Приложенія принципа сходимости къ теоріи униформизаціи.

В. И. Смирновъ (Петроградъ).

§ 1. Униформизировать заданную аналитическую функцію $y = f(x)$ значитъ, какъ извѣстно, найти перемѣнную t (униформизирующая перемѣнная) такъ, чтобы соотвѣтствующія значенія y и x были однозначными функціями этой перемѣнной, и чтобы при аналитическомъ продолженіи этихъ функцій можно было получить всѣ возможныя значенія для y и x. Униформизирующая перемѣнная t будетъ многозначной функціей на Римановой поверхности (x, y), соотвѣтствующей заданной аналитической функціи. Многозначность t можетъ происходить, какъ отъ многосвязности упомянутой Римановой поверхности, такъ и отъ существованія точекъ развѣтвленія функціи t на этой поверхности.

Изъ всѣхъ возможныхъ способовъ униформизаціи наиболѣе существеннымъ является способъ униформизаціи съ предѣльнымъ кругомъ (Grenzkreisuniformisierung).

Въ этомъ случаѣ x и y суть функціи отъ t, опредѣленныя внутри нѣкотораго круга (напр. круга, описаннаго изъ начала координатъ, какъ центра, радіусомъ единица); кругъ этотъ является естественной границей, и, кромѣ того, x и y суть аутоморфныя функціи отъ t, такъ что при замѣнѣ t нѣкоторыми дробными линейными функціями отъ t, не мѣняющими упомянутаго круга, функціи x и y принимаютъ прежнія значенія.

Упомянутый выше кругъ радіуса единицы будетъ въ дальнѣйшемъ часто встрѣчаться, и мы его для сокращенія будемъ называть кругомъ C.

Въ 1907 году одновременно Poincaré и Koebe [1]) доказали, что для всякой аналитической функціи существуетъ униформизирующая перемѣнная t указаннаго только-что типа и съ заданными напередъ точками развѣтвленія на Римановой поверхности. Оба названные геометра поль-

---

[1]) Poincaré. Acta Mathematica t. 31.
Koebe. Nachrichten d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1907.

зовались при этомъ доказательствѣ т. н. методой наложенія поверхностей (Methode der Ueberlagerungsfläche). Примѣненіе этой методы, какъ будетъ показано ниже, требуетъ нѣкотораго перехода къ предѣлу. Въ настоящей статьѣ я примѣняю къ этому вопросу т. н. принципъ сходимости аналитическихъ функцій. Кромѣ того, съ помощью этого же принципа я разбираю нѣкоторые другіе вопросы, связанные съ теоріей униформизаціи. Какъ извѣстно, этотъ принципъ даетъ также возможность установить т. н. теорему Riemann'а о возможности конформнаго отображенія односвязной области, состоящей изъ конечнаго числа листовъ, на кругъ безъ помощи уравненія Laplace'а при очень общихъ предположеніяхъ объ изображаемой области [1]). Наоборотъ, отсюда, раздѣляя въ аналитической функціи, совершающей указанное конформное преобразованіе, вещественную и мнимую часть, можно получить функцію Green'а для заданной области.

§ 2. Въ настоящемъ параграфѣ изложимъ кратко методу наложенія поверхностей для того случая, когда $y=f(x)$ есть алгебраическая функція, и для простоты изложенія будемъ искать униформизирующую перемѣнную t такъ, чтобы она не имѣла точекъ развѣтвленія на заданной Римановой поверхности (рѣчь идетъ объ униформизаціи съ предѣльнымъ кругомъ). Въ настоящемъ случаѣ эта поверхность имѣетъ конечное число листовъ. Если родъ поверхности p равенъ нулю, то, какъ извѣстно, x и y могутъ быть выражены раціонально черезъ нѣкоторую перемѣнную t; если же родъ равенъ единицѣ, то x и y суть эллиптическія функціи нѣкоторой перемѣнной t [2]). Итакъ, въ этихъ двухъ случаяхъ униформизирующая перемѣнная имѣется, и остается предположить

$$p \geqslant 2.$$

Сдѣлаемъ упомянутую Риманову поверхность односвязной при помощи $2p$ купюръ и для простоты предположимъ, что всѣ эти купюры проходятъ черезъ одну и ту же точку D на поверхности. Края проведенныхъ купюръ будутъ служить границами полученной односвязной поверхности и, какъ у всякой односвязной поверхности, вся граница будетъ представлять собою одну непрерывную линію. Линія эта будетъ составлена изъ $4p$ частей, при чемъ тѣ части, которыя являются краями одной и той же купюры, мы будемъ называть соотвѣтствующими частями. Соотвѣтствующія части могутъ быть наложены другъ на друга

---

[1]) Carathéodory. Mathematische Annalen. B. 72.
Bieberbach. Nachrichten d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1913.

[2]) Picard. Traité d'analyse. t. II (Paris. 1905) стр. 547.

