О среднемъ значенiи числа классовъ чисто коренныхъ формъ отрицательнаго опредѣлителя.

И. М. Виноградова (Петроградъ).

Гауссъ въ art. 302 своего сочиненiя Disquisitiones Arithmeticae безъ доказательства даетъ формулу для средняго значенiя числа классовъ чисто коренныхъ квадратичныхъ формъ отрицательнаго опредѣлителя, прибавляя, что эта формула получена съ помощью довольно труднаго теоретическаго изслѣдованiя (per disquisitionem theoreticam satis difficilem).

Въ настоящей работѣ мы имѣемъ въ виду вывести формулу Гаусса съ указанiемъ верхняго предѣла погрѣшности, основываясь на довольно элементарныхъ соображенiяхъ. Въ работѣ, которая вскорѣ появится въ печати, мы совершенно инымъ путемъ трактовали тотъ же вопросъ, но тогда могли указать верхнiй предѣлъ погрѣшности порядка $m^{5/6}\log m$, а въ настоящей работѣ устанавливаемъ верхнiй предѣлъ порядка $m^{3/4}(\log m)^2$.

§ 1. Выводъ асимптотическаго выраженiя для обобщенной суммы Гаусса.

Пусть n и λ обозначаютъ числа, удовлетворяющiя условiямъ

$$n \geqq 8 \qquad (1)$$

$$-1 < \lambda < 1 \qquad (2)$$

ξ — цѣлое число, удовлетворяющее условiю

$$0 < \xi \leqq \frac{n}{4} - \lambda \qquad (3)$$

и наконецъ η и T положительныя числа, причемъ η можетъ безпредѣльно убывать, а T можетъ безпредѣльно возрастать.

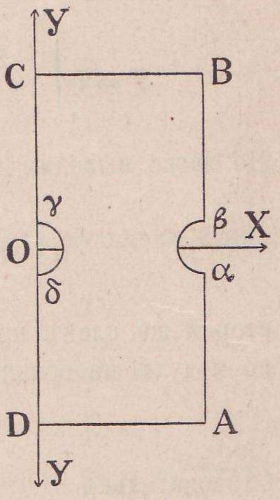
Будемъ разсматривать на плоскости комплекснаго перемѣннаго $z = x + yi$ область Ω, ограниченную контуромъ $A\alpha\beta BC\gamma\delta DA$ (черт. 1), состоящимъ изъ прямыхъ

$$x = 0, \; x = \xi, \; y = T, \; y = -T$$

и полуокружностей радіуса η, описанныхъ вокругъ точекъ 0 и ξ, которыми эти точки изъ области исключаются. Въ области Ω (внутри и на контурѣ) функція

$$\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+z)^2}}{e^{2\pi i z}-1}$$

не имѣетъ другихъ особенныхъ точекъ кромѣ полюсовъ $z = k$, съ вычетами $\dfrac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}}{2\pi i}$, гдѣ k пробѣгаетъ всѣ цѣлыя числа, которыя > 0 и $< \xi$. Отсюда по извѣстной теоремѣ Коши объ интегрированіи по контуру заключаемъ, что сумма



Черт. 1.

$$\sum_{k>0}^{k<\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}$$

представится слѣдующею суммой интеграловъ функціи $\dfrac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+z)^2}}{e^{2\pi i z}-1}$

$$\int_{A\alpha} + \int_{\alpha\beta} + \int_{\beta B} + \int_{BC} + \int_{C\gamma} + \int_{\gamma\delta} + \int_{\delta D} + \int_{DA}$$

Но легко показать, что каждый изъ интеграловъ $\int_{BC}$ и $\int_{DA}$ въ предѣлѣ при $T = \infty$ обращается въ 0 и далѣе, что

$$\underset{\eta=0}{\text{пред.}} \left(\int_{\alpha\beta} + \int_{\gamma\delta} \right) = -\frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{n}\lambda^2} - \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+\xi)^2}$$

Поэтому можемъ написать

$$\frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{n}\lambda^2} + \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+\xi)^2} + \sum_{k>0}^{k<\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2} =$$

$$= \underset{\eta=0,\; T=\infty}{\text{предѣлъ}} \left(-i \int_{\eta}^{T} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+yi)^2}}{e^{-2\pi y}-1} dy - i \int_{\eta}^{T} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda-yi)^2}}{e^{2\pi y}-1} dy \right) +$$

$$+ \underset{\eta=0,\; T=\infty}{\text{предѣлъ}} \left(i \int_{\eta}^{T} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+\xi+yi)^2}}{e^{-2\pi y}-1} dy + i \int_{\eta}^{T} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+\xi-yi)^2}}{e^{2\pi y}-1} dy \right) \quad . \; . \; . \; (4)$$

Первое слагаемое правой части равенства (4) обозначимъ чрезъ S', а второе чрезъ S''. Послѣ простыхъ преобразованій получимъ

$$S'=i\int_0^\infty e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+yi)^2}dy+ie^{\frac{2\pi i}{n}\lambda^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{4\pi\lambda}{n}y}-e^{\frac{4\pi\lambda}{n}y}}{e^{2\pi y}-1}e^{-\frac{2\pi i}{n}y^2}dy \quad . \; . \; (5)$$

Не легко выводимъ равенство

$$i\int_0^\infty e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+yi)^2}dy=i\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}t^2}dt-\int_0^\lambda e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt$$

второй же членъ правой части равенства (5) въ силу условій (1) и (2) по модулю не больше

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{e^{2\pi y}-1}dy=\frac{1}{\pi}$$

Слѣдовательно

$$S'=i\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}t^2}dt-\int_0^\lambda e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt+\frac{\theta'}{\pi};\; |\theta'|\leqq 1$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ и пользуясь условіемъ (3), найдемъ

$$S''=-i\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}t^2}dt+\int_0^{\lambda+\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt+\frac{\theta''}{\pi};\; |\theta''|\leqq 1$$

На основаніи всего доказаннаго мы равенство (4) можемъ представить такъ

$$\sum_{k=1}^{k=\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}=\int_\lambda^{\lambda+\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt+2\theta''';\; |\theta'''|<1$$

Отсюда легко заключить, что

$$\sum_{k=1}^{k=\xi} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}=O(\sqrt{n}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Положимъ далѣе

$$\xi=\left[\frac{n}{4}-\lambda\right]$$

Въ этомъ случаѣ разность $\xi-\left[\frac{n}{4}\right]$ по модулю не больше 1. Далѣе легко видѣть, что каждый изъ интеграловъ

$$\int_0^\lambda e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt; \quad \int_{\lambda+\xi}^\infty e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}dt$$

по модулю не больше 1. Поэтому, замѣчая что

$$\int_0^\infty e^{\frac{2\pi i}{n}t^2}\,dt=\frac{1+i}{4}\sqrt{n}$$

будемъ имѣть

$$\sum_{k>0}^{k<\frac{n}{4}} e^{\frac{2\pi i}{n}(\lambda+k)^2}=\frac{1+i}{4}\sqrt{n}+5\theta;\ |\theta|<1\ \ldots\ldots\ldots (7)$$

§ 2. Опредѣленіе порядка, котораго не превосходитъ порядокъ суммъ $\sum\limits_{x>P}^{x\leqq Q}\sin 2\pi\left(\frac{n}{x}-Ax\right)$ *и* $\sum\limits_{x>P}^{x\leqq Q}\cos 2\pi\left(\frac{n}{x}-Ax\right)$.

