Ариѳмологическая аналогія тригонометрическимъ рядамъ Фурье.

—Между двумя отдѣлами—анализомъ и ариѳмологіей существуетъ полное соотвѣтствіе.

—Почти каждому крупному отдѣлу анализа соотвѣтствуетъ свой особый отдѣлъ ариѳмологіи.

Н. В. Бугаевъ [1]).

Эрванда Когбетлянца.

Lucas [2]) изслѣдовалъ прерывныя функціи R и S, названныя имъ числовыми періодическими, и показалъ, что онѣ могутъ быть разсмотрѣны какъ прототипы sinus и cosinus, такъ какъ обладаютъ многими свойствами этихъ функцій. Въ частности оказалось, что онѣ отличаются своеобразной періодичностью остатковъ ихъ modulo p, аналогичной періодичности тригонометрическихъ функцій.

Построить на основаніи этого ихъ свойства разложенія любыхъ числовыхъ функцій въ конечные ряды по функціямъ R и S и составляетъ цѣль настоящаго очерка, цѣль, потребовавшую разработки теоріи этихъ функцій и въ частности болѣе точнаго выясненія ихъ относительной періодичности (mod. p).

Оказывается, что въ области функцій прерывнаго перемѣннаго существуютъ разложенія функцій въ конечные ряды по относительно ортогональнымъ функціямъ R и S, вполнѣ аналогичныя по содержанію и даже по внѣшнему виду разложеніямъ въ тригонометрическіе ряды въ области функцій непрерывнаго перемѣннаго, и этимъ лишній разъ подтверждается глубокая мысль Н. В. Бугаева, что корни всѣхъ свойствъ функцій непрерывныхъ надо искать въ свойствахъ функцій прерывныхъ—въ ариѳмологіи.

---

[1]) Рѣчь: „Математика и научно-философское міросозерцаніе".

[2]) E. Lucas. American Journal of Mathem. I (1878) стр. 184, 289. Теорія этихъ функцій подробно изложена въ томѣ II Niedere Zahlentheorie Bachmann'a, въ дальнѣйшемъ эту книгу мы будемъ цитировать B. II.

§ 1.

Числовыя функціи $R(x)$ и $S(x)$—(x—цѣлое число)—опредѣляются изъ начальныхъ значеній

$$R(0)=0 \quad S(0)=2$$
$$R(1)=1 \quad S(1)=a$$

съ помощью рекуррентныхъ формулъ

$$\frac{R}{S}(x+2)=a\,.\,\frac{R}{S}(x+1)-b\,.\,\frac{R}{S}(x) \qquad \text{(I)}.$$

гдѣ a и b суть цѣлыя числа [1]).

Какъ показалъ Lucas, всегда существуетъ такое цѣлое P, стоящее въ связи съ даннымъ простымъ числомъ p, что имѣютъ мѣсто сравненія:

$$\left.\begin{array}{l} R(x+P)\equiv R(x) \\ S(x+P)\equiv S(x) \end{array}\right\} (\text{mod. } p)$$

Но въ зависимости отъ значеній основныхъ чиселъ a и b, опредѣляющихъ функціи R и S, число P можетъ имѣть то или иное выраженіе черезъ p. Мы установимъ, что возможны лишь пять различныхъ случаевъ. Обозначимъ δ показатель, къ которому принадлежитъ b (mod. p) и введемъ число π, полагая $\delta.\pi=p-1$. Далѣе назовемъ q то наименьшее и отличное отъ нуля значеніе аргумента x, при которомъ $R(x)\equiv 0$ (mod. p); оно связано съ числомъ p различно въ зависимости отъ значенія символа Лежандра $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ гдѣ $\Delta=a^2-4b$: а именно при $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$ q будетъ дѣлителемъ $p-1$, а при $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$—дѣлителемъ числа $p+1$. Итакъ, вводя цѣлое число h, мы имѣемъ:

$$h.q=p-\left(\frac{\Delta}{p}\right).^{2)}$$

Обозначимъ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ π и h черезъ d

$$d=D(\pi\,,\,h)=D\left[\frac{p-1}{\delta}\,,\,\frac{p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)}{q}\right]$$

[1]) В. II стр. 72.

[2]) В. II стр. 86.

