(n\delta) \qquad R(-n\delta) = -b^{-n\delta}.R(n\delta);$$

ergo:

$$\left.\begin{aligned} S(-n\delta) &\equiv S(n\delta) \\ R(-n\delta) &\equiv -R(n\delta) \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } p) \qquad (\text{IX})$$

Формулы (VII) и (VIII) при условіи 2 не $\equiv S(n\delta)$ (mod. p) даютъ намъ возможность вычислить

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x) \quad \text{и} \quad \int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x):$$

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x) \equiv \frac{-S(-n\delta) + S(0) + S[n(P-\delta)] - S(nP)}{2 - S(n\delta)} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

и simile

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \quad 2 \text{ не} \equiv S(n\delta)$$

Условіе $2 \text{ не} \equiv S(n\delta)$ удовлетворяется при $n\delta < P$, такъ какъ изъ $S(u) \equiv +2$ слѣдуетъ $R(u) \equiv 0$ и слѣдовательно при $u < P$ $S(u) \text{ не} \equiv 2$; такимъ образомъ условіе $S(n\delta) \text{ не} \equiv 2$ можно замѣнить условіемъ $n \leq \frac{P}{\delta} - 1$.

Изъ формулъ (IV) получаются путемъ замѣны y на $-y$ слѣдующія:

$$2.S(x-y) = b^{-y}.S(x).S(y) - \Delta.b^{-y}.R(x).R(y)$$

$$2.R(x-y) = -b^{-y}.S(x).R(y) + b^{-y}.R(x).S(y),$$

а отсюда сравненія:

$$\left.\begin{aligned} 2S[\delta(x-y)] &\equiv S(\delta x).S(\delta y) - \Delta.R(\delta x).R(\delta y) \\ 2R[\delta(x-y)] &\equiv R(\delta x).S(\delta y) - S(\delta x).R(\delta y) \end{aligned}\right\} (\text{mod. } p) \qquad (\text{X})$$

Соединяя (X) со сравненіями, вытекающими изъ формулъ (IV), мы получаемъ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned} S(\delta x).S(\delta y) &\equiv S[\delta(x+y)] + S[\delta(x-y)] \\ R(\delta x).S(\delta y) &\equiv R[\delta(x+y)] + R[\delta(x-y)] \\ \Delta.R(\delta x).R(\delta y) &\equiv S[\delta(x+y)] - S[\delta(x-y)] \end{aligned}\right\} (\text{mod. } p) \qquad (\text{XI})$$

и изъ нихъ, какъ частные случаи, при $x = y$:

$$S^2(\delta x) \equiv 2 + S(2\delta x); \quad \Delta R^2(\delta x) \equiv -2 + S(2\delta x); \quad R(\delta x).S(\delta x) \equiv R(2\delta x) \qquad (\text{XII})$$

Формулы (XI) и (XII) даютъ намъ возможность доказать всю группу формулъ (V).

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} {\scriptstyle S \atop \scriptstyle \Delta R}(n\delta x).{\scriptstyle S \atop \scriptstyle R}(m\delta x) \equiv \int_0^{\frac{P}{\delta}} S[(n+m)\delta x] \pm \int_0^{\frac{P}{\delta}} S[(n-m)\delta x] \quad (\text{mod. } p)$$

При $n \mp m$ и $n,\ m \leq \frac{P}{2\delta}$ мы имѣемъ $|n \pm m| < \frac{P}{\delta}$ и слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x).R(m\delta x) \equiv \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x).S(m\delta x) \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \ (n \mp m) \ \left(n,\ m \leq \frac{P}{2\delta}\right)$$

Simile

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(m\delta x) . S(n\delta x) \equiv \int_0^{\frac{P}{\delta}} R[(n+m)\delta x] +$$

$$+ \int_0^{\frac{P}{\delta}} R[(n-m)\delta x] \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \text{ при } n \gtreqless m \text{ и } n,\ m \leq \frac{P}{2\delta}$$

такъ какъ при $n = \dfrac{P}{2\delta}$

$$R[2n\delta x] = R(Px) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Намъ осталось такимъ образомъ разсмотрѣть лишь

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} R^2(n\delta x),\ \int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2(n\delta x):$$

по формулѣ (XII)

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2(n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta} + \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(2n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta} \text{ при } 0 < n < \frac{P}{2\delta}$$

$$\equiv \frac{4P}{\delta} \text{ для } n = 0,\ \frac{P}{2\delta}.$$

Далѣе

$$-\Delta \int_0^{\frac{P}{\delta}} R^2(n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta} - \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(2n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta}\ 0 < n < \frac{P}{2\delta}$$

$$\equiv 0 \quad n = 0,\ \frac{P}{2\delta}.$$

§ 3.

Такимъ образомъ, то что мы назвали относительной ортогональностью modulo p, установлено, и мы приступаемъ къ разложенію любой числовой функции $f(x)$ по нашимъ относительно—ортогональнымъ функціямъ $R(n\delta x)$ и $S(n\delta x)$; разложеніе конечно тоже будетъ относительно (mod. p).

Если

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} [A_n . R(n\delta x) + B_n . S(n\delta x)] \quad (\text{mod. } p)$$

то ясно, что въ силу относительной періодичности функцій R и S N не должно превышать $\dfrac{P}{\delta} - 1$. Достаточно взять $N = E\left(\dfrac{P}{2\delta}\right)$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\left.\begin{aligned} S\left[\left(\frac{P}{\delta}-n\right)\delta x\right] &\equiv S(-n\delta x)\equiv S(n\delta x)\\ R\left[\left(\frac{P}{\delta}-n\right)\delta x\right] &\equiv R(-n\delta x)\equiv -R(n\delta x)\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod.}\ p) \qquad \mathrm{(XIII)}$$

Итакъ мы беремъ $N=E\left(\frac{P}{2\delta}\right)$, и получаемъ разложеніе

$$\mathrm{D)}\quad f(x)\equiv\sum_{n=0}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)}\left[A_n . R(n\delta x)+B_n . S(n\delta x)\right]\quad (\mathrm{mod.}\ p)$$

Такъ какъ въ немъ $n\leq\frac{P}{2\delta}$, то формулы (V) имѣютъ мѣсто, и для опредѣленія коэффиціентовъ A_n и B_n достаточно проинтегрировать по конечнымъ разностямъ обѣ части сравненія, предварительно умноживъ ихъ на $R(n\delta x)$ и $S(u\delta x)$. Такимъ путемъ мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u) &\equiv A_n . \int_0^{\frac{P}{\delta}} R^2(n\delta u)\equiv -A_n . \frac{2P}{\Delta\delta}\\ \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . S(n\delta u) &\equiv B_n . \int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2(n\delta u)\equiv B_n . \frac{2P}{\delta}\end{aligned}\right|\ \begin{aligned}&0<n<\frac{P}{2\delta}\\ &(\mathrm{mod.}\ p)\end{aligned}$$