1⁰. Пусть n обозначаетъ число, удовлетворяющее условію

$$n\geqq 16\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

R и A любыя числа и λ, P, Q—числа удовлетворяющія неравенствамъ

$$\sqrt[3]{n}\leqq\lambda+P\leqq\lambda+Q\leqq\sqrt{\frac{n}{2}}\ \ldots\ldots\ldots (2)$$

Опредѣляя число x_s равенствомъ

$$\lambda+x_s=\sqrt{\frac{n}{s-A}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

мы при помощи цѣлыхъ чиселъ μ и ν, найденныхъ изъ условій

$$x_{\mu+1}<P\leqq x_\mu$$
$$x_\nu<Q\leqq x_{\nu-1}$$

составимъ рядъ

$$x_{\mu+1}<x_\mu<x_{\mu-1}<\ldots<x_{\nu+1}<x_\nu<x_{\nu-1}$$

Сумму

$$S=\sum_{x>P}^{x\leqq Q}\sin 2\pi\left(R+\frac{n}{\lambda+x}-Ax\right)$$

разложимъ по схемѣ

$$S=\sum_{x>P}^{x\leqq x_\mu}+\sum_{x>x_\mu}^{x\leqq x_{\mu-1}}+\sum_{x>x_{\mu-1}}^{x\leqq x_{\mu-2}}+\ldots+\sum_{x>x_{\nu+1}}^{x\leqq x_\nu}+\sum_{x>x_\nu}^{x\leqq Q}\ \ldots (4)$$

Займемся опредѣленіемъ порядка, котораго не превосходитъ порядокъ одной изъ полученныхъ суммъ. Для того, чтобы одновременно разсмотрѣть всѣ случаи, обратимся къ суммѣ

$$T=\sum_{x>a}^{x\leqq b}\sin 2\pi\left(R+\frac{n}{\lambda+x}-Ax\right),$$

гдѣ a и b цѣлыя числа, удовлетворяющія неравенствамъ

$$x_s \leqq a \leqq b \leqq x_{s-1},$$

причемъ s обозначаетъ одно изъ чиселъ

$$\mu+1,\ \mu,\ \mu-1, \dots \nu+1,\ \nu$$

Замѣчая, что функція sx при цѣлыхъ x принимаетъ цѣлыя значенія, можемъ написать

$$T = \sum_{x>a}^{x\leqq b} \sin 2\pi\left(R + \frac{n}{\lambda+x} - Ax + sx\right) = \sum_{x>a}^{x\leqq b} \sin 2\pi\left(R + \frac{n}{\lambda+x} + \frac{nx}{(\lambda+x_s)^2}\right)$$

Отсюда послѣ очевидныхъ преобразованій получимъ неравенство

$$|T| < \left|\sum_{x>a}^{x\leqq b} \sin 2\pi \frac{n(x-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+x)}\right| + \left|\sum_{x>a}^{x\leqq b} \cos 2\pi \frac{n(x-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+x)}\right| \quad . \ (5)$$

2°. Разсматривая z, какъ комплексное перемѣнное

$$z = x + yi,$$

функцію

$$\Phi(z) = \frac{n(z-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+z)}$$

представимъ такъ

$$\Phi(z) = \varphi(x,\ y) + i\psi(x,\ y),$$

гдѣ

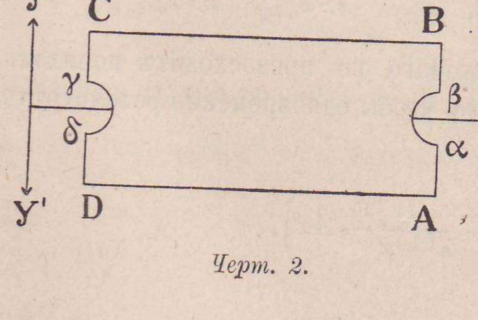
$$\varphi(x,\ y) = \frac{n}{(\lambda+x_s)^2}\,\frac{(x-x_s)^2(\lambda+x) + (-2x_s + x - \lambda)y^2}{(\lambda+x)^2 + y^2}$$

$$\psi(x,\ y) = \frac{n}{(\lambda+x_s)^2}\,\frac{[(\lambda+x)^2 - (\lambda+x_s)^2]y + y^3}{(\lambda+x)^2 + y^2}.$$

Функція

$$\frac{e^{2\pi i\Phi(z)}}{e^{2\pi iz} - 1}$$

за исключеніемъ полюсовъ $z = k$, гдѣ k пробѣгаетъ всѣ цѣлыя числа, которыя $> a$ и $< b$, не имѣетъ особенныхъ точекъ въ области, (внутри и на контурѣ) ограниченной контуромъ $A\alpha\beta BC\gamma\delta DA$, (черт. 2.), состоящимъ изъ прямыхъ $x = a$, $x = b$, $y = T$, $y = -T$ и полуокружностей радіуса η, описанныхъ вокругъ точекъ a и b,



Черт. 2.

которыми эти точки изъ области исключаются. Примѣняя къ этой функціи теорему Коши объ интегрированіи по контуру, получимъ, разсуждая подобно тому, какъ въ § 1, общую формулу

$$\sum_{x>a}^{x<b} e^{2\pi i \frac{n(x-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+x)}} = -\underset{\eta=0}{\text{пред.}}\, i\int_\eta^T \left(\frac{e^{-2\pi\psi(a,\ y)}}{e^{-2\pi y}-1} + \frac{e^{2\pi\psi(a,\ y)}}{e^{2\pi y}-1}\right) e^{2\pi i\varphi(a,\ y)} dy +$$

$$+ \underset{\eta=0}{\text{пред.}}\, i\int_\eta^T \left(\frac{e^{-2\pi\psi(b,\ y)}}{e^{-2\pi y}-1} + \frac{e^{2\pi\psi(b,\ y)}}{e^{2\pi y}-1}\right) e^{2\pi i\varphi(b,\ y)} dy +$$

$$+ \int_a^b \left(\frac{-e^{-2\pi\psi(x,\ T)}}{e^{2\pi ix-2\pi T}-1} + \frac{e^{2\pi\psi(x,\ T)}}{e^{2\pi ix+2\pi T}-1}\right) e^{2\pi i\varphi(x,\ T)} dy + \theta;\ |\theta| \leqq 1 \quad . \ . \ (6)$$

3⁰. Число T мы положимъ равнымъ

$$T = \sqrt{x_{s-1} - x_s} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (7)$$

Тогда при

$$x_s \leqq x \leqq x_{s-1};\ 0 \leqq y \leqq T$$

можемъ написать

$$\psi(x,\ y) = \frac{n}{(\lambda+x_s)^2} \frac{[(\lambda+x)^2-(\lambda+x_s)^2]y}{\lambda+x)^2} + \frac{\theta'}{2};\ |\theta'| \leqq 1 \quad . \ . \ . \ (8)$$

Въ самомъ дѣлѣ на основаніи (3), (1) и (2) найдемъ

$$\frac{1}{6} < \frac{\sqrt{n}}{2\left(s-A\right)^{\frac{3}{2}}} < x_{s-1} - x_s < \frac{\sqrt{n}}{\left(s-A\right)^{\frac{3}{2}}}$$

и слѣдовательно

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}} < T < \sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (9)$$

Пользуясь найденными неравенствами, нетрудно заключить, что въ тождествѣ

$$\psi(x,\ y) = \frac{n}{(\lambda+x_s)^2} \frac{[(\lambda+x)^2-(\lambda+x_s)^2]y}{(\lambda+x)^2} + \frac{ny^3}{(\lambda+x)^2[(\lambda+x)^2+y^2]}$$

второй членъ правой части не больше $\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \leqq \frac{1}{2}$, чѣмъ равенство (8) доказано. Пользуясь (3), изъ равенства (8) легко выводимъ

$$\psi(x,\ y) \leqq y + \frac{1}{2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

Обращаясь къ первому члену правой части равенства (6) видимъ, что по модулю онъ не больше

$$\int_0^T \left| e^{-2\pi\psi(a,\ y)} + \frac{e^{2\pi\psi(a,\ y)} - e^{-2\pi\psi(a,\ y)}}{e^{2\pi y} - 1} \right| dy$$