По опредѣленію P мы имѣемъ $S(P)\equiv 2$ и $R(P)\equiv 0$ и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$S^2(x) - \Delta . R^2(x) = 4b^x \qquad \text{(II)}$$ [1]

Отсюда, полагая $x=P$, мы получимъ $4\equiv 4b^P$ (mod. p) и ergo P кратно δ:

$$P = \delta . P_1$$

Изъ $R(P)\equiv 0$ слѣдуетъ также [2], что P кратно q:

$$P = q . P_2$$

Разсмотримъ сперва случай $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$: $\pi\delta = hq$; сокращая на d и полагая $\pi = d\pi_1$, $h = dh_1$ $(D(\pi_1, h_1)=1)$ получаемъ $\pi_1\delta = h_1 q$ и отсюда $\frac{P_1}{P_2} = \frac{q}{\delta} = \frac{\pi_1}{h_1}$ и слѣдовательно $P_1 = \omega\pi_1$, $P_2 = \omega h_1$. Такимъ образомъ $P = \omega . \pi_1 . \delta$. Но съ другой стороны

$$R(\pi_1\delta) = R(h_1 q) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$ [2]

и изъ (II) мы получаемъ:

$$S^2(\pi_1\delta) \equiv 4b^{\pi_1\delta} \equiv 4 \quad (\text{mod. } p).$$

И т. к.

$$2S(2x) = S^2(x) + \Delta . R^2(x) \qquad \text{(III)}$$ [3]

то, подставляя $x = \pi_1\delta$, имѣемъ:

$$2S(2\pi_1\delta) \equiv S^2(\pi_1\delta) \equiv 4 \quad \text{т. е.} \quad S(2\pi_1\delta) \equiv 2 \quad (\text{mod. } p);$$

ясно, что и $R(2\pi_1\delta) \equiv R(2h_1 . q) \equiv 0$ (mod. p), а отсюда съ помощью формулъ

$$\left.\begin{aligned} 2 . S(x+y) &= S(x) . S(y) + \Delta R(x) . R(y) \\ 2R(x+y) &= S(x) . R(y) + R(x) . S(y) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$ [4]

мы легко убѣждаемся въ томъ, что при $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$ $P \leq 2\pi_1\delta$ т. е. $\omega \leq 2$ и получаются лишь два возможныхъ случая:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{A)} & \omega=1 & P=\pi_1 . \delta \\ \text{B)} & \omega=2 & P=2\pi_1 . \delta \end{array}\right\} \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$$

---

[1] В. II стр. 78 форм. (85).
[2] В. II стр. 86.
[3] В. II стр. 81 форм. (88).
[4] В. II стр. 79 форм. (86).

Разсмотримъ теперь $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$. Опять таки $\delta . P_1 = q . P_2$, но на этотъ разъ $hq = p + 1 = \pi\delta + 2$; вводимъ теперь $d_1 = D(q,\ \delta)$; ясно, что т. к. $hq = \pi\delta + 2$, то $d_1 \leq 2$. Полагаемъ $\delta = d_1 . \delta_1$ и $q = d_1 . q_1$:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{q}{\delta} = \frac{q_1}{\delta_1}$$

т. к. $D(\delta_1,\ q_1) = 1$, то ясно, что $P_1 = \omega q_1$, $P_2 = \omega\delta_1$ и $P = \omega . q_1\delta = \omega . \frac{q\delta}{d_1}$. Итакъ P имѣетъ видъ $P = \mu . \frac{q\delta}{2}$, гдѣ μ — цѣлое число.

Установимъ ограниченіе для значеній μ: изъ формулы (II)

$$S^2(q\delta) - \Delta . R^2(q\delta) \equiv S^2(q\delta) \equiv 4b^{q\delta} \equiv 4 \pmod{p}$$

и ergo

$$2 . S(2q\delta) \equiv S^2(q\delta) \equiv 4 \text{ т. е. } S(2q\delta) \equiv 2 \pmod{p},$$