Въ случаѣ если $\frac{P}{2\delta}=E\left(\frac{P}{2\delta}\right)$ въ разложеніи выпадаетъ членъ съ $R\left(\frac{Px}{2}\right)$ такъ какъ $R\left(\frac{Px}{2}\right)\equiv 0$ и не приходится опредѣлять $A_{\frac{P}{2\delta}}$, для $B_{n=\frac{P}{2\delta}}$ мы въ этомъ случаѣ получимъ

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . S\left(\frac{P}{2\delta}\delta u\right)\equiv B_{\frac{P}{2\delta}} . \int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2\left(\frac{P}{2\delta}\delta u\right)\equiv\frac{4P}{\delta} . B_{\frac{P}{2\delta}}$$

такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} A_n &\equiv -\frac{\delta . \Delta}{2P}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u)\\ B_n &\equiv \frac{\delta}{2P}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . S(n\delta u)\end{aligned}\right|\ \begin{aligned}&0<n<\frac{P}{2\delta}\\ &(\mathrm{mod.}\ p)\end{aligned}$$

и

$$B_n \equiv \frac{\delta}{4P} \cdot \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \, . \, S(n\delta u) \quad (\text{mod. } p) \text{ для } n = 0, \; \frac{P}{2\delta}.$$

Въ разложеніи нѣтъ члена съ A_0, такъ какъ $R(0) \equiv 0$, а

$$B_0 \equiv \frac{\delta}{2P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \equiv \frac{\delta}{4P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \, . \, S(0).$$

Эти формулы вполнѣ аналогичны формуламъ, дающимъ коэффиціенты разложенія функціи непрерывнаго перемѣннаго въ тригонометрическій рядъ. Мы видимъ, что случай четнаго $\frac{P}{\delta}$ отличается отъ случая, въ которомъ P не дѣлится на 2δ, и именно въ томъ, что въ первомъ случаѣ въ разложеніи есть членъ $B_n . S(n\delta x)$ при $n = \frac{P}{2\delta}$, отсутствующій во второмъ случаѣ. Чтобы дать однообразную формулу, обнимающую оба случая мы, пользуясь формулой (XIII), перепишемъ разложеніе (D) такъ:

$$f(x) \equiv B_0 \, . \, S(0) + \sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1} \left\{ \frac{A_n}{2} R(n\delta x) + \frac{B_n}{2} S(n\delta x) \right\} + B_{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)} . S\left[E\left(\frac{P}{2\delta}\right) . \delta x \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1} \left\{ -\frac{A_n}{2} . R\left[\left(\frac{P}{\delta} - n\right) \delta x\right] + \frac{B_n}{2} . S\left[\left(\frac{P}{\delta} - n\right) \delta x\right] \right\} \quad (\text{mod. } p)$$

Средній членъ конечно отсутствуетъ, если $E\left(\frac{P}{2\delta}\right) < \frac{P}{2\delta}$ и въ такомъ случаѣ суммы $\sum$ берутся отъ $n = 1$ до $n = E\left(\frac{P}{2\delta}\right)$.

Вторую сумму мы преобразуемъ, пользуясь тѣмъ, что благодаря форм. (XIII):

$$-\frac{A_n}{2} \equiv \frac{-\delta \, . \, \Delta}{4P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \, . \, R\left[\left(\frac{P}{\delta} - n\right) \delta n\right]$$

$$\frac{B_n}{2} \equiv \frac{\delta}{4P} \cdot \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \, . \, S\left[\left(\frac{P}{\delta} - n\right) \delta u\right]$$

такимъ путемъ мы получаемъ общую формулу разложенія, годную въ обоихъ случаяхъ:

$$(\mathrm{D}_1)\qquad f(x)\equiv\sum_{n=0}^{\frac{P}{\delta}-1}\left[a_n\,.\,R(n\delta x)+b_n\,.\,S(n\delta x)\right]\quad (\mathrm{mod.}\ p),$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} a_n&\equiv-\frac{\delta\varDelta}{4P}.\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,R(n\delta u)\\ b_n&\equiv\frac{\delta}{4P}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,S(n\delta u)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&(\mathrm{mod.}\ p)\\ &0\leq n\leq\frac{P}{\delta}-1\end{aligned}\qquad\text{(XIV)}$$

Чтобы провѣрить этотъ результатъ, годный конечно лишь въ интервалѣ $0\leq x\leq\frac{P}{\delta}-1$ въ общемъ случаѣ непеQіодической modulo p функціи $f(x)$, возьмемъ разложеніе (D) при $\frac{P}{2\delta}=E\left(\frac{P}{2\delta}\right)$ и разсмотримъ его правую часть, называя ее $s(x)$:

$$s(x)\equiv\frac{\delta}{4P}.\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,S^2(0)+$$

$$+\frac{\delta}{2P}.\sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\left[S(n\delta x)\,.\,S(n\delta u)-\varDelta\,.\,R(n\delta x)\,.\,R(n\delta u)\right]+$$

$$+\frac{\delta}{4P}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,S\left(\frac{Px}{2}\right).\,S\left(\frac{Pu}{2}\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{\delta}{2P}.\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\left\{S(0)+\sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1}2S[n\delta(x-u)]+S\left[\frac{P(x-u)}{2}\right]\right\}$$

т. е.

$$\frac{2P}{\delta}\,.\,s(x)\equiv\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,\sigma(x,\ u)$$

гдѣ

$$\sigma(x,\ u)\equiv S(0)+\sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1}S[n\delta(x-u)]+$$

$$+S\left[\frac{P}{2\delta}.\,\delta\left(x-u\right)\right]+\sum_{n=E\left(\frac{P}{2\delta}\right)+1}^{\frac{P}{\delta}-1}S[n\delta(x-u)]$$

такъ какъ

$$S\left[\left(\frac{P}{\delta}-n\right)\delta y\right]\equiv S(n\delta y)$$

и такимъ образомъ

$$\sigma(x,\ u)\equiv\sum_{n=0}^{\frac{P}{\delta}-1} S[n\delta(x-u)]\equiv\int_{\xi=0}^{\frac{P}{\delta}} S[\xi\delta(x-u)]$$

такъ какъ x и u лежитъ въ интервалѣ $\left[0,\ \frac{P}{\delta}-1\right]$, то $S(\delta.\overline{x-u})\equiv 2$ лишь при $x=u$, а отсюда слѣдуетъ, что

$$\begin{aligned}\sigma(u,\ x)&\equiv 0 \quad \text{для} \quad u\neq x\\ &\equiv\frac{2P}{\delta} \ \text{для} \quad u=x\end{aligned}$$

такимъ образомъ

$$\frac{2P}{\delta}s(x)\equiv f(x)\,.\,\frac{2P}{\delta} \quad (\text{mod. } p) \qquad \text{q. e. d.}$$

Переходя къ случаю $E\left(\frac{P}{2\delta}\right)<\frac{P}{2\delta}$, мы получаемъ аналогичнымъ путемъ

$$s(x)\equiv\frac{\delta}{2P}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u)\,.\,\sigma(x,\ u) \quad (\text{mod. } p)$$