Замѣчая, что въ интервалѣ $(0,\ T)$ $\psi(a,\ y) \geqq 0$ получимъ

$$\int_0^T e^{-2\pi\psi(a,\ y)} dy < T$$

Разбивая далѣе интегралъ

$$\int_0^T \frac{e^{2\pi\psi(a,\ y)} - e^{-2\pi\psi(a,\ y)}}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

по схемѣ

$$\int_0^T = \int_0^{\frac{\log 2}{2\pi}} + \int_{\frac{\log 2}{2\pi}}^T$$

и замѣчая, что $2\psi(a,\ y) \leqq 3$ при $y \leqq 1$ видимъ, что первый интегралъ этой схемы не больше

$$\int_0^{\frac{\log 2}{2\pi}} \frac{e^{6\pi y} - 1}{e^{2\pi y} - 1} dy < 1$$

второй же интегралъ не больше интеграла

$$2\int_0^T e^{2\pi\psi(a,\ y) - 2\pi y} dy,$$

который въ силу неравенства (10) будетъ меньше

$$2e^{\pi}T$$

Итакъ первый членъ правой части равенства (6) по модулю будетъ меньше

$$(2e^{\pi} + 1)T + 1$$

Ко второму члену примѣнимы тѣже разсужденія, и онъ слѣдовательно по модулю будетъ также меньше

$$(2e^{\pi} + 1)T + 1$$

4⁰. Обратимся наконецъ къ третьему члену правой части равенства (6). Въ силу (9) по модулю онъ будетъ меньше

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}}} \left(\int_a^b e^{-2\pi\psi(x,\ T)} dx + \int_a^b e^{-2\pi T + 2\pi\psi(x,\ T)} dx \right) \quad . \ . \ . \ . \ (11)$$

Но изъ (8) слѣдуетъ неравенство

$$-\psi(x,\ y) < -\frac{x - x_s}{4T} + \frac{1}{2}$$

и потому первый интегралъ будетъ меньше

$$e^{\pi}\int_{x_s}^{x_{s-1}} e^{-\frac{(x-x_s)\pi}{2T}}\, dx < \frac{2e^{\pi}}{\pi} T$$

Второй же интегралъ на основанiи (8) будетъ меньше

$$e^{\pi}\int_{x_s}^{x_{s-1}} e^{2\pi T\left(\frac{n}{(\lambda+x_s)^2} - \frac{n}{(\lambda+x)^2} - 1\right)}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Но производная функцiи

$$F(x) = \frac{n}{(\lambda + x_s)^2} - \frac{n}{(\lambda + x)^2} - 1$$

равна $\frac{2n}{(\lambda + x)^3}$. Эта производная при возрастанiи x отъ x_s до x_{s-1} убываетъ и наименьшее ея значенiе будетъ $\frac{2n}{(\lambda + x_{s-1})^3}$; сама же функцiя $F(x)$ возрастаетъ и при $x = x_{s-1}$ обращается во 0. Поэтому въ интервалѣ $(x_s,\ x_{s-1})$ можемъ положить

$$F(x) < -\frac{2n(x_{s-1} - x)}{(\lambda + x_{s-1})^3}$$

Выраженiе (12) окажется меньше

$$e^{\pi}\int_{x_s}^{x_{s-1}} e^{-\frac{4\pi T n(x_{s-1} - x)}{(\lambda + x_{s-1})^3}}\, dx < \frac{e^{\pi}(\lambda + x_{s-1})^3}{4\pi T n} < e^{\pi} T$$

и выраженiе (11) будетъ меньше

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}}}\left(\frac{2e^{\pi}}{\pi} + e^{\pi}\right)T < 2e^{\pi} T$$

На основанiи найденнаго результата и доказаннаго въ пунктѣ 3^0 изъ равенства (6) выводимъ

$$\left|\sum_{x>a}^{x \leqq b} e^{2\pi i \frac{n(x-x_s)^2}{(\lambda+x_s)^2(\lambda+x)}}\right| < (6e^{\pi} + 2)T + 4 < K\sqrt{\frac{(\lambda + x_s)^3}{n}},$$

гдѣ K постоянное число, независящее отъ a, b, n, λ. Отсюда на основанiи формулы (5) находимъ

$$|T| < 2K\sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}}$$

и далѣе на основанiи формулы (4)

$$|S| < 2K\sum_{s=\mu+1}^{s=\nu}\sqrt{\frac{(\lambda+x_s)^3}{n}} = 2K\sum_{s=\nu}^{s=\mu+1}\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(s-A)^{\frac{3}{4}}} < L\sqrt{\frac{n}{P}}, \quad (13)$$

гдѣ L постоянное число, независящее отъ чиселъ, участвующихъ въ выраженiи для суммы S.

5^0. Пусть въ суммѣ

$$S' = \sum_{x>P}^{x\leqq Q}\sin 2\pi\left(\frac{n}{x}-Ax\right)$$

числа P, Q, n связаны неравенствами

$$2\sqrt[3]{n} \leqq P \leqq Q \leqq \sqrt{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Можемъ написать

$$|S'| < \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=3}\left|\sum_{x>\frac{1}{4}P}^{x\leqq\frac{1}{4}Q}\sin 2\pi\left(\frac{\frac{n}{4}}{x+\frac{\varepsilon}{4}} - 4Ax + A\varepsilon\right)\right| + 8$$

Но такъ какъ при условiи (14)

$$\sqrt[3]{\frac{n}{4}} \leqq \frac{1}{4}P \leqq \frac{1}{4}Q \leqq \sqrt{\frac{n}{8}},$$

то къ каждой изъ полученныхъ суммъ примѣнимы заключенiя предыдущаго пункта, если въ нихъ замѣнимъ n на $\frac{n}{4}$. Найдемъ при $\frac{n}{4} \geqq 16$

$$|S'| < 4L\sqrt{\frac{n}{P}}$$

Точно такъ же докажемъ, что при соблюденiи условiи (14)

$$\left|\sum_{x>P}^{x\leqq Q}\cos 2\pi\left(\frac{n}{x}-Ax\right)\right| < 4L\sqrt{\frac{n}{P}}$$

послѣ чего результаты настоящаго § можемъ формулировать такъ

Теорема. Если n данное число $\geqq 64$, A другое данное число и числа P и Q удовлетворяютъ неравенствамъ

$$2\sqrt[3]{n} \leqq P \leqq Q \leqq \sqrt{2n}$$

то можно положить

$$\left|\sum_{x>P}^{x\leqq Q} \sin 2\pi\left(\frac{n}{x} - Ax\right)\right| < N\sqrt{\frac{n}{P}}$$

$$\left|\sum_{x>P}^{x\leqq Q} \cos 2\pi\left(\frac{n}{x} - Ax\right)\right| < N\sqrt{\frac{n}{P}},$$

гдѣ N постоянное число независящее отъ n, A, P, Q.

§ 3. Формула Н. Я. Сонина.