что вмѣстѣ съ $R(2q\delta) \equiv 0 \pmod{p}$ даетъ

$$P \leq 2q\delta, \quad \text{т. е. } \mu \leq 4.$$

Покажемъ, что случай $\mu = 3$ приводитъ къ періоду $P = \frac{q\delta}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ: если-бы $P = 3\ \frac{q\delta}{2}$, то (см. (IV))

$$2R\left(q\delta + q\frac{\delta}{2}\right) \equiv S(q\delta) . R\left(\frac{q\delta}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

и

$$2S\left(\frac{3q\delta}{2}\right) \equiv 2S(0) \equiv 4 \equiv S(q\delta) . S\left(q\frac{\delta}{2}\right)$$

и сопоставляя мы имѣемъ

$$S(q\delta) \text{ не} \equiv 0 \pmod{p}$$

и необходимо

$$R\left(q\frac{\delta}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Покажемъ, что

$$S\left(\frac{q\delta}{2}\right) \equiv +2 \pmod{p}.$$

Такъ какъ $R\left(\frac{q\delta}{2}\right)\equiv 0$, то (см. (III))

$$2S(q\delta)\equiv S^2\left(q\frac{\delta}{2}\right)\equiv 4b^{q\frac{\delta}{2}} \quad (\text{mod. } p)$$

такъ какъ $P=\omega.\frac{q\delta}{d_1}$, то ясно, что въ разсматриваемомъ случаѣ $d_1=1$; значитъ q дѣлится на 2 и

$$b^{q\frac{\delta}{2}}=b^{\frac{q}{2}.\delta}\equiv 1 \ (\text{mod. } p), \text{ ergo } S(q\delta)\equiv +2 \quad (\text{mod. } p).$$

и изъ

$$S(q\delta)\,.\,S\left(q\frac{\delta}{2}\right)\equiv 4 \quad (\text{mod. } p)$$

мы получаемъ $S\left(q\frac{\delta}{2}\right)\equiv +2$, чѣмъ и показано, что въ случаѣ $\mu=3$ $P=q\frac{\delta}{2}$. Итакъ возможны при $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$ лишь три различныхъ случая:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{C)} & \mu=1 & P=q\frac{\delta}{2} \\ D) & \mu=2 & P=q\delta \\ \text{E)} & \mu=4 & P=2q\delta \end{array}\right\}\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$$

Примѣры

$$\begin{array}{lllll} \text{A)} & a=7 & b=12 & p=13 & P=\pi_1\delta \\ \text{B)} & a=5 & b=6 & p=17 & P=2\pi_1\delta \\ D) & a=17 & b=75 & p=7 & P=q\delta \\ \text{E)} & a=4 & b=15 & p=7 & P=2q\delta \end{array}$$

показываютъ, что формы періода A), B), D) и E) встрѣчаются въ дѣйствительности, что-же касается формы C) $P=q\frac{\delta}{2}$, то она можетъ встрѣтиться лишь въ случаѣ четныхъ q и δ, и легко показать, что необходимыми и достаточными условіями того, чтобы P было формы $q\frac{\delta}{2}$ является также нечетность $\frac{q}{2}$ и $\frac{\delta}{2}$. Вопросъ о томъ, встрѣчается-ли эта возможная форма періода въ дѣйствительности мы оставляемъ открытымъ, такъ какъ онъ для насъ не представляетъ интереса. Мы отмѣчаемъ главный результатъ всего произведеннаго разбора: *періодъ P всегда дѣлится на δ.*

§ 2.

Мы ставимъ теперь вопросъ объ относительной ортогональности функцій R и S modulo p, понимая подъ ней слѣдующее: докажемъ, что при всякихъ a, b и p имѣютъ мѣсто сравненія (mod. p)

$$\left.\begin{array}{l}
\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x)\equiv 0, \quad \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x)\equiv 0, \quad \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x).R(n\delta x)\equiv 0 \\
\int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2(n\delta x)\equiv -\Delta.\int_0^{\frac{P}{\delta}} R^2(n\delta x)\equiv \frac{2P}{\delta}\left(0<n<\frac{P}{2\delta}\right) \\
\int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2\left(\frac{P}{2\delta}.\delta x\right)=\int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2\left(\frac{Px}{2}\right)\equiv\frac{4P}{\delta} \\
\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x).R(m\delta x)\equiv\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x).S(m\delta x)\equiv\int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x).S(m\delta x)\equiv 0 \begin{pmatrix} m\neq n \\ m<\frac{P}{2\delta} \\ n<\frac{P}{2\delta}\end{pmatrix}
\end{array}\right\} \quad (V)$$

причемъ подъ знакомъ $\int_0^{N+1}$ надо понимать знакъ интеграла по конечнымъ разностямъ т. е.

$$\int_0^{N+1} f(x)=\sum_{k=0}^{N} f(k).$$

Группа формулъ (V) вполнѣ аналогична формуламъ, выражающимъ ортогональность функцій $\sin nx$ и $\cos nx$.