гдѣ

$$\begin{aligned}\sigma(u,\ x)&\equiv\int_0^{\frac{P}{\delta}} S[\xi\,.\,\delta(u-x)]\equiv 0 \quad u\neq x\\ &\equiv\frac{2P}{\delta}\ u=x\end{aligned}$$

т. е.

$$s(x)\equiv f(x) \quad \text{при} \quad 0\leq x\leq\frac{P}{\delta}-1.$$

Разложенію (D_1) можно придать болѣе удобную форму: такъ какъ $p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ дѣлится нацѣло на $\frac{P}{\delta}$, то, обозначая частное $\dfrac{p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)}{\frac{P}{\delta}}=N$ и замѣчая, что

$$\frac{R}{S}\left[\left(\frac{P}{\delta}+n\right)\delta x\right]\equiv\frac{R}{S}\left(n\delta x\right),$$

мы получаемъ

$$f(x) \equiv \sum_{\lambda=0}^{N-1} \sum_{n=\lambda \frac{P}{\delta}}^{(\lambda+1)\frac{P}{\delta}-1} \left\{ \frac{a_n}{N} . R(n\delta x) + \frac{b_n}{N} S(n\delta x) \right\} \pmod{p.}$$

гдѣ

$$\alpha_n = \frac{a_n}{N} \equiv \frac{-P}{\delta . \left(P - \left(\frac{\Delta}{p}\right)\right)} . \frac{\delta \Delta}{4P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u)$$

значитъ

$$\left[p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)\right] . \alpha_n \equiv - \left(\frac{\Delta}{p}\right) . \alpha_n \equiv - \frac{\Delta}{4} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u)$$

и такимъ образомъ

$$\frac{a_n}{N} = \alpha_n \equiv \left(\frac{\Delta}{p}\right) . \frac{\Delta}{4} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u);$$

точно такимъ же образомъ мы получаемъ

$$\beta_n = \frac{b_n}{N} \equiv - \left(\frac{\Delta}{p}\right) . \frac{1}{4} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . S(n\delta u)$$

и мы имѣемъ окончательно разложеніе:

$$(\mathrm{D}_2) \left\{ \begin{array}{l} 4 . \left(\frac{\Delta}{p}\right) . f(x) \equiv \sum\limits_{n=0}^{P-1-\left(\frac{\Delta}{p}\right)} [A_n . R(n\delta x) + B_n . S(n\delta x)] \pmod{p} \\ \text{гдѣ} \\ A_n \equiv \Delta \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u) \\ B_n \equiv - \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . S(n\delta u) \end{array} \right.$$

Остается лишь доказать утвержденіе, что $P - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ дѣлится на $\frac{P}{\delta}$.

Для формъ A), C), D) періода P дѣлимость $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ на $\frac{P}{\delta}$ ясна безъ всякаго разбора, но случаи

$$\text{В)}\quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \quad P = 2\pi_1\delta \quad d = D(\pi, h) \quad \pi = d\pi_1$$

$$\text{Е)}\quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \quad P = 2q\delta$$

требуютъ таковаго.

Въ случаѣ

$$\text{В)}\quad p - \left(\frac{\Delta}{p}\right) = p - 1 = d \, . \, \pi_1 \, . \, \delta$$

и при четности d дѣлимость $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ на $\frac{P}{\delta} = 2\pi_1$ ясна; допустимъ-же, что $d = 2d_1 + 1$: изъ того, что

$$S(p-1) = S(d\pi_1\delta) = S\left(\frac{d}{2} . P\right) \equiv 2 \text{ [1]} \quad (\text{mod. } p)$$

слѣдуетъ, что при

$$d = 2d_1 + 1 \quad S\left(\frac{d}{2} P\right) \equiv S\left(\frac{P}{2}\right) \equiv 2 \quad (\text{mod. } p)$$

и такъ какъ

$$R\left(\frac{P}{2}\right) = R(\pi_1\delta) = R(h_1 q) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

всегда, то изъ предположенія $d = 2d_1 + 1$ вытекало-бы, что періодомъ является не P, а $\frac{P}{2}$, что доказываетъ на неправильность допущеннаго. Итакъ въ случаѣ В) всегда $d = 2d_1$ и $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ дѣлится слѣдовательно на $\frac{P}{\delta}$.

Въ случаѣ Е) точно также четность h обезпечиваетъ дѣлимость $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right) = p + 1 = hq$ на $\frac{P}{\delta} = 2q$, а допущеніе $h = 2h_1 + 1$ такъ какъ $S[(p+1)\delta] \equiv 2$ [2] даетъ слѣдствіе:

$$S[(p+1)\delta] = S(hq\delta) = S\left(\frac{h}{2} . P\right) \equiv S\left(\frac{P}{2}\right) \equiv 2,$$

а

$$R\left(\frac{P}{2}\right) = R(\delta q) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

[1]) В. II. стр. 86; форм. (94).

[2]) В. II. стр. 89.

всегда и такимъ образомъ если-бы въ случаѣ E) h было нечетно, то періодомъ было-бы не P, а $\frac{P}{2}$, слѣдовательно въ случаѣ E) всегда h четно и такимъ образомъ показано, что $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ всегда дѣлится на $\frac{P}{\delta}$ нацѣло.

Въ качествѣ примѣра возьмемъ $f(x) = x$; интегрируя при $n > 0$ по частямъ, мы получаемъ

$$I_n = \int_0^{\frac{P}{\delta}} x \,.\, S(n\delta x) = \Big/_0^{\frac{P}{\delta}} x \,.\, \int S(n\delta x) - \int_0^{\frac{P}{\delta}} \left[\int^{x+1} S(n\delta x) \right]$$

ergo

$$[2 - S(n\delta)] \,.\, I_n \equiv \frac{P}{\delta} \,.\, \Big/_{x=\frac{P}{\delta}} \{S(n\delta \overline{x-1}) - S(n\delta x)\} - \int_0^{\frac{P}{\delta}} [S(n\delta x) - S(n\delta(x+1))].$$

Разлагая

$$2S(n\delta \,.\, \overline{x+1}) = S(n\delta) \,.\, S(n\delta x) + \Delta R(n\delta) \,.\, R(n\delta x)$$

мы убѣждаемся, что интегралъ въ правой части $\equiv 0$ и такимъ образомъ

$$[2 - S(n\delta)] \,.\, I_n \equiv \frac{P}{\delta} [S(-n\delta) - S(nP)] \equiv -[2 - S(n\delta)] \,.\, \frac{P}{\delta}$$

и въ разложеніи (D_1)

$$b_n \equiv \frac{\delta \,.\, I_n}{4P} \equiv -\frac{1}{4} \quad n > 0$$

$$b_0 \equiv \frac{\delta}{4P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} x \,.\, S(0) \equiv \frac{\delta}{2P} \Big/_0^{\frac{P}{\delta}} \frac{x^{[2]}}{4} \equiv \frac{\delta}{4P} \,.\, \frac{P}{\delta} \,.\, \left(\frac{P}{\delta} - 1\right) \equiv \frac{1}{4} \,.\, \left(\frac{P}{\delta} - 1\right)$$