вполнѣ безъ складокъ и разрыва. Представимъ теперь себѣ, что у насъ имѣется кромѣ основного еще безконечное множество экземпляровъ указанной выше односвязной поверхности, и будемъ совершать въ опредѣленной послѣдовательности пришиваніе экземпляровъ къ свободнымъ краямъ основного экземпляра и пришитыхъ уже экземпляровъ, помня, что ко всякой свободной сторонѣ можно пришить сторону ей соотвѣтствующую, ибо, какъ было сказано выше, стороны эти могутъ быть вполнѣ совмѣщены. Процессъ обшиванія разобьемъ на отдѣльныя стадіи. Основную односвязную поверхность назовемъ ω_1 и обошьемъ ее нѣсколькими экземплярами такъ, чтобы всякій ея край и всякая вершина (точка пересѣченія различныхъ частей границы) оказались внутри новой поверхности ω_2 [1]). Съ полученной поверхностью ω_2 поступимъ такъ же, какъ и ω_1 и т. д. Такимъ образомъ получимъ неограниченный рядъ односвязныхъ поверхностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$ и при томъ такихъ, что всякая поверхность изъ этого ряда лежитъ со всей своей границей цѣликомъ внутри слѣдующей поверхности ряда. Отмѣтимъ внутри поверхности ω_1 какую-либо точку O, не совпадающую съ точкой развѣтвленія поверхности. Предположимъ, не ограничивая общности, что точка O лежитъ въ началѣ координатъ. Въ виду произвольности формы купюръ можно, напримѣръ, предположить, что онѣ состоятъ изъ ряда аналитическихъ линій, пересѣкающихся подъ угломъ, отличнымъ отъ нуля. Въ этомъ предположеніи, какъ извѣстно, существуетъ для всякой поверхности ω_n аналитическая функція

$$u = \varphi_n(z),$$

опредѣленная внутри ω_n и преобразующая ω_n въ кругъ C такъ, что начало координатъ O и направленіе вещественной оси при этомъ не мѣняются [2]).

Существованіе функціи $\varphi_n(z)$ можетъ быть доказано либо методою Schwarz'a, либо при помощи принципа сходимости, какъ было указано въ § 1. Въ виду предположенія, что точка O лежитъ въ началѣ координатъ, имѣемъ вблизи этой точки разложеніе:

$$\varphi_n(z) = a_n z + \ldots,$$

гдѣ

$$a_n > 0$$

---

[1]) О возможности этого см. Koebe. Math. Annalen. B. 67.

Klein und Fricke. Vorles. üb. d. Theorie d. automorphen Functionen B. II. S. 464.

[2]) См. напр. Osgood. Lehrbuch der Functionentheorie (Leipzig und Berlin. 1907). S. 594.

въ силу неизмѣняемости направленія вещественной оси. При безпредѣльномъ увеличеніи n поверхности ω_n будутъ стремиться къ нѣкоторой предѣльной поверхности ω, имѣющей безчисленное множество листовъ. Мы будемъ при этомъ считать, что нѣкоторая точка принадлежитъ къ поверхности, если эта точка принадлежитъ къ какой-нибудь поверхности ω_n (а слѣд. и ко всѣмъ слѣдующимъ поверхностямъ ω_n).

Сказанное можно записать такъ:

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots; \quad \lim_{n=\infty} \omega_n = \omega.$$

Во всякой точкѣ поверхности ω функціи $\varphi_n(z)$ опредѣлены при достаточно большихъ значеніяхъ n. Существенный пунктъ описываемой методы состоитъ въ томъ, чтобы доказать, что

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z)$$

существуетъ во всякой точкѣ поверхности ω и что предѣльная функція $\varphi(z)$ преобразуетъ конформно поверхность ω въ кругъ C на плоскости перемѣнной u. Если это доказано, то ясно, что $\varphi(z)$ и будетъ униформизирующая перемѣнная требуемаго типа, т. е.

$$\varphi(z) = t.$$

Дѣйствительно, поверхность ω состоитъ изъ безчисленнаго множества экземпляровъ поверхности ω_1. Пусть $\xi(z)$ и $\eta(z)$ значенія функціи $\varphi(z)$ въ какихъ-либо двухъ экземплярахъ ω_1. Исключая z, получимъ

$$\eta = \chi(\xi),$$

гдѣ $\chi(\xi)$ — знакъ аналитической функціи. Если путемъ аналитическаго продолженія расширимъ область измѣненія ξ до всего круга C, то область измѣненія η будетъ также состоять изъ всего круга C, такъ какъ ξ и η являются отдѣльными вѣтвями функціи $\varphi(z)$. Слѣд. аналитическая функція $\chi(\xi)$ преобразуетъ кругъ C самъ въ себя, а потому есть дробная линейная функція [1]). Слѣд. x и y суть однозначныя функціи отъ $\varphi(z)$, и однимъ и тѣмъ же значеніямъ (x, y) отвѣчаетъ безчисленное множество значеній перемѣнной $\varphi(z)$, связанныхъ между собою указанными выше линейными зависимостями. Итакъ, можно принять:

$$\varphi(z) = t.$$

Эта функція преобразуетъ всякій экземпляръ ω_1 въ нѣкоторый криволинейный многоугольникъ, и любой такой многоугольникъ можетъ

---

[1]) Klein und Fricke. Voresl. üb. d. Theorie d. automorphen Functionen. B. II. S. 480.