Переходя къ доказательству ихъ, отмѣтимъ, что функціи S и R допускаютъ [1]) такое выраженіе:

$$S(x)=\alpha_1^x+\alpha_2^x \quad R(x)=\frac{\alpha_1^x-\alpha_2^x}{\alpha_1-\alpha_2}, \tag{VI}$$

гдѣ α_1 и α_2 суть корни уравненія

$$\xi^2-a\xi+b=0.$$

Такъ какъ неопредѣленный интегралъ по конечнымъ разностямъ отъ α^x берется такъ:

$$\int \alpha^x=\frac{\alpha^x}{\alpha-1},$$

---

[1]) В. II) стр. 75 форм. (73) и (74).

то по форм. (VI) мы имѣемъ:

$$\int S(n\delta x) = \frac{\alpha_1^{n\delta x}}{\alpha_1^{n\delta}-1} + \frac{\alpha_2^{n\delta x}}{\alpha_2^{n\delta}-1} = \frac{b^{n\delta}\,.\,S(n\delta\,.\,\overline{x-1}) - S(n\delta x)}{1 - S(n\delta) + b^{n\delta}};$$

такъ какъ $b^\delta \equiv 1$ то получаемъ сравненіе:

$$[2 - S(n\delta)]\,.\int S(n\delta x) \equiv S(n\delta\,.\,\overline{x-1}) - S(n\delta x) \quad (\text{mod. } p) \qquad \text{(VII)}$$

Совершенно аналогичнымъ путемъ получается сравненіе:

$$[2 - S(n\delta)]\,.\int R(n\delta x) \equiv R(n\delta\,.\,x - 1) - R(n\delta x) \quad (\text{mod. } p) \qquad \text{(VIII)}$$

Функціи $R(x)$ и $S(x)$ при отрицательныхъ значеніяхъ аргумента легко опредѣляются изъ начальныхъ значеній съ помощью формулъ (I), переписанныхъ такъ:

$$S(x) = \frac{a\,.\,S(x+1) - S(x+2)}{b} \qquad R(x) = \frac{a\,.\,R(x+1) - R(x+2)}{b}.$$

Такимъ путемъ мы напримѣръ получимъ:

$$S(-1) = \frac{2a - a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} = \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} = b^{-1}.S(1)$$

$$S(-2) = \left(\frac{a^2}{b} - 2\right)\frac{1}{b} = \frac{a^2 - 2b}{b^2} = \alpha_1^{-2} + \alpha_2^{-2} = b^{-2}.S(+2)$$

и легко показать, что формулы (VI) годны и при $x < 0$ и что вообще

$$S(-x) = b^{-x}.S(x) \quad \text{и} \quad R(-x) = -a^{-x}.R(x)$$

и въ частности

$$S(-n\delta) = b^{-n\delta}.S(n\delta) \quad R(-n\delta) = -b^{-n\delta}.R(n\delta);$$

ergo:

$$\left.\begin{aligned} S(-n\delta) &\equiv S(n\delta) \\ R(-n\delta) &\equiv -R(n\delta) \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } p) \qquad \text{(IX)}$$

Формулы (VII) и (VIII) при условіи 2 не $\equiv S(n\delta)$ (mod. p) даютъ намъ возможность вычислить

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x) \quad \text{и} \quad \int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x):$$

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x) \equiv \frac{-S(-n\delta) + S(0) + S[n(P-\delta)] - S(nP)}{2 - S(n\delta)} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

и simile

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ p) \quad 2 \text{ не} \equiv S(n\delta)$$

Условіе 2 не $\equiv S(n\delta)$ удовлетворяется при $n\delta < P$, такъ какъ изъ $S(u) \equiv +2$ слѣдуетъ $R(u) \equiv 0$ и слѣдовательно при $u < P$ $S(u)$ не $\equiv 2$; такимъ образомъ условіе $S(n\delta)$ не $\equiv 2$ можно замѣнить условіемъ $n \leq \frac{P}{\delta} - 1$.