Далѣе

$$I'_n = \int_0^{\frac{P}{\delta}} x \,.\, R(n\delta x)$$

вычисляется тѣмъ-же путемъ, и мы получаемъ

$$I'_n \equiv -\frac{P}{\delta} \,.\, \frac{R(n\delta)}{2 - S(n\delta)},$$

а отсюда

$$a_n \equiv \frac{\Delta}{4} \,.\, \frac{R(n\delta)}{2 - S(n\delta)}$$

Такимъ образомъ окончательно мы имѣемъ:

$$\left(0 \leq x \leq \frac{P}{\delta} - 1\right) \quad 4x \equiv \left(\frac{P}{\delta} - 1\right).S(0) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\frac{P}{\delta}-1} \left[\frac{\Delta R(n\delta)}{2 - S(n\delta)}.R(n\delta x) - S(n\delta x) \right] \pmod{p}$$

Возьмемъ напримѣръ $a = 3 \quad b = 1$ и $p = 139$

$$\Delta = a^2 - 4b = 5 \text{ и } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \quad \delta = 1 \quad \pi = 138.$$

Составляя таблицу остатковъ R и S (mod. 139), мы убѣждаемся, что $q = 23$ слѣдовательно $h = 6$, а отсюда $d = D(\pi_1 h) = 6$ и $\pi_1 = 23$. Такъ какъ $S(23) \equiv +2$, то $P = \omega . \pi_1 . \delta = 23$ т. е. $\omega = 1$. И мы имѣемъ:

$$(0 \leq x \leq 22) \quad x \equiv 11 + \frac{1}{4}.\sum_{n=1}^{22}\left\{\frac{5.R(n)}{2 - S(n)}.R(nx) - S(nx)\right\} \pmod{139}$$

Покажемъ въ заключеніе, что выраженіе, составленное изъ квадратовъ коэффиціентовъ, сравнимо съ интеграломъ отъ квадрата функціи, что совершенно аналогично формулѣ

$$a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 . dx$$

изъ теоріи тригонометрическихъ рядовъ.

Изъ формулъ

$$\left.\begin{aligned} a_n &= -\frac{\delta\Delta}{4P}.\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).R(n\delta u) \\ b_n &= \frac{\delta}{4P}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).S(n\delta u) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV)}$$

мы имѣемъ:

$$b_n^2 - \frac{a_n^2}{\Delta} = \frac{\delta^2}{(4P)^2}\int_0^{\frac{P}{\delta}}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).f(v).[S(n\delta u).S(n\delta v) - \Delta R(n\delta u).R(n\delta v)] \equiv$$

$$\equiv \frac{\delta^2}{16.P^2}\int_0^{\frac{P}{\delta}}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).f(v).S[n\delta(u-v)] \qquad 0 \leq n \leq \frac{P}{\delta} - 1$$

и слѣдовательно

$$\sum_{n=1}^{\frac{P}{\delta}-1}\left(b_n{}^2-\frac{a_n^2}{\varDelta}\right)\equiv\frac{\delta^2}{16P^2}\cdot\int_0^{\frac{P}{\delta}}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u).f(v).\int_{\xi=0}^{\frac{P}{\delta}}S[\xi\delta(u-v)]$$

но

$$\int_{\xi=0}^{\frac{P}{\delta}}S[\xi\delta(u-v)]\equiv 0 \quad \text{при} \quad u \neq v$$

$$\equiv\frac{2P}{\delta} \text{ при } \quad u=v$$

и такимъ образомъ

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}}[f(u)]^2\equiv\frac{8P}{\delta}\cdot\sum_{n=0}^{\frac{P}{\delta}-1}\left[b_n{}^2-\frac{a_n{}^2}{\varDelta}\right] \quad \text{q. e. d.} \qquad \text{(XV)}$$

Точно такимъ-же образомъ изъ разложенія (D_2) мы получимъ:

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}}[f(u)]^2\equiv-8\left(\frac{\varDelta}{p}\right)\cdot\sum_{n=0}^{p-1-\left(\frac{\varDelta}{p}\right)}\left(B_n{}^2-\frac{A_n{}^2}{\varDelta}\right) \quad (\text{mod. } p)$$

Изъ разложенія (D_1) легко также получается формула,

$$f(x)\equiv\frac{\delta}{2P}\cdot\int_0^{\frac{P}{\delta}}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(v).S[\delta u(x-v)] \quad (\text{mod. } p)$$

аналогичная интегралу Фурье.

Формула (XV) въ частномъ случаѣ $f(x)=x$ принимаетъ видъ:

$$(\text{mod. } p) \quad \frac{8P}{\delta}\cdot\frac{1}{16}\left\{\left(\frac{P}{\delta}-1\right)^2+\sum_{n=1}^{\frac{P}{\delta}-1}\left(1-\frac{\varDelta R^2(n\delta)}{(2-S(n\delta))^2}\right)\right\}\equiv$$

$$\equiv\int_0^{\frac{P}{\delta}}x^2=\frac{\left(\frac{P}{\delta}-1\right)\cdot\frac{P}{\delta}\left(2\frac{P}{\delta}+1\right)}{6}$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\frac{P}{\delta}-1}\left(1-\frac{\varDelta R^2(n\delta)}{[2-S(n\delta)]^2}\right)\equiv\left(\frac{P}{\delta}-1\right)\cdot\left(\frac{P}{\delta}-4\right) \quad (\text{mod. } p)$$

что при $a=3$, $b=1$ и $p=139$ даетъ болѣе частную формулу

$$\sum_{n=1}^{22}\left(1-\frac{5.R^2(n)}{[2-S(n)]^2}\right)\equiv 1 \quad (\text{mod. } 139)$$

Москва.

About some important formulas in the theory of trigonometric series.

by Nicolas Kryloff.

In the theory of Fourier's series or rather in the theory of Fourier's constants, there exists the following well known and very important relation:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{1}$$

where

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx,$$

$f(x)$ — being a function, limited [1] and integrable in the interval $(0,2\pi)$.

This formula (1), called «équation de fermeture» by M. W. Stekloff was generalised by that scientist for many other functions used in analysis and has received various demonstrations from mathematicians, who were occupied with these questions, which are very important in the whole theory of trigonometric series.

In an article, published some years ago[2] I had occasion to observe that each formula of trigonometric «summation» will lead us to a new demonstration of (1), and to illustrate this affirmation we propose in this notice to give a demonstration of (1), basing it upon the Vallée-Poussin's formula of summation.

In his remarkable memoir [3] the Belgian mathematician has established the following summation formula:

$$S_n = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n} du = \frac{h_n g_n}{2}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)du + \right. \tag{2}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\left\{\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\cos ku du + \sin kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\sin kx du\right\}\right]$$

---

[1] $f(x)$ can also be unlimited (Fatou. Acta Math. t. XXX).

[2] „Записки Горнаго Института“ 1913 г.