служить производящимъ многоугольникомъ [1]) фуксовой группы тѣхъ линейныхъ подстановокъ, которыя связываютъ отдѣльныя вѣтви функціи $\varphi(z)$. Эта фуксова группа принадлежитъ по терминологіи Poincaré къ первому семейству [1]), т. е. соотвѣтствующій производящій многоугольникъ лежитъ со своей границей цѣликомъ внутри круга C, такъ какъ соотвѣтствующій экземпляръ ω_1 лежитъ цѣликомъ внутри поверхности ω.

§ 3. Въ этомъ параграфѣ я формулирую принципъ сходимости аналитическихъ функцій и приведу нѣкоторыя замѣчанія о получаемой при этомъ предѣльной функціи.

Упомянутый принципъ формулируется такъ:

Заданъ рядъ аналитическихъ функцій

$$f_1(z),\quad f_2(z),\ldots,\quad f_n(z),\ldots$$

при чемъ функція $f_n(z)$ опредѣлена въ нѣкоторой области B_n $(n=1,\ 2,\ldots)$.

Всѣ функціи ограничены въ своей совокупности въ этихъ областяхъ, т. е. существуетъ такое положительное число M, что

$$|f_n(z)| < M$$

при всякомъ n и всякомъ z, лежащемъ въ области B_n, а эта послѣдняя заключается въ области B_{n+1}, т. е.

$$B_1 \leqq B_2 \leqq \ldots \leqq B_n \leqq \ldots;\quad \lim_{n=\infty} B_n = B \qquad \text{(см. § 2).}$$

Въ этомъ случаѣ можно выбрать рядъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

такъ, что рядъ функцій

$$f_{n_1}(z),\quad f_{n_2}(z),\quad f_{n_3}(z),\ldots$$

будетъ сходиться во всякой точкѣ, лежащей внутри области B, и сходимость будетъ равномѣрной во всякой области, лежащей цѣликомъ внутри B.

Иными словами, при сдѣланныхъ предположеніяхъ, изъ даннаго ряда функцій можно выбрать такой рядъ, который будетъ стремиться указаннымъ выше образомъ къ предѣльной функціи. Кромѣ того, надо замѣтить, что условіе общей ограниченности функцій $f_n(z)$ можно замѣ-

---

[1]) Polygone générateur см. Poincaré. Acta Mathematica t. I. p. 16.

нить условіемъ ограниченности этихъ функцій во всякой области, лежащей цѣликомъ внутра B [1]). Доказательство отъ этого не измѣнится.

Изъ формулы Cauchy

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f_n(z')}{z'-z}\,dz'$$

и изъ равномѣрной сходимости непосредственно ясно, что предѣльная функція $f(z)$ будетъ аналитической функціей внутри области B. Кромѣ того изъ формулы:

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{1.2\ldots k}{2\pi i}\int_K \frac{f_n(z')}{(z'-z)^{k+1}}\,dz'$$

слѣдуетъ

$$\lim_{n_k=\infty} f_{n_k}^{(k)}(z) = f^{(k)}(z),$$

и послѣднее имѣетъ мѣсто равномѣрно во всякой области, лежащей цѣликомъ внутри B. Докажемъ теперь, что *если всѣ функціи $f_{n_k}(z)$ принимаютъ всякое свое значеніе не болѣе одного раза, то функція $f(z)$ либо обладаетъ этимъ же свойствомъ, либо равна постоянной* [2]).

Положимъ для простоты письма

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z),$$

и пусть всѣ функціи $f_n(z)$ принимаютъ всякое свое значеніе одинъ лишь разъ. Въ этомъ случаѣ $f_n(z)$ преобразуетъ B_n въ однолистную область, и равенство

$$u = f_n(z)$$

опредѣляетъ z, какъ однозначную функцію u въ этой области. Для краткости такія функціи будемъ называть однозначно-обратимыми. Пусть $f(z)$ не есть постоянная. Покажемъ прежде всего, что $f'(z)$ не обращается въ нуль внутри B (какъ и функціи $f_n'(z)$ внутри B_n). Предположимъ, что это имѣетъ мѣсто въ точкѣ z_0. Окружимъ эту точку достаточно малымъ контуромъ K, на которомъ $f'(z)$ не обращается въ нуль.