Изъ формулъ (IV) получаются путемъ замѣны y на $-y$ слѣдующія:

$$2.S(x-y) = b^{-y}.S(x).S(y) - \Delta.b^{-y}.R(x).R(y)$$

$$2.R(x-y) = -b^{-y}.S(x).R(y) + b^{-y}.R(x).S(y),$$

а отсюда сравненія:

$$\left.\begin{aligned} 2S[\delta(x-y)] &\equiv S(\delta x).S(\delta y) - \Delta.R(\delta x)\ R(\delta y) \\ 2R[\delta(x-y)] &\equiv R(\delta x).S(\delta y) - S(\delta x).R(\delta y) \end{aligned}\right\} \ (\mathrm{mod.}\ p) \qquad (\mathrm{X})$$

Соединяя (X) со сравненіями, вытекающими изъ формулъ (IV), мы получаемъ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned} S(\delta x).S(\delta y) &\equiv S[\delta(x+y)] + S[\delta(x-y)] \\ R(\delta x).S(\delta y) &\equiv R[\delta(x+y)] + R[\delta(x-y)] \\ \Delta.R(\delta x).R(\delta y) &\equiv S[\delta(x+y)] - S[\delta(x-y)] \end{aligned}\right\} \ (\mathrm{mod.}\ p) \qquad (\mathrm{XI})$$

и изъ нихъ, какъ частные случаи, при $x = y$:

$$S^2(\delta x) \equiv 2 + S(2\delta x); \quad \Delta R^2(\delta x) \equiv -2 + S(2\delta x); \quad R(\delta x).S(\delta x) \equiv R(2\delta x) \qquad (\mathrm{XII})$$

Формулы (XI) и (XII) даютъ намъ возможность доказать всю группу формулъ (V).

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} {}_{\Delta R}^{\ S}(n\delta x).{}_{R}^{S}(m\delta x) \equiv \int_0^{\frac{P}{\delta}} S[(n+m)\delta x] \pm \int_0^{\frac{P}{\delta}} S[(n-m)\delta x] \quad (\mathrm{mod.}\ p)$$

При $n \mp m$ и $n,\ m \leq \frac{P}{2\delta}$ мы имѣемъ $|n \pm m| < \frac{P}{\delta}$ и слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(n\delta x).R(m\delta x) \equiv \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(n\delta x).S(m\delta x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ p) \ (n \mp m) \left(n,\ m \leq \frac{P}{2\delta}\right)$$

Simile

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} R(m\delta x).S(n\delta x) \equiv \int_0^{\frac{P}{\delta}} R[(n+m)\delta x] +$$

$$+\int_0^{\frac{P}{\delta}} R[(n-m)\delta x] \equiv 0 \text{ (mod. } p) \text{ при } n \gtreqless m \text{ и } n,\ m \leq \frac{P}{2\delta}$$

такъ какъ при $n = \dfrac{P}{2\delta}$

$$R[2n\delta x] = R(Px) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Намъ осталось такимъ образомъ разсмотрѣть лишь

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} R^2(n\delta x), \quad \int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2(n\delta x):$$

по формулѣ (XII)

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} S^2(n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta} + \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(2n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta} \text{ при } 0 < n < \frac{P}{2\delta}$$

$$\equiv \frac{4P}{\delta} \text{ для } n = 0,\ \frac{P}{2\delta}.$$

Далѣе

$$-\Delta \int_0^{\frac{P}{\delta}} R^2(n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta} - \int_0^{\frac{P}{\delta}} S(2n\delta x) \equiv \frac{2P}{\delta}\ 0 < n < \frac{P}{2\delta}$$

$$\equiv 0 \quad n = 0,\ \frac{P}{2\delta}.$$

§ 3.

Такимъ образомъ, то что мы назвали относительной ортогональностью modulo p, установлено, и мы приступаемъ къ разложенію любой числовой функции $f(x)$ по нашимъ относительно—ортогональнымъ функціямъ $R(n\delta x)$ и $S(n\delta x)$; разложеніе конечно тоже будетъ относительно (mod. p).