Въ дальнѣйшемъ мы часто будемъ пользоваться извѣстною формулой Н. Я. Сонина, доказательство которой можно найти въ его статьѣ «Объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ, содержащемъ числовую функцію $[x]$». Варш. унив. изв. 1885 г. Согласно этой формулѣ, полагая

$$\varrho(x) = [x] - x + \frac{1}{2}; \quad \sigma(x) = \int_0^x \varrho(x)dx$$

будемъ имѣть

$$\sum_{x>a}^{x\leqq b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) -$$
$$- \sigma(b)f'(b) - \sigma(a)f'(a) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

Пусть μ обозначаетъ наибольшее значеніе $|f'(x)|$ въ интервалѣ (a, b). Тогда замѣчая, что

$$|\varrho(x)| \leqq \frac{1}{2}; \quad |\sigma(x)| \leqq \frac{1}{8}$$

найдемъ

$$\sum_{x>a}^{x\leqq b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) + \frac{\theta}{2}\mu; \quad |\theta| \leqq 1 \quad . \; . \; . \; (1)$$

Если же $\lim\limits_{\xi=\infty} f'(\xi) = 0$ и $f''(\xi)$ не мѣняетъ знака въ интервалѣ (a, ∞) выводимъ

$$\sum_{x>a}^{x\leqq b} f(x) = C + \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) + \frac{\theta}{4}f'(b),$$

гдѣ $|\theta| \leqq 1$ и C постоянное число, независящее отъ b.

§ 4. Воспомогательная формула изъ теоріи рядовъ Фурье.

Условимся символомъ $\{\alpha\}$ обозначать дробь числа α, т. е. разность

$$a - [a]$$

Пользуясь извѣстнымъ изъ теоріи рядовъ Фурье соотношеніемъ

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$$

справедливымъ при

$$-\pi < x < \pi \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

и замѣчая, что при нецѣломъ α

$$x = 2\pi\{\alpha\} - \pi$$

всегда удовлетворяетъ условіямъ (1) получимъ

$$\{\alpha\} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\alpha}{1} + \frac{\sin 4\pi\alpha}{2} + \frac{\sin 6\pi\alpha}{3} + \dots\right),$$

если воспользуемся равенствомъ

$$\sin k(2\pi\{\alpha\} - \pi) = (-1)^k \sin 2\pi\alpha$$

Примѣняя къ ряду

$$\frac{\sin 2\pi\alpha}{1} + \frac{\sin 4\pi\alpha}{2} + \frac{\sin 6\pi\alpha}{3} + \dots$$

преобразованіе Абеля и замѣчая, что каковы бы ни были цѣлыя числа k и l, всегда

$$\left|\sin 2\pi k\alpha + \sin 2\pi(k+1)\alpha + \sin 2\pi(k+2)\alpha + \dots + \sin 2\pi(k+l)\alpha\right| < \frac{2}{\sin\pi\alpha}$$

найдемъ

$$\{\alpha\} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\alpha}{1} + \frac{\sin 4\pi\alpha}{2} + \frac{\sin 6\pi\alpha}{3} + \dots + \frac{\sin 2\pi N\alpha}{N}\right) +$$

$$+ \frac{4\theta}{\pi(N+1)\sin\pi\alpha}, \quad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

гдѣ $|\theta| \leqq 1$. Для случая же, когда α цѣлое, имѣетъ мѣсто очевидное равенство

$$\{\alpha\} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\alpha}{1} + \frac{\sin 4\pi\alpha}{2} + \frac{\sin 6\pi\alpha}{3} + \dots + \frac{\sin 2\pi N\alpha}{N}\right) - \frac{1}{2}. \quad (3)$$

§ 5. Порядокъ, котораго не превосходитъ порядокъ функціи $\tau(a)$.

Представивъ цѣлое число a въ видѣ

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

гдѣ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ обозначаютъ всѣ различные простые дѣлители числа a, мы для функціи $\tau(a)$, обозначающей число всѣхъ дѣлителей числа a, получимъ выраженіе

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$$

Обозначая буквою ε нѣкоторое положительное число $\leqq 1$ найдемъ

$$\frac{\tau(a)}{a^{\varepsilon}} \leqq \frac{\alpha_1 + 1}{2^{\varepsilon\alpha_1}} \cdot \frac{\alpha_2 + 1}{3^{\varepsilon\alpha_2}} \cdot \frac{\alpha_3 + 1}{4^{\varepsilon\alpha_3}} \cdots \frac{\alpha_k + 1}{(k+1)^{\varepsilon\alpha_k}}$$

Произведеніе правой части полученнаго неравенства разобьемъ на 2 произведенія, изъ которыхъ первое состоитъ изъ множителей вида $\frac{\alpha_i + 1}{(i+1)^{\varepsilon\alpha_i}}$, для которыхъ $i + 1 < e^{\frac{1}{\varepsilon}}$, или равно 1, если такихъ множителей нѣтъ. Второе же произведеніе состоитъ изъ остальныхъ множителей, или $= 1$, если ихъ нѣтъ. Въ первомъ произведеніи число множителей меньше $e^{\frac{1}{\varepsilon}}$ и каждый изъ нихъ не больше наибольшаго значенія функціи $\frac{2x}{2^{\varepsilon x}}$ (гдѣ $x \geqq 1$), равнаго $\frac{2}{\varepsilon e \log 2}$. Во второмъ же произведеніи, если оно не равно 1, каждый множитель $\frac{\alpha_i + 1}{(i+1)^{\varepsilon\alpha_i}}$ будетъ $< \frac{\alpha_i + 1}{e^{\alpha_i}}$ и слѣдовательно меньше наибольшаго (при $x \geqq 1$) значенія функціи $\frac{2x}{e^x}$, равнаго $\frac{2}{e} < 1$. Изъ сказаннаго слѣдуетъ неравенство

$$\tau(a) < M a^{\varepsilon},$$

гдѣ $M = \left(\frac{2}{\varepsilon e \log 2}\right)^{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}$ конечное число при всякомъ положительномъ ε.

§ 6. Асимптотическое выраженіе для суммы $\sum\limits_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]$.

Пусть n и x цѣлыя числа. Если n не дѣлится на x, то пользуясь формулою (2) § 4 и полагая $N=\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]$, получимъ равенство

$$\left\{\frac{n}{x}\right\}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{n}{x}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{n}{x}}{2}+\ldots+\frac{\sin 2\pi\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]\frac{n}{x}}{\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]}\right)+$$

$$+\frac{4\theta}{\pi\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\sin\pi\frac{n}{x}};\ |\theta|\leqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Обозначивъ символомъ $R(x)$ абсолютно наименьшій вычетъ числа n по модулю x и пользуясь легко выводимымъ неравенствомъ

$$\sin 2\pi\,\frac{|R(x)|}{x}\geqq\frac{4|R(x)|}{x}$$

мы остаточный членъ равенства (1) можемъ представить въ формѣ

$$\theta'\frac{2\sqrt[3]{n}}{|\pi R(x)|};\ |\theta'|\leqq 1$$

Вспоминая же формулу (3) § 4 мы можемъ вообще написать

$$\left\{\frac{n}{x}\right\}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{n}{x}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{n}{x}}{2}+\ldots+\frac{\sin 2\pi\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]\frac{n}{x}}{\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]}\right)+\vartheta(x),$$

гдѣ $\vartheta(x)=-\frac{1}{2}$, или $|\vartheta(x)|\leqq\frac{2\sqrt[3]{n}}{\pi|R(x)|}$ смотря по тому, будетъ ли $n\equiv 0$ (Мод. x), или нѣтъ. Пользуясь выведеннымъ равенствомъ находимъ

$$\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{n}{x}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{n}{x}}{2}+\ldots+\frac{\sin 2\pi\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]\frac{n}{x}}{\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]}\right)+$$

$$+\theta''\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}n^{\frac{1}{3}}\vartheta(x);\ |\theta''|\leqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Но изъ равенства

$$S=\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{n}{x}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{n}{x}}{2}+\ldots+\frac{\sin 2\pi\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]\frac{n}{x}}{\left[\frac{x}{2\sqrt[3]{n}}\right]}\right)=$$

$$=\sum_{t=1}^{t\leqq\frac{1}{2}n^{\frac{1}{6}}}\frac{1}{t}\sum_{x\geqq 2t\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}\sin 2\pi\frac{tn}{x}$$