Изъ упомянутой выше равномѣрной сходимости слѣдуетъ:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f_n''(z)}{f_n'(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f''(z)}{f'(z)}\,dz\,,$$

---

[1]) Доказательство принципа сходимости см. Koebe Math. Annalen. B. 69. S. 71 или Montel. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe (Paris. 1910).

[2]) См. также Carathéodory. Math. Annalen. B. 72. S. 120.

но
$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f''_n(z)}{f'_n(z)}\,dz = 0\text{[1]} \qquad (n\text{ — произвольно})$$
слѣд.
$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f''(z)}{f'(z)} = 0,$$

т. е. $f'(z)$ не обращается въ нуль внутри контура K, что противорѣчитъ предположенію. Теперь докажемъ, что $f(z)$ не можетъ принимать въ различныхъ точкахъ одного и того же значенія. Предположимъ наоборотъ, что
$$f(z_1) = f(z_2).$$

Разсужденія, аналогичныя предыдущему, примѣненныя къ интегралу $\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)-f(z_1)}\,dz$, покажутъ неправильность нашего предположенія. Слѣдовательно, предположеніе доказано.

§ 4. Въ настоящемъ параграфѣ мы приложимъ принципъ сходимости къ доказательству одного предложенія изъ теоріи фуксовыхъ группъ [2]). Въ параграфѣ первомъ было указано, что униформизирующая перемѣнная t должна быть многозначной функціей на заданной Римановой поверхности, вѣтви этой функціи должны быть связаны линейными зависимостями, не мѣняющими круга C, и значенія перемѣнной t должны заполнить весь кругъ C. Послѣднее свойство перемѣнной t, является, какъ оказывается, слѣдствіемъ двухъ предыдущихъ. Обращаясь къ общей теоріи фуксовыхъ группъ, докажемъ вообще, что если данъ производящій многоугольникъ перваго семейства (см. стр. 5) фуксовой группы, то изъ условія прерывности группы, т. е. изъ условія, что многоугольники, полученные изъ производящаго путемъ примѣненія линейныхъ подстановокъ группы, нигдѣ не налягутъ другъ на друга, будетъ слѣдовать, что эти многоугольники заполнятъ внутри весь кругъ [3]). Пусть σ_0 производящій многоугольникъ фуксовой группы перваго семейства и $S_n(z)$ подстановки группы, такъ что $S_n(z)$ преобразуетъ многоугольникъ σ_0 въ многоугольникъ σ_n, также лежащій внутри круга C. Точки, связанныя между собою подстановками группы, называются эквивалентными. *Точки, эквивалентныя какой-либо точкѣ, лежащей внутри многоугольника σ_k, лежатъ внѣ многоугольника σ_k.* Кромѣ того, изъ

---

[1]) $\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$ выражаетъ, какъ извѣстно. число нулей голоморфной функціи $\varphi(z)$ внутри контура K.

[2]) См. Poincaré. Acta Mathematica t. I. S. 27 и Koebe. Math. Annalen. B. 67.

[3]) Аналогичное утвержденіе имѣетъ мѣсто и для многоугольниковъ другихъ семействъ.

теоріи фуксовыхъ группъ извѣстно, что неподвижныя точки эллиптическихъ подстановокъ группы находятся въ вершинахъ сѣти многоугольниковъ, и что можно конечнымъ числомъ эквивалентныхъ многоугольниковъ окружить данный многоугольникъ σ_0 такъ, что всякая точка периферіи послѣдняго будетъ лежать внутри взятой системы многоугольниковъ [1]). Послѣднее обстоятельство непосредственно ясно въ теоріи униформизаціи. Дѣйствительно, функція $\varphi(z)$ (см. § 2) преобразуетъ поверхность ω_2 въ область, состоящую изъ конечнаго числа многоугольниковъ и заключающую внутри себя производящій многоугольникъ σ_0. Итакъ, пусть σ_0 вполнѣ окруженъ конечнымъ числомъ эквивалентныхъ ему многоугольниковъ, и пусть совокупность этихъ многоугольниковъ и самого многоугольника σ_0 составляетъ нѣкоторую область α. Обозначимъ буквою δ наименьшее разстояніе контура σ_0 до контура α. Предположимъ теперь, что многоугольники σ_n не заполняютъ всего круга C. Тогда обычнымъ пріемомъ можно найти внутри круга C предѣльную точку a такую, что сколь угодно близко къ ней будутъ находиться точки, принадлежащія сѣти многоугольниковъ, но сама точка a не будетъ принадлежать ни къ одному изъ многоугольниковъ. Всякій многоугольникъ представляетъ собою ограниченную область, при чемъ точки границъ многоугольника являются внутренними точками въ сѣти многоугольниковъ. Отсюда слѣдуетъ, что сколь угодно близко къ точкѣ a находятся, хотя бы частью своей, безчисленное множество многоугольниковъ.