Если

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} [A_n . R(n\delta x) + B_n . S(n\delta x)] \quad (\text{mod. } p)$$

то ясно, что въ силу относительной періодичности функцій R и S N не должно превышать $\dfrac{P}{\delta} - 1$. Достаточно взять $N = E\left(\dfrac{P}{2\delta}\right)$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\left.\begin{aligned} S\left[\left(\frac{P}{\delta}-n\right)\delta x\right] &\equiv S(-n\delta x)\equiv S(n\delta x)\\ R\left[\left(\frac{P}{\delta}-n\right)\delta x\right] &\equiv R(-n\delta x)\equiv -R(n\delta x)\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod.}\ p)\qquad(\mathrm{XIII})$$

Итакъ мы беремъ $N=E\left(\frac{P}{2\delta}\right)$, и получаемъ разложеніе

$$\mathrm{D)}\quad f(x)\equiv\sum_{n=0}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)}[A_n.R(n\delta x)+B_n.S(n\delta x)]\quad(\mathrm{mod.}\ p)$$

Такъ какъ въ немъ $n\leq\frac{P}{2\delta}$, то формулы (V) имѣютъ мѣсто, и для опредѣленія коэффиціентовъ A_n и B_n достаточно проинтегрировать по конечнымъ разностямъ обѣ части сравненія, предварительно умноживъ ихъ на $R(n\delta x)$ и $S(u\delta x)$. Такимъ путемъ мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u)\,.\,R(n\delta u)\equiv A_n\,.\int_0^{\frac{P}{\delta}}R^2(n\delta u)\equiv -A_n\,.\frac{2P}{\Delta\delta}\\ \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u)\,.\,S(n\delta u)\equiv B_n\,.\int_0^{\frac{P}{\delta}}S^2(n\delta u)\equiv B_n\,.\frac{2P}{\delta}\end{aligned}\right|\ \begin{aligned}&0<n<\frac{P}{2\delta}\\ &(\mathrm{mod.}\ p)\end{aligned}$$

Въ случаѣ если $\frac{P}{2\delta}=E\left(\frac{P}{2\delta}\right)$ въ разложеніи выпадаетъ членъ съ $R\left(\frac{Px}{2}\right)$ такъ какъ $R\left(\frac{Px}{2}\right)\equiv 0$ и не приходится опредѣлять $A_{\frac{P}{2\delta}}$, для $B_{n=\frac{P}{2\delta}}$ мы въ этомъ случаѣ получимъ

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).S\left(\frac{P}{2\delta}\delta u\right)\equiv B_{\frac{P}{2\delta}}\,.\int_0^{\frac{P}{\delta}}S^2\left(\frac{P}{2\delta}\delta u\right)\equiv\frac{4P}{\delta}\,.\,B_{\frac{P}{2\delta}}$$

такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}A_n&\equiv-\frac{\delta\,.\,\Delta}{2P}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,R(n\delta u)\\ B_n&\equiv\frac{\delta}{2P}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u).S(n\delta u)\end{aligned}\right|\ \begin{aligned}&0<n<\frac{P}{2\delta}\\ &(\mathrm{mod.}\ p)\end{aligned}$$

и

$$B_n \equiv \frac{\delta}{4P} \cdot \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \, . \, S(n\delta u) \quad (\mathrm{mod.}\ p) \text{ для } n = 0,\ \frac{P}{2\delta}.$$

Въ разложеніи нѣтъ члена съ A_0, такъ какъ $R(0) \equiv 0$, а

$$B_0 \equiv \frac{\delta}{2P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \equiv \frac{\delta}{4P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \, . \, S(0).$$