согласно теоремѣ § 2 слѣдуетъ, что сумма S порядка

$$\sum_{t=1}^{t\leqq\frac{1}{2}n^{\frac{1}{6}}}\frac{1}{t}\sqrt{\frac{tn}{2t\sqrt[3]{n}}}=O(\sqrt[3]{n}\log n)\cdot$$

Обращаясь ко второму слагаемому суммы, стоящей въ правой части равенства (2), мы замѣтимъ, что число значенiй x, для которыхъ $n\equiv 0$ (Мод. x) не больше $\tau(n)$. Вообще же число значенiй x, для которыхъ $n\equiv\pm k$ (Мод. x), гдѣ $k<n$ заданное положительное цѣлое число будетъ не больше $\tau(n-k)+\tau(n+k)$. Замѣчая, что наибольшее значенiе суммы

$$\tau(n-k)+\tau(n+k);\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ [\sqrt{n}]$$

согласно § 5 меньше $M'n^{\varepsilon'}$, гдѣ $\varepsilon'>0$ и M' конечное постоянное число, найдемъ

$$\sum_{x>2\sqrt[3]{n}}^{x\leqq\sqrt{n}}n^{\frac{1}{3}}\vartheta(x)=O\left[n^{\frac{1}{3}+\varepsilon'}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}\right]}\right)\right]=$$

$$=O\left(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon'}\log n\right)$$

Поэтому пользуясь равенствомъ (2) и замѣчая что

$$\sum_{x=1}^{x\leqq 2\sqrt[3]{n}}\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}-\frac{1}{2}\right)=O\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$$

можемъ написать

$$\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{n}}\left\{\frac{n}{x}\right\}=\frac{\sqrt{n}}{2}+O\left(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

гдѣ ε постоянное положительное число, сколь угодно близкое къ 0. Примѣняя далѣе къ суммѣ

$$n+\sum_{x>1}^{x\leqq\sqrt{n}}\frac{n}{x}$$

формулу (2) § 3 получимъ

$$\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{n}}\frac{n}{x}=nE+\frac{n}{2}\log n+\sqrt{n}[\sqrt{n}]-n+\frac{1}{2}\sqrt{n}+\frac{\theta}{4}, \quad . \; . \; . \; (4)$$

гдѣ E обозначаетъ постоянную Эйлера и $|\theta|\leqq 1$. Изъ равенствъ (3) и (4) слѣдуетъ

$$\sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]=nE+\frac{n}{2}\log n+\sqrt{n}[\sqrt{n}]-n+O\left(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

Вставляя найденное выраженіе для $\sum\limits_{x>0}^{x\leqq\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]$ въ извѣстную формулу

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]=2\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]-[\sqrt{n}]^2$$

получимъ послѣ упрощеній асимптотическое равенство

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]=n(\log n+2E-1)+O\left(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

§ 7. Вспомогательныя предложенія, служащія для вывода формулы Гаусса. Асимптотическое выраженіе для суммы $\sum\limits_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}$.

1°. Пусть m, a и α обозначаютъ данныя цѣлыя числа, причемъ a и α положительны. Число всѣхъ различныхъ простыхъ дѣлителей числа a мы обозначимъ чрезъ k; тогда число рѣшеній сравненія

$$x^2+m\equiv t\pmod{a}$$

будетъ не болѣе 2^{k+2}. Положимъ

$$\mu=\left[\frac{\alpha}{a}\right]+1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Тогда въ рядѣ абсолютно наименьшихъ вычетовъ чиселъ

$$m+1^2,\ m+2^2,\ m+3^2,\ \ldots,\ m+\alpha^2$$

будетъ не болѣе $\mu 2^{k+3}$ по модулю равныхъ t, если t удовлетворяетъ условію

$$0 \leqq t \leqq \frac{a}{2}$$

Принявъ сказанное во вниманіе и примѣняя къ дроби $\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}$ въ случаѣ, когда она равна O формулу (3) § 4 и формулу (2) того же § въ противномъ случаѣ, получимъ

$$\sum_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi\frac{m+x^2}{a}}{1}+\frac{\sin 4\pi\frac{m+x^2}{a}}{2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\sin 2\pi N\frac{m+x^2}{a}}{N}\right)+\theta\frac{\mu 2^{k+3}}{N}\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{t=1}^{t\leqq\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{\pi t}{a}}\right);\ |\theta|<1$$

Но замѣчая, что

$$\sum_{t=1}^{t\leqq\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{\pi t}{a}}=O(a\log a)$$

мы послѣднее равенство можемъ переписать такъ

$$\sum_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{t=1}^{t=N}\frac{1}{t}\sum_{x=1}^{x=\alpha}\sin 2\pi t\,\frac{m+x^2}{a}+O\left(\frac{\mu 2^k a\log a}{N}\right)\quad . \ . \ (2)$$

2⁰. Сумма

$$S_t=\sum_{x=1}^{x=\alpha}\sin 2\pi t\,\frac{m+x^2}{a}$$

представляетъ собою коэффиціентъ при i въ выраженіи для суммы

$$\Omega_t=\sum_{x=1}^{x=\alpha}e^{2\pi i\frac{m+x^2}{4n}}$$

гдѣ

$$n=\frac{a}{4t}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Сумму Ω_t разложимъ по схемѣ

$$\Omega_t = \sum_{x>0}^{x\leqq n} + \sum_{x>n}^{x\leqq 2n} + \sum_{x>2n}^{x\leqq 3n} + \ldots + \sum_{x>\left[\frac{\alpha}{n}\right]n}^{x=\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Изъ легко выводимыхъ соотношенiй

$$\sum_{x>2sn}^{x\leqq(2s+1)n} e^{2\pi i\frac{m+x^2}{4n}} = e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} \sum_{k>0}^{k<n} e^{\frac{2\pi i}{4n}\left(-\{sn\}+k\right)^2} + O(1)$$

$$\sum_{x>(2s-1)n}^{x\leqq 2sn} e^{2\pi i\frac{m+x^2}{4n}} = e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} \sum_{k>0}^{k<n} e^{\frac{2\pi i}{4n}\left(\{sn\}+k\right)^2} + O(1)$$

воспользовавшись формулою (7) § 1 найдемъ

$$\sum_{x>2sn}^{x\leqq(2s+1)n} e^{2\pi i\frac{m+x^2}{4n}} = \frac{1+i}{2}\sqrt{n}\, e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} + O(1)$$

$$\sum_{x>(2s-1)n}^{x\leqq 2sn} e^{2\pi i\frac{m+x^2}{4n}} = \frac{1+i}{2}\sqrt{n}\, e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} + O(1)$$

Наконецъ, примѣнивъ аналогичныя преобразованiя къ послѣдней суммѣ схемы (4), получимъ согласно формулѣ (6) § 1

$$\sum_{x>\left[\frac{\alpha}{n}\right]n}^{x=\alpha} e^{2\pi i\frac{m+x^2}{4n}} = O(\sqrt{n})$$

На основанiи всего изложеннаго изъ формулы (4) выводимъ

$$\Omega_t = (1+i)\sqrt{n} \sum_{s-1}^{s\leqq\frac{\alpha}{2n}} e^{2\pi i\left(\frac{m}{4n}-ns^2\right)} + O\left(\frac{\alpha}{n} + \sqrt{n}\right)$$

Отсюда, согласно сказанному въ началѣ пункта и вспоминая равенство (3) находимъ

$$S_t = \sqrt{\frac{a}{4t}} \sum_{s=1}^{s\leqq\frac{2\alpha}{a}t} \left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a} - \frac{as^2}{4t}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{tm}{a} - \frac{as^2}{4t}\right)\right] +$$

$$+ O\left(\frac{\alpha}{a}t + \sqrt{\frac{a}{t}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Введемъ въ разсмотрѣнiе число $M \geqq 1$, выборомъ котораго распорядимся ниже и положимъ

$$N = [M]$$

Тогда пользуясь (5) равенство (2) напишемъ такъ

$$\sum_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{\sqrt{a}}{t^{\frac{3}{2}}}\sum_{s>0}^{s\leqq\frac{2\alpha}{a}t}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)\right]+O\left(\frac{M\alpha}{a}+\sqrt{a}+\left(\frac{\alpha}{a}+1\right)\frac{2^k a\log a}{M}\right)\quad . \; . \; (6)$$