Дѣйствительно, если бы число многоугольниковъ было конечно, то можно было бы указать контуръ, отдѣляющій эти многоугольники отъ части плоскости, не заполненной многоугольниками, чего не можетъ быть, ибо, какъ только-что сказано, границы многоугольника не могутъ находиться на границѣ сѣти многоугольниковъ.

Опишемъ около точки a двѣ окружности съ радіусами r и r', при чемъ $r > r'$, такъ, чтобы обѣ эти окружности лежали внутри круга C. Отмѣтимъ тѣ многоугольники, которые лежатъ, хотя бы частью, внутри круга радіуса r' (такихъ многоугольниковъ будетъ безчисленное множество) и обозначимъ черезъ

$$X_1(z),\ X_2(z),\ X_3(z), \ldots$$

тѣ линейныя подстановки, которыя преобразуютъ эти многоугольники въ многоугольникъ σ_0. Эти подстановки не мѣняютъ круга C и слѣд. внутри круга радіуса r имѣемъ:

$$|X_n(z)| < 1. \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

[1]) См. Poincaré. Acta Mathematica t. I, p. 24.

Въ силу принципа сходимости можно изъ этихъ функцій выбрать рядъ, сходящійся внутри круга радіуса r. Для простоты предположимъ, что это будетъ рядъ:

$$X_1(z),\ X_2(z), \ldots,\ X_n(z), \ldots$$

Въ силу принципа сходимости можно найти такое цѣлое положительное число m, что

$$|X_{m+k}(z) - X_m(z)| < \delta$$

при всякомъ цѣломъ положительномъ k, если только z находится внутри круга радіуса r'. Тотъ многоугольникъ, который преобразуется въ σ_0 подстановкой $X_m(z)$, лежитъ, хотя бы частью, внутри круга радіуса r'.

Возьмемъ внутри этого многоугольника точку z_0 такъ, чтобы она лежала внутри круга радіуса r', и тогда $X_m(z_0)$ будетъ лежать внутри σ_0. Въ силу написаннаго выше неравенства всѣ точки $\psi_{m+k}(z)$ лежатъ внутри области α. Слѣд., если всѣ эти точки различны, то безчисленное множество ихъ попадетъ въ одинъ и тотъ же многоугольникъ, чего не можетъ быть, ибо всѣ эти точки, будучи эквивалентны z_0, эквивалентны между собою (см. выше); если же

$$\psi_{m+s}(z_0) = \psi_{m+t}(z_0),$$

то подстановка $\psi_{m+s}^{-1}\psi_{m+t}(z)$ имѣетъ двойную точку въ точкѣ z_0, лежащей внутри многоугольника, чего также не можетъ быть. Теорема такимъ образомъ доказана. Доказательство этого предложенія имѣется, какъ было указано въ началѣ этого параграфа, у Poincaré и Koebe, при чемъ оба геометра основываютъ свои доказательства на инваріантности нѣкоторыхъ выраженій относительно линейныхъ подстановокъ.

§ 5. Въ настоящемъ параграфѣ мы докажемъ при помощи принципа сходимости слѣдующую необходимую намъ для дальнѣйшаго теорему [1]): *если функція $f(z)$, голоморфная внутри круга C, однозначно-обратима въ этомъ кругѣ и при томъ*

$$f(0) = 0 \text{ и } f'(0) = 1,$$

то можно указать два постоянныхъ положительныхъ числа m_r и M_r такъ, что любая вышеупомянутая функція $f(z)$ будетъ удовлетворять неравенствамъ

$$m_r < |f(z)| < M_r$$

при условіи

$$|z| = r.$$

---

[1]) Теорема эта была дана Koebe въ его изслѣдованіи объ униформизаціи типа Schottky и болѣе общихъ типовъ.

Иначе говоря, модуль любой функціи, обладающей предыдущими свойствами, будетъ заключаться между опредѣленными числами m_r и M_r, когда z будетъ находиться на кругѣ, описанномъ изъ начала координатъ, какъ центра, радіусомъ $r < 1$. Доказательство существованія числа m_r можетъ быть получено элементарными соображеніями изъ теоріи аналитическихъ функцій, тогда какъ для доказательства существованія M_r потребовалось построеніе нѣкоторыхъ вспомогательныхъ Римановыхъ поверхностей [1]). Предполагая доказаннымъ существованіе m_r, мы, пользуясь принципомъ сходимости, докажемъ существованіе M_r.