[3] „Sur l'approximation....“ Bulletin de l'Academie royale de Belgique 1908.

which is no other, than the sum of $n+1$ first terms of Fourier's series, respectively multiplied by one numerical factor, constantly diminishing from one term to another [from the value 1 (for the first term) to the value 0 (for that of rank $n+2$)]; to establish this result it is sufficient to observe, that $\frac{h_n g_n}{2}$ has $\frac{1}{\pi}$, as its asymptotical value.

Putting in (2) $f(x)=1$, we obtain:

$$S_n = \frac{h_n g_n}{4}\int_{-\pi}^{+\pi} dx = \frac{h_n g_n \pi}{2} = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n} dx$$

and therefore:

$$(3) \qquad f(x).\frac{h_n g_n \pi}{2} = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n} du$$

also

$$(4) \qquad \left[S_n - f(x).\frac{h_n g_n \pi}{2}\right] = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(u)-f(x)]\left[\cos\left(\frac{u-x}{2}\right)\right]^{2n} du =$$

$$= \frac{h_n g_n \pi}{2}\left[\left\{\frac{a_0}{2} + \sum \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right\} - f(x)\right],$$

where a_i, b_i are the Fourier's coefficients.

Denoting by ω the oscillation of function $f(x)$ in the interval $0 \leq k \leq 2\pi$, we receive for two arbitrary values u and x, belonging to it:

$$-\omega \leq f(u) - f(x) \leq \omega;$$

multiplying now each part of the above inequality by $\frac{h_n}{2}\left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n}$ and integrating it, we obtain:

$$-\frac{\omega h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\cos\left(\frac{u-x}{2}\right)\right]^{2n} du \leq \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(u)-f(x)]\left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n} du \leq$$

$$\leq \frac{\omega . h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n} du;$$

hence by help of the relations (3) and (4), we have:

$$-\frac{\omega . h_n g_n \pi}{2} \leq$$

$$\leq \frac{h_n g_n \pi}{2}\left[\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)\ldots(n+k)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right\} - f(x)\right] \leq$$

$$\leq \frac{\omega . h_n g_n \pi}{2}$$

or what is the same
$$-\omega \leq S'_n - f(x) \leq \omega,$$

where S'_n is the sign of V. Poussin's sum; therefore we are assured, that the absolute value of $S'_n - f(x)$ is not greater than the oscillation of function in the interval $(0,2\pi)$.

To establish the equality:

$$\lim_{n=\infty} V_n = \lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} |S'_n - f(x)|\, dx = 0, \tag{5}$$

we proceed to demonstrate some introductory results: let $\delta = (a, b)$ be one part of interval $(-\pi, +\pi)$, upon which the oscillation of function is equal to k, then for each value of x belonging to this interval

$$\frac{h_n}{2}\int_a^b [f(u) - f(x)]\left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n} du \leq \frac{kh_n}{2}\int_a^b \left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n} du \leq$$
$$\leq \frac{kh_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{n} du = \frac{kh_n g_n \pi}{2} = k,$$

when $\lim n = \infty$; denoting now by $\delta = (a_1, b_1)$—interval, lying inside of (a, b), so that $a < a_1 < b_1 < b$, and by x one point belonging to this interval, we have:

$$\left| S_n - f(x)\frac{h_n g_n \pi}{2} \right| = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{a} [f(u) - f(x)]\left[\cos\left(\frac{u-x}{2}\right)\right]^{2n} du + \frac{h_n}{2}\int_a^b + \frac{h_n}{2}\int_b^{\pi}$$

when u lies in intervals $(-\pi, a)$, or (b, π) and x in (a_1, b_1); then $u - x \neq 0$ and $\left|\cos\frac{u-x}{2}\right| = \varepsilon < 1$; therefore

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{a} = 0; \quad \lim_{n=\infty} \frac{h_n}{2}\int_b^{\pi} = 0$$

and the to middle part $\frac{h_n}{2}\int_a^b$ we can apply the observation made above; hence

$$|S'_n - f(x)| < k + \eta,$$

where $\lim\limits_{n=\infty} \eta = 0$ and k is the oscillation of $f(x)$ over interval (a, b).

Return now to formula (5), we remember that because the condition about the integrability of $f(x)$ is given, it will be possible to divide the whole interval $(-\pi, +\pi)$ into such parts, that the sum of those [1]), upon which the oscillation of the function would be greater then σ, can be made less then an arbitrary small quantity ε; upon others, that we denote by δ_1, the oscillation of the function $\leq \sigma$. Then dividing δ_1 into such parts δ_2 and δ_3, where δ_2 would be lying inside the interval δ_1 and that the sum δ_3 would be less, than arbitrary small ε_1, we receive:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|S'_n(x) - f(x)|\,dx = \sum_{\delta_3}\int_{\delta_3}|S'_n(x) - f(x)|\,dx + \sum_{\delta_2}\int_{\delta_2}|S'_n(x) - f(x)|\,dx +$$
$$+ \sum_{\delta}\int_{\delta}|S'_n(x) - f(x)|\,dx,$$

where, for example, $\sum_{\delta_2}\int_{\delta_2}$ denotes the sum of integrals extended over the intervals δ_2.

Now, we observe, that in the middle sum:

$$|S'_n(x) - f(x)| \leq \sigma + \eta,$$

as was established above, and in the other sums evidently:

$$|S'_n(x) - f(x)| \leq \omega;$$

therefore:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|S'_n(x) - f(x)|\,dx \leq \omega\sum\delta_3 + 2\pi(\sigma + \eta) + \omega\sum\delta;$$

but

$$\sum\delta \leq \varepsilon; \quad \sum\delta_3 \leq \varepsilon_1; \quad \lim_{n=\infty}\eta = 0;$$

and σ depends solely on our choice; consequently we have:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}|S'_n(x) - f(x)|\,dx = 0,$$

which is just the desired result.

This stated, we observe that in the case of limited functions the following relation is true:

$$\left|\int_{-\pi}^{+\pi}|f^2(x) - S'^2_n(x)|\,dx\right| \leq 2L\int_{-\pi}^{+\pi}|S'_n(x) - f(x)|\,dx,$$

where L denotes the maximum of $f(x)$; therefore

[1]) Let denote them by δ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx = \lim_{n-\infty} \int S'^2_n(x)\,dx;$$

but

$$\int_{-\pi}^{+\pi} S'^2_n(x)\,dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2+b_n^2)\left(\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right)^2\right]$$

and since from the inequality of Bessel follows at once the convergence of the series $\sum a_n^2 + b_n^2$; using now the well known property of convergence factor $\left[\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)}\right]^2$, and applying the famous Abel's reasoning, we have:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} S'^2_n(x)\,dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty (a_n^2+b_n^2)\right]$$

and therefore

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty a_n^2 + b_n^2$$

i.e the equation of «fermeture», demonstrated here by means of M-r Vallée-Poussin's method of summation.

Observation: in the same manner as above it would be possible to establish the relation: $\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}[S'_n(x) - f(x)]^2 dx = 0$.