3⁰. Положивъ $\alpha\leqq a$ мы формулу (6) напишемъ такъ

$$\sum_{x=1}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}+O\left(\sqrt{a}\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{1}{\sqrt{t}}+M+\frac{2^k a\log a}{M}\right)$$

Отсюда, полагая

$$M=a^{\frac{2}{3}k}a^{\frac{1}{3}}\left(\log a\right)^{\frac{2}{3}}$$

найдемъ на основанiи § 5

$$\sum_{x=0}^{x=\alpha}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{\alpha}{2}+O\left(a^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2^k\log a}\right)=\frac{\alpha}{2}+O\left(a^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right)$$

4⁰. Въ частности положимъ

$$\alpha=2a$$

Тогда въ равенствѣ (6) сумма, соотвѣтствующая данному t, напишется такъ

$$S'_t=\sum_{s>0}^{s=4t}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{as^2}{4t}\right)\right]$$

Пусть d есть общiй наибольшiй дѣлитель чиселъ a и $4t$. При помощи цѣлыхъ чиселъ

$$\sigma=\frac{a}{d};\quad \tau=\frac{4t}{d}$$

мы сумму S'_t напишемъ такъ

$$S'_t=\sum_{s>0}^{s=\tau d}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{\sigma s^2}{\tau}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{\sigma s^2}{\tau}\right)\right]$$

Разбивая далѣе S'_t по схемѣ

$$S'_t=\sum_{s>0}^{s=\tau}+\sum_{s>\tau}^{s=2\tau}+\ldots+\sum_{s>\tau d-\tau}^{s=\tau d}$$

мы видимъ, что каждая изъ d суммъ этой схемы приводится къ суммѣ

$$\sum_{s>0}^{s=\tau}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{\sigma s^2}{\tau}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tm}{a}-\frac{\sigma s^2}{\tau}\right)\right],$$

которая въ силу того, что числа σ и τ взаимно простыя, будетъ порядка $\sqrt{\tau}$. Слѣдовательно S'_t будетъ порядка

$$d\sqrt{\tau}=O(\sqrt{td})$$

Обозначимъ далѣе символомъ $\delta(t)$ общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и t тогда $d\leqq 4\delta(t)$ и слѣдовательно

$$S'_t=O\left(\sqrt{t\delta(t)}\right)$$

Пользуясь найденнымъ результатомъ, изъ формулы (6) выводимъ

$$\sum_{x=1}^{x=2a}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=a+O\left(\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{\sqrt{a\delta(t)}}{t}+M+\sqrt{a}+\frac{2^k a\log a}{M}\right)\quad . \; . \; (7)$$

Но пусть α пробѣгаетъ всѣ различные дѣлители числа a. Тогда

$$\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{\sqrt{a\delta(t)}}{t}=O\left(\sum_{\alpha}\sqrt{a\alpha}\sum_{t>0}^{t\leqq\frac{M}{\alpha}}\frac{1}{\alpha t}\right)=O\left(\sqrt{a}\log M\sum_{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

и такъ какъ обозначая чрезъ p_1, p_2, p_3, $\ldots$, p_k различные простые дѣлители числа a, найдемъ

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=O\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{p_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{p_2}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\sqrt{p_k}}\right)}\right)=O(2^k),$$

то можемъ написать

$$\sum_{t>0}^{t\leqq M}\frac{\sqrt{a\delta(t)}}{t}=O(2^k\sqrt{a}\log M)$$

Поэтому, полагая $M=\sqrt{a}$, найдемъ изъ (7)

$$\sum_{x=1}^{x=2a}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=a+O(2^k\sqrt{a}\log a)$$

Отсюда получаются такія асимптотическія равенства

$$\sum_{x=1}^{x=a}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{a}{2}+O(2^k\sqrt{a}\log a) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

и

$$\sum_{x=1}^{x\leqq\frac{a}{2}}\left\{\frac{m+x^2}{a}\right\}=\frac{a}{4}+O(2^k\sqrt{a}\log a) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

5^0. Въ заключеніе этого §'а докажемъ слѣдующую лемму

Лемма. Если $P\geqq 0$, $M\geqq P$ и $\triangle>0$ заданныя числа и при любомъ цѣломъ i, удовлетворяющемъ условію

$$0<i\leqq M,$$

имѣетъ мѣсто неравенство

$$\left|\sum_{x=P+1}^{x=P+i} f(x)\right|\leqq\triangle,$$

то

$$\left|\sum_{x=P+1}^{x=P+M}\sqrt{x}f(x)\right|\leqq\triangle\sqrt{M+P}$$

Доказательство. Полагая

$$\beta_i=\sum_{x=P+1}^{x=P+i} f(x)$$

и замѣчая, что $|\beta_i|\leqq\triangle$ найдемъ

$$\left|\sum_{x=P+1}^{x=P+M}\sqrt{x}f(x)\right|=|\beta_1\sqrt{P+1}+\beta_2(\sqrt{P+2}-\sqrt{P+1})+$$
$$+\beta_3(\sqrt{P+3}-\sqrt{P+2})+\ldots+\beta_M(\sqrt{P+M}-\sqrt{P+M-1})|\leqq$$
$$\leqq\triangle\,|\sqrt{P+1}+(\sqrt{P+2}-\sqrt{P+1})+(\sqrt{P+3}-\sqrt{P+2})+\ldots+$$
$$+\ldots+(\sqrt{P+M}-\sqrt{P+M-1})|=\triangle\sqrt{P+M},$$

чѣмъ лемма доказана

Пользуясь этою леммой и теоремою § 2 находимъ

$$\sum_{x>P}^{x\leqq Q}\sqrt{x}\sin 2\pi\left(\frac{n}{x}-Ax\right)=O\left(\sqrt{n\frac{Q}{P}}\right)$$

$$\sum_{x>P}^{x\leqq Q}\sqrt{x}\cos 2\pi\left(\frac{n}{x}-Ax\right)=O\left(\sqrt{n\frac{Q}{P}}\right)$$

§ 8. Доказательство формулы Гаусса.

Займемся разысканіемъ средняго значенія числа классовъ положительныхъ чисто коренныхъ квадратичныхъ формъ. Если обозначимъ чрезъ $h(-\triangle)$ число чисто коренныхъ классовъ для опредѣлителя $-\triangle$, то задача приведется къ отысканію асимптотическаго выраженія для суммы

$$\sum_{\triangle=1}^{\triangle\leqq m} h(-\triangle)$$

Вспоминая результаты мемуара Липшица, которые воспроизводитъ Бахманнъ въ главѣ 13 своей книги «Analytische Zahlentheorie» мы будемъ исходить изъ равенства

$$\sum_{\triangle=1}^{\triangle\leqq m} h(-\triangle) = \sum \mu(k) F\left(\frac{m}{k^2}\right); \ k=1,\ 3,\ 5, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ $\mu(k)$ обозначаетъ извѣстную числовую функцію Мебіуса, функція $F(n)$ при $n<1$ равна 0, а при $n>1$ опредѣляется равенствомъ

$$F(n) = \psi(n) + \sigma(n) - \chi(n) - \eta(n), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