Итакъ, пусть имѣется какая-либо функція $f(z)$, обладающая указанными выше свойствами. Покажемъ сначала, что minimum $|f(z)|$ на кругѣ C_r меньше единицы. Дѣйствительно, если бы это было не такъ, то модуль функціи $\frac{z}{f(z)}$, голоморфной внутри круга C_r и на его контурѣ, имѣлъ бы на контурѣ maximum, меньшій единицы. Съ другой стороны значеніе этой функціи во внутренней точкѣ $z = 0$ равно единицѣ, чего не можетъ быть. Предположимъ теперь, что не существуетъ числа M_r, т. е., что можно выбрать рядъ функцій

$$f_1(z),\ f_2(z), \ldots,\ f_n(z), \ldots$$

съ указанными выше свойствами такъ, что maximum ихъ модуля на окружности C_r будетъ расти безпредѣльно съ возрастаніемъ n. Очевидно, что maximum модуля этихъ функцій на окружности радіуса, большаго r, также будетъ безпредѣльно расти. Разсмотримъ кольцо, заключенное между окружностями C_r и $C_{r'}$, гдѣ

$$r < r' < 1,$$

и проведемъ также внутри этого кольца окружность C_ϱ, гдѣ

$$r < \varrho < r'.$$

Функціи

$$\frac{1}{f_1(z)},\ \frac{1}{f_2(z)}, \ldots,\ \frac{1}{f_n(z)}, \ldots$$

голоморфны и ограничены въ своей совокупности въ указанномъ выше кольцѣ. Ограниченность вытекаетъ изъ существованія числа m_r при всякомъ $r < 1$. Слѣд., на основаніи принципа сходимости изъ написан-

---

[1]) Koebe. Math. Annalen B. 69 S. 48 и Klein und Fricke. Vorles. üb. d. Theorie d. automorphen Functionen. B. II S. 499, гдѣ дано явное выраженіе для m_r и M_r.

наго выше ряда функцій можно выбрать рядъ, сходящійся въ упомянутомъ кольцѣ. Для простоты положимъ просто, что

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{f_n(z)} = \tau(z),$$

гдѣ $\tau(z)$—функція голоморфная внутри кольца. Отмѣтимъ на окружности C_ρ тѣ точки, въ которыхъ $|f_n(z)|$ достигаетъ своего maximum'a, т. е. $\left|\frac{1}{f_n(z)}\right|$ своего minimum'a. Этотъ послѣдній при возрастаніи n по предположенію стремится къ нулю. Намѣченныхъ точекъ будетъ безчисленное множество (это могутъ быть и совпадающія точки) и слѣд. онѣ будутъ имѣть на окружности C_ρ по крайней мѣрѣ одну точку сгущенія β. Покажемъ, что

$$\tau(\beta) = 0.$$

Окружимъ точку β кругомъ λ, лежащимъ внутри взятаго кольца. Въ силу принципа сходимости при достаточно большомъ n и всякомъ k имѣемъ внутри λ:

$$\left|\tau(z) - \frac{1}{f_{n+k}(z)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но внутри круга λ лежитъ безчисленное множество намѣченныхъ выше точекъ, а потому при достаточно большомъ значеніи k и при нѣкоторомъ значеніи $z = \xi$ будемъ имѣть:

$$\left|\frac{1}{f_{n+k}(\xi)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и слѣд. } |\tau(\xi)| < \varepsilon.$$

Итакъ, можно утверждать въ виду произвольной малости числа ε и радіуса круга λ, что въ сколь угодно близкомъ разстояніи отъ точки β находятся сколь угодно малыя значенія функціи $\tau(z)$ и слѣд.

$$\tau(\beta) = 0.$$

Отсюда видно, что голоморфная функція $\tau(z)$ имѣетъ нули на любой окружности C_ρ, проходящей внутри кольца, а потому $\tau(z)$ должно обращаться тождественно въ нуль. Отсюда, въ силу принципа сходимости, слѣдуетъ, что на окружности C_ρ при достаточно большомъ n и всякомъ k имѣемъ:

$$\left|\frac{1}{f_{n+k}(z)}\right| < \varepsilon,$$

чего не можетъ быть, ибо въ силу ранѣе доказаннаго minimum $|f_{n+k}(z)|$ меньше единицы на окружности C_ρ. Слѣд., высказанное предположеніе о томъ, что число M_r не существуетъ, неправильно [1]).

Существованіе числа M_r доказано нами лишь въ томъ предположеніи, что существуетъ m_r, и что функціи $f(z)$ не обращаются въ нуль при $z \neq 0$, но нигдѣ мы не пользовались однозначной обратимостью функцій $f_n(z)$. Эта послѣдняя служитъ лишь для доказательства существованія числа m_r. Если же существованіе на любомъ кругѣ C_r низшаго предѣла, отличнаго отъ нуля, для какого-либо ряда не однозначно-обратимыхъ функцій обнаружено какимъ-либо путемъ и выполнено указанное выше условіе, то для этого ряда функцій будетъ существовать и верхній предѣлъ, но онъ можетъ быть отличнымъ отъ того M_r, которое относилось къ функціямъ, упоминаемымъ въ теоремѣ.