In fact using the notation:

$$c_k = c'_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} = \frac{A_n}{B_n},$$

we have:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[S'_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{+\pi}[f(x) - \frac{1}{2}c_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \cos kx + c'_k b_k \sin kx]^2\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi}[f^2(x) - \pi\left[\frac{1}{2}c_0(2-c_0)a_0^2\right] + \sum_{k=1}^{n}[c_k(2-c_k)a_k^2 + c'_k(2-c'_k)b_k^2]$$

but

$$c_k(2-c_k) = \frac{A_n}{B_n}\left(2 - \frac{A_n}{B_n}\right) = \frac{2A_nB_n - A_n^2}{B_n^2},$$

hence by addition and subtraction of

$$\frac{B_n^2}{B_n^2}a_k^2 = a_k^2, \quad \frac{B_n^2}{B_n^2}b_k^2 = b_k^2,$$

we obtain

$$(6)\quad \left\{\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right]\right\} + \left\{\sum\left[\frac{A_n - B_n}{B_n}\right]^2 [a_k^2 + b_k^2]\right\} = \\ = \int_{-\pi}^{+\pi} [S'_n(x) - f(x)]^2\,dx$$

and because

$$\pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum a_k^2 + b_k^2\right] \leq \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2\,dx,$$

the two parts of the left side of (6) are positive and consequently by passage to limit, we receive the desired equation of «fermeture».

Taking this occasion we undertake here briefly to discuss the degree of accuracy with which functions of real variables having simple discontinuity [1]) can be represented by means of M-er Vallée-Poussin's approximating function.

This function by simple change of the variables and because of the periodicity of the functions under the sign of integration, can be represented as follows:

$$P_n(x) = h_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + 2u)\left[\cos u\right]^{2n} du,$$

where the asymptotical value of

$$\frac{1}{h_n} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u^{2n}\,du$$

is, after M-er Poussin's investigations, equal to $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

From the preceeding formulas we obtain immediatly:

$$P_n(x) - f(x) = h_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x + 2u) + f(x - 2u) - 2f(x)] \cos^{2n} u\,du$$

the division of the interval in two parts $\left(0, \dfrac{\delta}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\delta}{2}\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ gives us:

$$P_n(x) - f(x) = h_n\left[\int_0^{\frac{\delta}{2}} + \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] \leq \left[4\lambda\int_0^{\frac{\delta}{2}} u\cos^{2n} u\,du + 2v\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u\,du\right] h_n,$$

[1]) The case of continued function has been already treated by M-er Vallée-Poussin in his above mentionid memoir.

if we assume, that x is the middle of a closed interval of length $2\delta \leq 2\pi$, in which $f(x)$ satisfies the Lipschitz condition

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \lambda\, |x_2 - x_1|;$$

by v is denoted the oscillation of $f(x)$ in the whole interval of integration; then evidently:

$$|f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)| \leq |f(x+2u) - f(x)| + |f(x-2u) - f(x)|$$

and, accordingly, the above written relation is justified.

Because of the evident relation, $\cos u < e^{-\frac{u^2}{2}}$, we obtain:

$$(\alpha) \qquad |P_n(x) - f(x)| < 4\lambda . h_n \int_0^{\frac{\delta}{2}} u e^{-nu^2} du + h_n . 2v \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u du;$$

the first integral of the right side is evidently less than

$$\frac{1}{n}\int_0^{\infty} v e^{-v^2}\, dv = \frac{A}{n}, \qquad \text{(where } A = \text{const.)}$$

and the second

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 u]^n du = \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u)^n du$$

by means of the relation $\sin u \gtrless \frac{2u}{\pi}$, holding for the interval $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, is evidently less than

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{4u^2}{\pi^2}\right)^n du = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\delta}{\pi}}^{1} (1 - v^2)^n dv,$$

where $\frac{2u}{\pi} = v$; a new change of variables gives us:

$$\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\delta}{\pi}}^{1} (1 - v^2)^n du = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\delta^2}{\pi^2}}^{1} (1-u)^n \frac{du}{\sqrt{u}} \leq \frac{\pi^2}{4\delta}\int_{\frac{\delta^2}{\pi^2}}^{1} (1-u)^n du = \frac{\pi^2}{4\delta}\left[\frac{[1-u]^{n+1}}{(n+1)}\right]_1^{\frac{\delta^2}{\pi^2}} =$$

$$= \frac{\pi^2\left[1 - \frac{\delta^2}{\pi^2}\right]^{n+1}}{4\delta\,(n+1)} < \frac{\pi^2}{4\delta\,(n+1)}$$

therefore from (α) we obtain:

$$(\beta) \qquad |P_n(x) - f(x)| < \frac{B.\lambda}{\sqrt{n}} + \frac{Cv}{\sqrt{n}.\delta}, \text{ (where } B, C \text{ are the constants)}$$

the preceeding result can be summed up as follows.

Theorem: *Let $f(x)$ be a function of x, of period 2π, finite and integrable; then the approximating function of M. Vallée-Poussin for evay point x, lying in the middle of a closed interval of length $2\delta \leq 2\pi$, in which $f(x)$ satisfies the Lipschiz condition, posseses the property, expressed by the above formula (β), where v is the oscillation of $f(x)$ in the interval $-\pi \leq x \leq \pi$.*

This theorem completes the interesting result of M. Wilder (in his recent memoir) [1] as concerns M. Vallée-Poussin's summation and evidently in the same manner the other theorems of M. Wilder can be extended.

To close, it would be perhaps not without certain interest to observe, that the well known theorem concerning the possibility of integration term by term of the trigonometric series can be demonstrated, basing upon V.-Poussin's formula of summation, as follows: taking the formula

$$S_n = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \left[\cos\frac{u-x}{2}\right]^{2n} du$$

and observing that:

$$S_n = \frac{h_n g_n}{2}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\, du + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\left[\cos kx \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kudu + \sin kx \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kxdx\right\}\right]$$

we have surely:

$$\int_{-\pi}^{x} S_n(x)\, du = \frac{h_n g_n \pi}{2}\left[a_0 x + \left(a_0\pi - \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\,\frac{(n-1)^k a_k}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\left(\frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k}\right)\right]$$

but, remembering that:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{x} S_n(x)dx = \int_{-\pi}^{x} f(x)dx; \quad \lim_{u=\infty}\frac{h_n g_n \pi}{2} = 1; \quad \lim_{n=\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} = 1,$$

[1] «On the degree of approximation to discontinuous functions, etc.» Rendiconti del Circolo mat. di Palermo. t. XXXIX.

we find the required formula

$$(8)\quad \int_{-\pi}^{x} f(x)dx - a_0 x = \left(a_0\pi - a_1 + \frac{a_2}{2} - \ldots\right) + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n},$$

if we can establish the absolute convergence of series:

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots; \quad (9)\ b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \ldots$$

but in consequence of Cauchy's inequality, we have

$$\left(\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \ldots\right) \leq \sqrt{a_n^2 + a_{n+1}^2 + \ldots} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots},$$

i.e the desired result, because the same reasoning can be repeated for the series (9).