въ которомъ $\psi(n)$, $\sigma(n)$, $\chi(n)$, $\eta(n)$ обозначаютъ числа системъ цѣлыхъ значеній перемѣнныхъ x, y, z, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l} xz-y^2\leqq n \\ 0<x<z \\ -\frac{1}{2}x<y\leqq\frac{1}{2}x \end{array}\right\} \text{для функціи } \psi(n) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} xz-y^2\leqq n \\ x=z \\ 0\leqq y<\frac{x}{2} \end{array}\right\} \text{для функціи } \sigma(n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4xz-y^2\leqq n \\ 0<x<z \\ -x<y\leqq x \end{array}\right\} \text{для функціи } \chi(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4xz-y^2\leqq n \\ x=z \\ 0\leqq y<x \end{array}\right\} \text{для функціи } \eta(n)$$

Полагая $z = x + t$ мы видимъ отсюда, что $\psi(n)$, $\sigma(n)$, $\chi(n)$, $\eta(n)$ можно также разсматривать, какъ числа системъ цѣлыхъ значенiй перемѣнныхъ x, y, t, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l} tx + x^2 - y^2 \leqq n \\ x > 0;\ t > 0 \\ -\frac{1}{2}x < y \leqq \frac{1}{2}x \end{array}\right\} \text{для функцiи } \psi(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 \leqq n \\ t = 0 \\ 0 \leqq y < \frac{x}{2} \end{array}\right\} \text{для функцiи } \sigma(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4tx + 4x^2 - y^2 \leqq n \\ x > 0;\ t > 0 \\ -x < y \leqq x \end{array}\right\} \text{для функцiи } \chi(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 - y^2 \leqq n \\ t = 0 \\ -x < y \leqq x \end{array}\right\} \text{для функцiи } \eta(n)$$

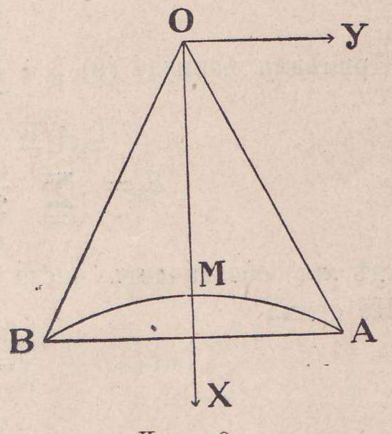
Мы обратимся сначала къ опредѣленiю функцiи $\psi(n)$. Построимъ область Ω, ограниченную прямыми OA и OB (черт. 3) съ уравненiями

$$y = \frac{x}{2},\ y = -\frac{x}{2}$$

и дугою AMB кривой съ уравненiемъ

$$x^2 - y^2 = n$$

причемъ прямую $y = -\frac{x}{2}$ къ области не причисляемъ.



Черт. 3.

Легко видѣть, что система x_1, y_1, t_1 цѣлыхъ чиселъ лишь въ томъ случаѣ можетъ удовлетворять неравенствамъ (3), если точка (x_1, y_1) лежитъ въ области Ω. Съ другой стороны нетрудно убѣдиться, что точкѣ (x_1, y_1), лежащей въ области Ω, соотвѣтствуетъ $\left[\frac{n + y_1{}^2}{x} - x\right]$ различныхъ значенiй t, которыя вмѣстѣ съ числами x_1, y_1 удовлетворяютъ неравенствамъ (3). Отсюда слѣдуетъ равенство

$$\psi(n) = \sum_{\Omega}\left[\frac{n+y^2}{x} - x\right] = \sum_{\Omega}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right) - \sum_{\Omega}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}, \quad . \; . \; . \; (5)$$

гдѣ суммированіе, обозначенное символомъ $\sum\limits_{\Omega}$ распространяется на всѣ пары чиселъ x, y, принадлежащія области Ω. Легко видѣть далѣе, что въ точкахъ A и B $x = \sqrt{\frac{4n}{3}}$ и въ точкѣ M $x = \sqrt{n}$. Пусть Ω' обозначаетъ область, ограниченную прямыми OA, OB, AB, причемъ OB къ области не причисляется и пусть Ω'' обозначаетъ область, ограниченную прямою AB и дугою AMB, причемъ AMB къ области не причисляется. Равенство (5) мы можемъ написать такъ

$$\psi(n) = \sum_{\Omega'}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right) - \sum_{\Omega''}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right) - \sum_{\Omega'}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\} + \sum_{\Omega''}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\} \quad . \; (6)$$

1⁰. Обращаясь къ суммѣ

$$S_3 = \sum_{\Omega'}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

мы ее перепишемъ такъ

$$S_3 = \sum_{x=1}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \; \sum_{y > -\frac{x}{2}}^{y \leqq \frac{x}{2}} \left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

Примѣняя формулу (9) § 1 отсюда выводимъ

$$S_3 = \sum_{x=1}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{x}{2} + O\left(\sum_{x=1}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} 2^{\varkappa(x)}\sqrt{x}\log x\right)$$

гдѣ $\varkappa(x)$ обозначаетъ число различныхъ простыхъ дѣлителей числа x. Но сумма

$$\sum_{x=1}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} 2^{\varkappa(x)}\sqrt{x}\log x$$

очевидно порядка

$$\log n \sum_{x=1}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \sqrt{x}\,\tau(x)$$

но такъ какъ извѣстно что

$$\sum_{x=1}^{x\leqq i}\tau(x)=O(i\log i)$$

то примѣняя лемму пункта 5^0 § 7 найдемъ

$$\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x}\,\tau(x)=O\left(n^{\frac{3}{4}}\log n\right)$$

и слѣдовательно окончательно можемъ написать

$$S_3=\sum_{x=1}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{x}{2}+O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right) \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

2^0. Обращаясь къ суммѣ

$$S_4=\sum_{\Omega''}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

мы можемъ представить ее въ видѣ

$$S_4=\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\ \sum_{y>-\sqrt{x^2-n}}^{y<\sqrt{x^2-n}}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

но примѣняя къ суммѣ

$$\sum_{y>-\sqrt{x^2-n}}^{y<\sqrt{x^2-n}}\left\{\frac{n+y^2}{x}\right\}$$

формулу (6) § 7, найдемъ отсюда, положивъ $M=\sqrt{x}$

$$S_4=\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x^2-n}-$$

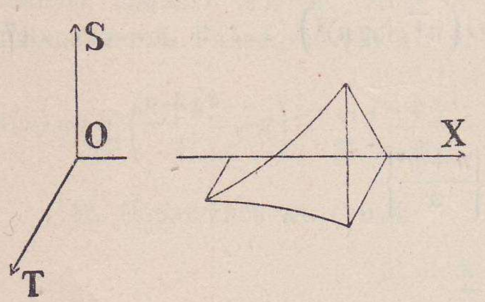
$$-\frac{2}{\pi}\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\ \sum_{t=1}^{t\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{s>0}^{s\leqq 2\frac{\sqrt{x^2-n}}{x}t}\frac{\sqrt{x}}{t^{\frac{3}{2}}}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)\right]+$$

$$+O\left(\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}2^{\varkappa(x)}\sqrt{x}\log x\right),$$

гдѣ $\varkappa$ имѣетъ то же значеніе, что и въ пунктѣ 1^0.

Разсмотримъ область Ω''' перемѣнныхъ x, t, s, ограниченную поверхностями $x=\sqrt{n}$, $x=\sqrt{\frac{4n}{3}}$, $t=0$, $t=\sqrt{x}$, $s=0$, $s=2\frac{\sqrt{x^2-n}}{x}t$, изъ которой исключены точки поверхностей $x=\sqrt{a}$, $t=0$, $s=0$ (черт. 4). Тогда второй членъ полученнаго выраженія для S_4, если отбросить множитель $-\frac{2}{\pi}$, представится суммой

$$H=\sum_{\Omega'''}\frac{\sqrt{x}}{t^{\frac{3}{2}}}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)\right]$$



Черт. 4.