Если кругъ C, упоминаемый въ теоремѣ, замѣненъ кругомъ C_R и

$$f'(0) = a_1,$$

то замѣной перемѣнныхъ легко придти къ слѣдующимъ неравенствамъ на кругѣ C_r $(r < R)$

$$a_1 . R m_{\frac{r}{R}} < |f(z)| < a_1 R . M_{\frac{r}{R}} .$$

§ 6. Вернемся къ методѣ наложенія поверхностей и докажемъ теперь существованіе и свойство предѣльной функціи, о которой упоминалось въ § 2. Въ этомъ параграфѣ мы видѣли, что поверхность ω_n преобразуется въ кругъ C помощью нѣкоторой функціи $\varphi_n(z)$. Обозначимъ:

$$u_n = \varphi_n(z).$$

Пусть упомянутая въ § 2 точка O лежитъ въ началѣ координатъ, такъ что около точки O будутъ имѣть мѣсто разложенія:

$$u_1 = a_1 z + \ldots$$

$$u_n = a_1 a_n z + \ldots \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

гдѣ всѣ a_n суть положительныя числа. Функціи u_n удовлетворяютъ всѣмъ условіямъ принципа сходимости, при чемъ предѣльная функція u опредѣлена на упомянутой въ § 2 поверхности ω. Предположимъ сначала, что при всякомъ выборѣ послѣдовательности изъ функцій u_n функція u обращается тождественно въ нуль. Въ этомъ случаѣ можемъ написать:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = 0$$

---

1) Въ одномъ изъ номеровъ Comptes Rendus за 1916 г. американскій геометръ Gronwall даетъ точныя выраженія для m_r и M_r.

при всякомъ z, лежащемъ на ω. Поверхность ω_n содержитъ внутри себя поверхность ω_1, и слѣд., исключая z, получимъ, что u_n при всякомъ n есть функція u_1, голоморфная и однозначно-обратимая въ кругѣ C, и имѣющая разложеніе:

$$u_n = \alpha_n u_1 + \ldots \qquad (n = 2,\ 3, \ldots).$$

Въ силу существованія числа m_r и стремленія u_n къ нулю имѣемъ:

$$|u_n| < \alpha_n m_r \text{ при } |z| = r$$

и слѣд.

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0\,.$$

Введемъ новыя функціи:

$$v_n = \frac{u_n}{\alpha_n} \qquad (n = 2,\ 3, \ldots).$$

Покажемъ, что функціи v_n ограничены во всякой области γ, лежащей внутри ω. Дѣйствительно, область γ, находясь внутри ω, лежитъ внутри какой-либо поверхности ω_n и слѣд. отображается помощью функціи v_n въ часть круга радіуса $\frac{1}{\alpha_n}$, гдѣ n—вполнѣ опредѣленное число. Обозначимъ буквою η наибольшее разстояніе контура этого отображенія отъ начала координатъ. Имѣемъ въ силу опредѣленія функцій v_n

$$v_{n+s} = v_n + \ldots$$

и слѣд. въ силу теоремы предыдущаго параграфа:

$$|v_{n+s}| < \frac{1}{\alpha_n} M_{\eta\alpha_n}$$

при всякомъ s. Отсюда непосредственно ясна ограниченность функцій v_n въ ихъ совокупности въ области γ. Слѣд. къ функціямъ v_n примѣнимъ принципъ сходимости, который даетъ предѣльную функцію v, не равную тождественно нулю, ибо $\frac{dv}{dz}$ въ точкѣ O обращается въ α_1, какъ и всякая $\frac{dv_n}{dz}$. Кромѣ того, функція v будетъ однозначно-обратима на поверхности ω (см. замѣчанія § 3). Докажемъ теперь, что функція v преобразуетъ поверхность ω на всю плоскость за исключеніемъ безконечно удаленной точки. Предположимъ наоборотъ, что v не принимаетъ на поверхности ω нѣкотораго значенія k, и обозначимъ:

$$a = |k|.$$

Возьмемъ n настолько большимъ, чтобы

$$\frac{m_{\frac{1}{2}}}{\alpha_n} > a + 1\,.$$

Какъ и раньше, всѣ v_{n+s} будемъ разсматривать, какъ функціи v_n на кругѣ радіуса $\frac{1}{\alpha_n}$, и на окружности радіуса $\frac{1}{2\alpha_n}$ имѣемъ на основаніи неравенства предыдущаго параграфа:

$$|v_{n+s}| > a + 1$$

и слѣд.

$$|v| \geq a + 1$$

на этой окружности. Этой послѣдней соотвѣтствуетъ на поверхности ω нѣкоторая замкнутая линія, и изображеніе этой линіи въ плоскости перемѣнной v есть также замкнутая линія, содержащая внутри себя начало координатъ и отстоящая отъ него на разстояніи, большемъ a. Отсюда непосредственно ясно, что v должно принять и значеніе k, а потому v преобразуетъ поверхность ω въ полную плоскость за исключеніемъ безконечно-удаленной точки, что, какъ извѣстно, не можетъ быть при $p \geqq 2$ [1]). Итакъ, наше предположеніе о стремленіи u_n къ нулю при всякомъ z неправильно. Функціи u_n по модулю меньше единицы, и слѣд. къ нимъ приложимъ принципъ сходимости, который даетъ въ этомъ случаѣ нѣкоторую предѣльную функцію u, не равную тождественно нулю и однозначно-обратимую на поверхности ω.