Because the expression of x:

$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \ldots\right)$$

is a series that does not converge absolutely, we can say: in order that a function $F(x)$, possessing the finite and integrable derivative $f(x)$, may be developed in an absolutly convergente trigonometric series, it is necessary and sufficient, that $a_0 = \pi \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = 0$; this follows imnmediatly from (8) as M. V.-Poussin has remarked in an article [1]) involving the same questions, but from the point of view of Poisson's method of summation.

N. Kryloff.

Gagry. Caucasus.
25/xi. 1916.

---

[1]) „Sur q.q. applications de l'intégrale de Poisson". Bull. de l'Ac. royale de Belgique. 1892.

О законѣ большихъ чиселъ.

С. Н. Бернштейна.

1. Различные виды закона большихъ чиселъ формулируются такимъ образомъ: *существуетъ нѣкоторая величина x, зависящая отъ числа n, обладающая свойствомъ, что вѣроятность неравенства $|x| < \varepsilon$, при произвольномаломъ ε, стремится къ достовѣрности, когда n безконечно возрастаетъ.*

Укажемъ условіе необходимое и достаточное для соблюденія этого закона. Пусть $f(x)$ будетъ какая-нибудь четная, ограниченная, возрастающая и непрерывная функція, удовлетворяющая условію, что $f(0)=0$ (напримѣръ, $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$). *Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы вѣроятность неравенства $|x|<\varepsilon$, при произвольномъ ε, имѣла предѣломъ достовѣрность, заключается въ томъ, что* пред. Мат. ож. $f(x)=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ классическихъ разсужденій Чебышева вытекаетъ, что соблюденіе условія: пред. Мат. ож. $f(x)=0$, влечетъ за собой, что вѣроятность неравенства $f(x)<f(\varepsilon)=\varepsilon_1$, равнозначнаго неравенству $|x|<\varepsilon$, имѣетъ предѣломъ 1. Наоборотъ, если вѣроятность неравенства $|x|<\varepsilon$ больше, чѣмъ $1-\eta$, то

$$|\text{Мат. ож. } f(x)| < f(\varepsilon) + L\eta,$$

гдѣ L есть верхняя граница $f(x)$; а потому, если ε и η суть два произвольно малыхъ числа, то пред. Мат. ож. $f(x)=0$.

Указанное условіе упрощается, если дано, что $|x|$ есть величина *ограниченная*; тогда условіе ограниченности функціи $f(x)$ отпадаетъ, и тѣмъ же разсужденіемъ устанавливается, что *условіе необходимое и достаточное для того, чтобы вѣроятность неравенства $|x|<\varepsilon$* (если x величина ограниченная) *имѣла предѣломъ 1, состоитъ въ томъ, что Мат. ож. x^2 имѣетъ предѣломъ 0.*

Посредствомъ столь же простыхъ соображенiй можно получить удобное для практики условiе необходимое и достаточное примѣнимости теоремы Пуассона къ ряду зависимыхъ опытовъ.

2. Теорема. *Пусть p_k представляетъ вѣроятность a priori наступленiя событiя A_k; вѣроятность же A_k въ случаѣ наступленiя A_i пусть будетъ p_k^i, а въ случаѣ ненаступленiя A_i пусть вѣроятность A_k станетъ равной $p_k^{(i)}$; пусть далѣе n есть число всѣхъ испытанiй, а m — число наступившихъ событiй. Условiе необходимое и достаточное для того, чтобы, при произвольно маломъ ε, вѣроятность неравенства*

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right|<\varepsilon$$

имѣла предѣломъ достовѣрность, когда $n\to\infty$, состоитъ въ томъ, что

$$p_iq_i\left[\frac{p_1^i+p_2^i+\ldots+p_n^i}{n}-\frac{p_1^{(i)}+p_2^{(i)}+\ldots p_n^{(i)}}{n}\right]$$

равномѣрно (т. е. при всякомъ $i<n$) *стремится къ* 0.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$I_n=\text{Мат. ож.}\left[\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right]^2.$$

Въ такомъ случаѣ

$$I_n=\frac{1}{n}\Bigg[\text{Мат. ож.}\,(x_1-p_1)\left(\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)+$$

$$+\text{Мат. ож.}\,(x_2-p_2)\left(\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)+$$

$$+\ldots+\text{Мат. ож.}\,(x_n-p_n)\left(\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)\Bigg],$$

гдѣ x_i получаетъ значенiе 1 или 0, въ зависимости отъ того, наступаетъ ли A_i или нѣтъ. Поэтому

$$\text{Мат. ож.}\,(x_i-p_i)\left(\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)=$$

$$=p_iq_i\left(\frac{p_1^i+p_2^i+\ldots+p_n^i}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)-$$

$$-p_iq_i\left(\frac{p_1^{(i)}+p_2^{(i)}+\ldots+p_n^{(i)}}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)=$$

$$=p_iq_i\left[\frac{p_1^i+p_2^i+\ldots+p_n^i}{n}-\frac{p_1^{(i)}+p_2^{(i)}+\ldots+p_n^{(i)}}{n}\right].$$

Согласно предположенію, при всякомъ i, полученное выраженіе можетъ быть сдѣлано менѣе любого произвольно малаго числа ε, если n неограниченно возрастаетъ. Слѣдовательно,

$$I_n < \varepsilon,$$

откуда вытекаетъ достаточность высказаннаго въ теоремѣ условія.

Перейдемъ теперь къ доказательству необходимости упомянутаго условія.

Полагая для краткости

$$\frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} - \frac{p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + \ldots + p_n^{(i)}}{n} = \varepsilon_i,$$

замѣчаемъ сначала, что

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} - \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} = -q_i\varepsilon_i,$$

такъ какъ

$$p_k = p_i p_k^i + q_i p_k^{(i)}.$$

Итакъ допустимъ, что законъ большихъ чиселъ соблюденъ, т. е. вѣроятность неравенства

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| < \varepsilon \qquad \text{(I)}$$

равна $1 - \alpha$, гдѣ ε и α стремятся къ 0 при возрастаніи n. Въ такомъ случаѣ, послѣ наступленія A_i вѣроятность неравенства (I) остается больше, чѣмъ $1 - \dfrac{\alpha}{p_i}$. А потому, послѣ наступленія A_i,

$$\left|\text{Мат. ож.}\left(\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right)\right| < \varepsilon + \frac{\alpha}{p_i}.$$

Но, послѣ наступленія A_i,

$$\text{Мат. ож.}\,\frac{m}{n} = \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n};$$

слѣдовательно,

$$\left|\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} - \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n}\right| < \varepsilon + \frac{\alpha}{p_i},$$

откуда

$$|p_i q_i \varepsilon_i| = p_i q_i \left|\frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} - \frac{p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + \ldots + p_n^{(i)}}{n}\right| < \varepsilon + \alpha,$$

ч. и т. д.