Проведемъ прямую въ этой области, соотвѣтствующую данной парѣ значеній s и t. На этой прямой x измѣняется отъ нѣкотораго числа $\alpha \geqq \sqrt{n}$ до $\sqrt{\frac{4n}{3}}$ и слѣдовательно часть суммы H соотвѣтствующая этой прямой, представится такъ

$$\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\sum_{x>\alpha}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\left[\sin 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{tn}{x}-\frac{xs^2}{4t}\right)\right]\sqrt{x},$$

что согласно пункту 5^0 § 7 будетъ порядка $\frac{\sqrt{tn}}{t^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{n}}{t}$. Поэтому можемъ написать

$$H=O\left(\sum_{\Omega^{\mathrm{IV}}}\sqrt{\frac{n}{t}}\right),$$

гдѣ суммированіе, обозначенное символомъ $\sum\limits_{\Omega^{\mathrm{IV}}}$ распространяется по t и s на всю область Ω^{IV} перемѣнныхъ t и s, ограниченную прямыми $s=0$, $t=\sqrt[4]{\frac{4n}{3}}$, $s=t$. Можно написать поэтому

$$H=O\left(\sum_{t>0}^{t\leqq\sqrt[4]{\frac{4n}{3}}}\sqrt{n}\right)=O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$$

Наконецъ повторяя тѣ же разсужденія, что въ концѣ пункта 1^0, находимъ

$$\sum_{x>n}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}} 2^{\varkappa(x)}\sqrt{x}\log x = O\left(\sum_{x>n}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x}\tau(x)\log x\right) = O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right)$$

На основаніи всего сказаннаго будетъ

$$S_4 = \sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sqrt{x^2-n} + O\left(n^{\frac{3}{4}}(\log n)^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

3^0. Обращаясь къ суммѣ

$$S_1 = \sum_{\Omega'}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right)$$

мы перепишемъ ее такъ

$$S_1 = \sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sum_{y>-\frac{x}{2}}^{y\leqq\frac{x}{2}}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right)$$

Примѣняя сюда формулу (1) § 3 и замѣчая, что

$$\varrho\left(\frac{x}{2}\right) - \varrho\left(-\frac{x}{2}\right) = 0,$$

получимъ

$$S_1 = \sum_{x>0}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\left(n - \frac{11}{12}x^2\right) + O\left(\sqrt{n}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

4^0. Обращаясь наконецъ къ суммѣ

$$S_2 = \sum_{\Omega''}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right)$$

мы можемъ ее представить такъ

$$S_2 = \sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\sum_{y>-\sqrt{x^2-n}}^{y\leqq\sqrt{x^2-n}}\left(\frac{n+y^2}{x} - x\right)$$

Примѣнивъ сюда формулу (1) § 3 получимъ

$$S_2 = -\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{4}{3x}\left(x^2-n\right)^{\frac{3}{2}} + O\left(\sqrt{n}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Вспоминая формулы (7), (8), (9), (10), (6) находимъ наконецъ

$$\psi(n) = \sum_{x>0}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \left(n - \frac{11}{12}x^2\right) + \frac{4}{3} \sum_{x>\sqrt{n}}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \left(x^2 - n\right)^{\frac{3}{2}} -$$

$$- \sum_{x>0}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{x}{2} + \sum_{x>\sqrt{n}}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \sqrt{x^2 - n} + O\left(n^{\frac{3}{4}} (\log n)^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

5^0. Изъ неравенствъ (4) слѣдуетъ, что $\sigma(n)$ можно разсматривать, какъ число системъ цѣлыхъ значеній x, y, удовлотворяющихъ неравенствамъ

$$x^2 - y^2 = n$$

$$0 \leqq y < \frac{x}{2}$$

Отсюда легко найдемъ

$$\sigma(n) = \sum_{x>0}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{x}{2} - \sum_{x>\sqrt{n}}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \sqrt{x^2 - n} + O\left(\sqrt{n}\right)$$

Отсюда и изъ (11) заключаемъ

$$\psi(n) + \sigma(n) = \sum_{x>0}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \left(n - \frac{11}{12}x^2\right) + \frac{4}{3} \sum_{x>\sqrt{n}}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{(x^2 - n)^{\frac{3}{2}}}{x} + O\left(n^{\frac{3}{4}} (\log n)^2\right) . \; (12)$$

Входящія въ найденное выраженіе суммы мы вычислимъ по формулѣ (1) § 3. Принимая

$$f(x) = n - \frac{11}{12}x^2,$$

найдемъ

$$\sum_{x>0}^{x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}} \left(n - \frac{11}{12}x^2\right) = \frac{32}{27\sqrt{3}} n^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{2} - \frac{2}{9} n \varrho \left(\sqrt{\frac{4n}{3}}\right) + O\left(\sqrt{n}\right) . \; (13)$$

Взявъ же

$$f(x) = \frac{(x^2 - n)^{\frac{3}{2}}}{x}$$

найдемъ

$$f'(x) = (x^2 - n)^{\frac{1}{2}} \left(2 + \frac{n}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = (x^2 - n)^{\frac{3}{2}} \left(2x + \frac{2n^2}{x^3} - \frac{n}{x}\right),$$

откуда видно, что $f'(x) > 0$ при $\sqrt{n} < x \leqq \sqrt{\frac{4n}{3}}$ и при тѣхъ же условіяхъ $f'(x) < \frac{11}{4\sqrt{3}} n^{\frac{1}{2}}$. Поэтому будемъ имѣть

$$\sum_{x>\sqrt{n}}^{x\leqq\sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{(x^2-n)^{\frac{3}{2}}}{x} = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{(x^2-n)^{\frac{3}{2}}}{x} dx + \frac{1}{6} \varrho \left(\sqrt{\frac{4n}{3}}\right) + O\left(\sqrt{n}\right). \quad . (14)$$

Изъ выведенныхъ формулъ (13) и (14), замѣчая что

$$\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{(x^2-n)^{\frac{3}{2}}}{x} dx = n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{8}{9\sqrt{3}}\right)$$

безъ труда получаемъ на основаніи формулы (12)

$$\psi(n) + \sigma(n) = \frac{2\pi}{9} n^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{2} + O\left(n^{\frac{3}{4}} (\log n)^2\right)$$

Совершенно такимъ же образомъ найдемъ

$$\chi(n) + \eta(n) = \frac{\pi}{18} n^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{4} + O\left(n^{\frac{3}{4}} (\log n)^2\right)$$

и далѣе согласно (2)

$$F(n) = \frac{\pi}{6} n^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{4} + O\left(n^{\frac{3}{4}} (\log n)^2\right)$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (1), получимъ

$$\sum_{\triangle=1}^{\triangle\leqq m} h(-\triangle) = \frac{\pi}{6} m^{\frac{3}{2}} \sum \frac{\mu(k)}{k^3} - \frac{m}{4} \sum \frac{\mu(k)}{k^2} +$$

$$+ O\left(m^{\frac{3}{4}} \sum \frac{\left(\log \frac{m}{k}\right)^2}{k^{\frac{3}{2}}} \right); \; k = 1, 3, 5, \ldots \leqq \sqrt{m}$$

Отсюда, замѣчая что положивъ

$$e = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots$$

будемъ имѣть

$$\sum \frac{\mu(k)}{k^3} = \frac{8}{7} e + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\sum \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{8}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

безъ труда найдемъ

$$\sum_{\Delta=1}^{\Delta \leqq m} h(-\Delta) = \frac{4\pi}{21e} m^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\pi^2} m + O\left(m^{\frac{3}{4}} (\log m)^2\right).^{*)}$$

---

*) Статья поступила въ редакцію въ маѣ 1916 г.