Остается показать, что функція u преобразуетъ ω въ кругъ C. Положимъ для простоты письма:

$$\lim_{n=\infty} u_n = u\,.$$

Функцію u можно разсматривать, какъ функцію любого u_n въ кругѣ C, и, наоборотъ, во всякой области, лежащей внутри области значеній функціи u, можно разсматривать при достаточно большомъ n u_n, какъ функцію отъ u. Обозначимъ:

$$u = \lambda_n(u_n) \quad \text{и} \quad u_n = \mu_n(u).$$

[1]) Koebe. Math. Annalen. B. 67.

Какъ видно, любой точкѣ поверхности ω соотвѣтствуетъ точка v, лежащая на конечномъ разстояніи.

Докажемъ теперь, что если a принадлежитъ области значеній функціи u, то

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n(a) = a.$$

Въ плоскости перемѣнной u опишемъ около точки a кругъ любого малаго радіуса ε такъ, чтобы онъ цѣликомъ лежалъ внутри области значеній u. Въ силу принципа сходимости при достаточно большихъ значеніяхъ n имѣемъ:

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{4}$$

въ этомъ кругѣ и на его контурѣ. Окружимъ контуръ этого круга двумя концентрическими къ нему окружностями радіусовъ $\frac{3}{4}\varepsilon$ и $\frac{5}{4}\varepsilon$. Функція $\mu_n(u)$ преобразуетъ указанный кругъ радіуса ε въ область, контуръ которой находится въ силу написаннаго выше неравенства внутри образованнаго только-что кольца. Кромѣ того, эта область должна непремѣнно содержать точку a, ибо иначе мы имѣли бы:

$$|\mu_n(a) - a| > \frac{\varepsilon}{4},$$

чего не можетъ быть опять въ силу выше написаннаго неравенства. Слѣд., значенія u, соотвѣтствующія значеніямъ $u_n = a$, при достаточно большихъ значеніяхъ n лежатъ въ упомянутомъ выше кругѣ произвольно малаго радіуса ε и слѣд.

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n(a) = a.$$

Всѣ функціи $\lambda_n(z)$ опредѣлены въ кругѣ C и сами по модулю меньше единицы. Приложимъ къ этимъ функціямъ принципъ сходимости и обозначимъ предѣльную функцію черезъ $\lambda(z)$. Функція эта опредѣлена въ кругѣ C. Значеніе $z = 0$ и значенія, достаточно близкія къ нему, обязательно принадлежатъ къ области значеній функціи u, а слѣд. при этихъ z

$$\lambda(z) = z,$$

но тогда и во всемъ кругѣ C

$$\lambda(z) = z,$$

т. е.

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n(z) = z,$$

слѣд. въ кругѣ радіуса $1 - \varepsilon$ имѣемъ при достаточно большихъ значеніяхъ n:

$$|z - \lambda_n(z)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lambda_n(z)$ заполнитъ своими значеніями кругъ радіуса $1-2\varepsilon$. Но $\lambda_n(z)$ даетъ значенія, принадлежащія области значеній функціи u, а потому, въ виду произвольной малости ε, можно утверждать, что область значеній функціи u будетъ состоять изъ всего круга C, что и требовалось доказать.

Въ виду единственности отображенія поверхности ω въ кругъ C при указанныхъ въ § 2 условіяхъ, можно утверждать, что любая послѣдовательность функцій u_n приводитъ къ одной и той же предѣльной функціи u, т. е. дѣйствительно

$$\lim_{n=\infty} u_n = u,$$

ибо всякая предѣльная функція, какъ показано, совершаетъ указанное выше преобразованіе, существенность котораго извѣстна.

Предыдущее доказательство показываетъ также, что любая односвязная область ω съ безчисленнымъ множествомъ листовъ можетъ быть конформно преобразована либо на всю плоскость, за исключеніемъ безконечно удаленной точки [1]), либо на кругъ C Для доказательства этого достаточно только установить въ каждомъ случаѣ приближенныя поверхности ω_n, состоящія изъ конечнаго числа листовъ и удовлетворяющія условіямъ:

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots; \quad \lim \omega_n = \omega.$$

28 декабря 1915 г.

(Поступило въ редакцію 19.v.1916).

---

[1]) Случай $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n = 0$.