3. Указанное условіе примѣнимости теоремы Пуассона къ зависимымъ испытаніямъ можно видоизмѣнить, введя на мѣсто

$$\varepsilon_i = \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} - \frac{p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + \ldots + p_n^{(i)}}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{p_k^i}{n} - \frac{p_k^{(i)}}{n} \right),$$

ту же сумму только для испытаній, слѣдующихъ за A_i, т. е. беря сумму

$$\varepsilon_i' = \sum_{k=i+1}^{k=n} \left(\frac{p_k^i}{n} - \frac{p_k^{(i)}}{n} \right).$$

Чтобы въ этомъ убѣдиться замѣтимъ, что

$$I_n = \frac{1}{n^2} \text{Мат. ож.} \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - p_k)^2 + \frac{2}{n^2} \text{Мат. ож.} \left[(x_1 - p_1) \sum_{k=2}^{k=n} (x_k - p_k) + \right.$$
$$\left. + \ldots + (x_{n-1} - p_{n-1}) \sum_{k=n}^{k=n} (x_n - p_n) \right] =$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} p_k q_k + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{i=n} p_i q_i \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{p_k^i - p_k^{(i)}}{n}.$$

Такимъ образомъ изъ условія

$$p_i q_i \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{p_k^i}{n} - \frac{p_k^{(i)}}{n} < \varepsilon$$

вытекаетъ, что $I_n < \frac{1}{4n} + \varepsilon$, а потому видоизмѣненное условіе достаточно для примѣнимости теоремы Пуассона.

Съ другой стороны, покажемъ необходимость видоизмѣненнаго условія. Съ этой цѣлью замѣчаемъ, что, если теорема Пуассона примѣнима, то неравенство

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \right| < \varepsilon \tag{I}$$

имѣетъ вѣроятность $1 - \alpha$, гдѣ α и ε стремятся къ 0 съ возрастаніемъ n; вслѣдствіе этого, при всякомъ $i < n$, вѣроятность неравенства

$$\left| \frac{m - m_i}{n} - \frac{p_{i+1} + \ldots + p_n}{n} \right| < 2\varepsilon, \tag{II}$$

гдѣ m есть число появившихся A при первыхъ i опытахъ, болѣе чѣмъ $1 - 2\alpha$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, для всякаго $n > n_0$, неравенство (I) имѣетъ вѣроятность больше, чѣмъ $1-\alpha$, и возьмемъ $n > \frac{n_0}{\varepsilon}$. Тогда, для $i \leq n_0$,

$$\left|\frac{m_i}{n} - \frac{p_1+p_2+\ldots+p_i}{n}\right| < \frac{n_0}{n} < \varepsilon, \tag{III}$$

а, для $i > n_0$, вѣроятность неравенства

$$\left|\frac{m_i}{i} - \frac{p_1+p_2+\ldots+p_i}{i}\right| < \varepsilon, \text{ т. е. } \left|\frac{m_i}{n} - \frac{p_1+p_2+\ldots+p_i}{n}\right| < \frac{\varepsilon . i}{n} \tag{IV}$$

болѣе, чѣмъ $1-\alpha$; поэтому вѣроятность совмѣщенія неравенства (I) съ неравенствомъ (III) больше, чѣмъ $(1-\alpha)$, а съ неравенствомъ (IV) больше, чѣмъ $1-2\alpha$. Слѣдовательно, вѣроятность (II) также болѣе, чѣмъ $1-2\alpha$; а потому, подобно предыдущему, убѣждаемся въ необходимости условія, чтобы

$$p_i q_i \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{p_k^i - p_k^{(i)}}{n}$$

равномѣрно стремилось къ 0.

4. Примѣнимъ, напримѣръ, послѣдній результатъ къ совокупности испытаній *связанныхъ въ цѣпь*. Пользуясь вычисленіями А. А. Маркова[1]), найдемъ

$$p_i q_i \varepsilon_i' = p_i q_i \left[\frac{\delta_{i+1} + \delta_{i+1}\delta_{i+2} + \ldots + \delta_{i+1}\delta_{i+2}\ldots\delta_n}{n}\right],$$

гдѣ δ_{h+1} есть разность между вѣроятностями A_{h+1} при предположеніи, что A_h произошло, и при предположеніи, что A_k не произошло (т. е. $\delta_{h+1} = p_{h+1}^h - p_{h+1}^{(h)}$).

Такимъ образомъ для примѣнимости закона большихъ чиселъ къ испытаніямъ связаннымъ въ цѣпь *необходимо и достаточно, чтобы* $p_i q_i \varepsilon_i'$ *равномѣрно стремилось къ* 0. Отсюда немедленно получаемъ достаточное условіе А. А. Маркова $|\delta_i| < \lambda < 1$.

Легко видѣть, что вообще *достаточно*, чтобы произведеніе

$$\delta_{i+1}\delta_{i+2}\ldots\delta_{i+n}$$

равномѣрно стремилось къ 0 *при возрастаніи* n, *когда* $i < n$. *Это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, когда* $|\delta_k| < 1 - \frac{1}{k^\alpha}$, *гдѣ* $\alpha < 1$. Изъ слу-

[1]) Изслѣдованіе общаго случая испытаній связанныхъ въ цѣпь. Записки Имп. Акад. Наукъ. т. XXV. 1910 г.

чаевъ, когда послѣднее условіе нарушено, но $p_i q_i \varepsilon_i$ все же стремится къ 0, а потому теорема Пуассона примѣнима, отмѣтимъ два случая: 1) если среди чиселъ δ_k *періодически* встрѣчаются отрицательныя числа; 2) если $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{p_k q_k}{n}$ стремится[1]) къ 0, при $n \to \infty$. Напротивъ, *законъ большихъ чиселъ непримѣнимъ, если всѣ δ положительны и произведеніе $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ не стремится къ 0; это имѣетъ мѣсто, въ частности, когда $\delta_k > 1 - \frac{1}{k^\alpha}$, гдѣ $\alpha > 1$.*

Замѣтимъ, что въ случаѣ, когда $\delta_k = 1 - \frac{1}{k}$, примѣнимость теоремы Пуассона зависитъ отъ того, будетъ-ли $p_k q_k$ стремиться къ 0. Дѣйствительно, если $p_i q_i$ не стремится къ 0 (напримѣръ, если $p_i = \frac{1}{2}$), то

$$p_i q_i \varepsilon_i' = \frac{p_i q_i}{n} \left[\frac{i}{i+1} + \frac{i}{i+2} + \ldots + \frac{i}{n} \right]$$

съ возрастаніемъ n стремится къ 0, но *не равномѣрно*, т. к. при всякомъ n можно найти значеніе i, для котораго это выраженіе не стремится къ 0; напротивъ, оно стремится къ 0 *равномѣрно*, если $p_i q_i \to 0$; слѣдовательно, теорема Пуассона примѣнима только въ послѣднемъ случаѣ.

1) Поэтому, въ частности, законъ большихъ чиселъ примѣнимъ всегда, когда $\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$ стремится къ 0 (при этомъ нѣтъ даже надобности ограничиваться предположеніемъ, что испытанія связаны въ цѣпь).