Эти формулы вполнѣ аналогичны формуламъ, дающимъ коэффиціенты разложенія функціи непрерывнаго перемѣннаго въ тригонометрическій рядъ. Мы видимъ, что случай четнаго $\frac{P}{\delta}$ отличается отъ случая, въ которомъ P не дѣлится на 2δ, и именно въ томъ, что въ первомъ случаѣ въ разложеніи есть членъ $B_n . S(n\delta x)$ при $n = \frac{P}{2\delta}$, отсутствующій во второмъ случаѣ. Чтобы дать однообразную формулу, обнимающую оба случая мы, пользуясь формулой (XIII), перепишемъ разложеніе (D) такъ:

$$f(x) \equiv B_0 \, . \, S(0) + \sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1} \left\{ \frac{A_n}{2} R(n\delta x) + \frac{B_n}{2} S(n\delta x) \right\} + B_{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)} . S\left[E\left(\frac{P}{2\delta}\right) . \delta x \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1} \left\{ -\frac{A_n}{2} . R\left[\left(\frac{P}{\delta} - n\right) \delta x\right] + \frac{B_n}{2} . S\left[\left(\frac{P}{\delta} - n\right) \delta x\right] \right\} \quad (\mathrm{mod.}\ p)$$

Средній членъ конечно отсутствуетъ, если $E\left(\frac{P}{2\delta}\right) < \frac{P}{2\delta}$ и въ такомъ случаѣ суммы $\sum$ берутся отъ $n = 1$ до $n = E\left(\frac{P}{2\delta}\right)$.

Вторую сумму мы преобразуемъ, пользуясь тѣмъ, что благодаря форм. (XIII):

$$-\frac{A_n}{2} \equiv \frac{-\delta \, . \, \Delta}{4P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \, . \, R\left[\left(\frac{P}{\delta} - n\right) \delta n\right]$$

$$\frac{B_n}{2} \equiv \frac{\delta}{4P} \cdot \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) \, . \, S\left[\left(\frac{P}{\delta} - n\right) \delta u\right]$$

такимъ путемъ мы получаемъ общую формулу разложенія, годную въ обоихъ случаяхъ:

$$(\mathrm{D}_1)\qquad f(x)\equiv\sum_{n=0}^{\frac{P}{\delta}-1}[a_n\,.\,R(n\delta x)+b_n\,.\,S(n\delta x)]\quad(\text{mod. } p),$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}a_n&\equiv-\frac{\delta\Delta}{4P}\cdot\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,R(n\delta u)\\ b_n&\equiv\frac{\delta}{4P}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,S(n\delta u)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&(\text{mod. } p)\\ &0\le n\le\frac{P}{\delta}-1\end{aligned}\qquad(\mathrm{XIV})$$

Чтобы провѣрить этотъ результатъ, годный конечно лишь въ интервалѣ $0\le x\le\frac{P}{\delta}-1$ въ общемъ случаѣ непеdіодической modulo p функціи $f(x)$, возьмемъ разложеніе (D) при $\frac{P}{2\delta}=E\left(\frac{P}{2\delta}\right)$ и разсмотримъ его правую часть, называя ее $s(x)$:

$$s(x)\equiv\frac{\delta}{4P}\cdot\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,S^2(0)+$$

$$+\frac{\delta}{2P}\cdot\sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,[S(n\delta x)\,.\,S(n\delta u)-\Delta\,.\,R(n\delta x)\,.\,R(n\delta u)]+$$

$$+\frac{\delta}{4P}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,S\left(\frac{Px}{2}\right).\,S\left(\frac{Pu}{2}\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{\delta}{2P}\cdot\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\left\{S(0)+\sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1}2S[n\delta(x-u)]+S\left[\frac{P(x-u)}{2}\right]\right\}$$

т. е.

$$\frac{2P}{\delta}\,.\,s(x)\equiv\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,\sigma(x,\;u)$$

гдѣ

$$\sigma(x,\;u)\equiv S(0)+\sum_{n=1}^{E\left(\frac{P}{2\delta}\right)-1}S[n\delta(x-u)]+$$

$$+S\left[\frac{P}{2\delta}.\,\delta\left(x-u\right)\right]+\sum_{n=E\left(\frac{P}{2\delta}\right)+1}^{\frac{P}{\delta}-1}S[n\delta(x-u)]$$

такъ какъ

$$S\left[\left(\frac{P}{\delta}-n\right)\delta y\right]\equiv S(n\delta y)$$

и такимъ образомъ

$$\sigma(x,\ u)\equiv\sum_{n=0}^{\frac{P}{\delta}-1}S[n\delta(x-u)]\equiv\int_{\xi=0}^{\frac{P}{\delta}}S[\xi\delta(x-u)]$$

такъ какъ x и u лежитъ въ интервалѣ $\left[0,\ \frac{P}{\delta}-1\right]$, то $S(\delta.\overline{x-u})\equiv 2$ лишь при $x=u$, а отсюда слѣдуетъ, что

$$\begin{aligned}\sigma(u,\ x)&\equiv 0 \quad \text{для} \quad u\neq x\\ &\equiv\frac{2P}{\delta} \ \text{для} \quad u=x\end{aligned}$$

такимъ образомъ

$$\frac{2P}{\delta}s(x)\equiv f(x)\,.\,\frac{2P}{\delta}\ (\text{mod. } p) \qquad \text{q. e. d.}$$

Переходя къ случаю $E\left(\frac{P}{2\delta}\right)<\frac{P}{2\delta}$, мы получаемъ аналогичнымъ путемъ

$$s(x)\equiv\frac{\delta}{2P}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u)\,.\,\sigma(x,\ u)\quad(\text{mod. } p)$$

гдѣ

$$\begin{aligned}\sigma(u,\ x)&\equiv\int_0^{\frac{P}{\delta}}S[\xi\,.\,\delta(u-x)]\equiv 0\quad u\neq x\\ &\equiv\frac{2P}{\delta}\ u=x\end{aligned}$$

т. е.

$$s(x)\equiv f(x)\quad\text{при}\quad 0\leq x\leq\frac{P}{\delta}-1.$$

Разложенію (D_1) можно придать болѣе удобную форму: такъ какъ $p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ дѣлится нацѣло на $\frac{P}{\delta}$, то, обозначая частное $\frac{p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)}{\frac{P}{\delta}}=N$ и замѣчая, что

$$\frac{R}{S}\left[\left(\frac{P}{\delta}+n\right)\delta x\right]\equiv\frac{R}{S}\left(n\delta x\right),$$

мы получаемъ

$$f(x) \equiv \sum_{\lambda=0}^{N-1} \sum_{n=\lambda\frac{P}{\delta}}^{(\lambda+1)\frac{P}{\delta}-1} \left\{ \frac{a_n}{N} . R(n\delta x) + \frac{b_n}{N} S(n\delta x) \right\} \pmod{p.}$$

гдѣ

$$\alpha_n = \frac{a_n}{N} \equiv \frac{-P}{\delta . \left(P - \left(\frac{\varDelta}{p}\right)\right)} . \frac{\delta \varDelta}{4P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u)$$

значитъ

$$\left[p - \left(\frac{\varDelta}{p}\right)\right] . \alpha_n \equiv -\left(\frac{\varDelta}{p}\right) . \alpha_n \equiv -\frac{\varDelta}{4} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u)$$

и такимъ образомъ

$$\frac{a_n}{N} = \alpha_n \equiv \left(\frac{\varDelta}{p}\right) . \frac{\varDelta}{4} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u);$$

точно такимъ же образомъ мы получаемъ

$$\beta_n = \frac{b_n}{N} \equiv -\left(\frac{\varDelta}{p}\right) . \frac{1}{4} \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . S(n\delta u)$$

и мы имѣемъ окончательно разложеніе:

$$(\mathrm{D}_2) \left\{ \begin{aligned} & 4 . \left(\frac{\varDelta}{p}\right) . f(x) \equiv \sum_{n=0}^{P-1-\left(\frac{\varDelta}{p}\right)} [A_n . R(n\delta x) + B_n . S(n\delta x)] \pmod{p} \\ & \text{гдѣ} \\ & A_n \equiv \varDelta \int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . R(n\delta u) \\ & B_n \equiv -\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u) . S(n\delta u) \end{aligned} \right.$$

Остается лишь доказать утвержденіе, что $P - \left(\frac{\varDelta}{p}\right)$ дѣлится на $\frac{P}{\delta}$. Для формъ A), C), D) періода P дѣлимость $p - \left(\frac{\varDelta}{p}\right)$ на $\frac{P}{\delta}$ ясна безъ всякаго разбора, но случаи

$$\text{В)}\quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \quad P = 2\pi_1\delta \quad d = D(\pi,\, h) \quad \pi = d\pi_1$$

$$\text{Е)}\quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \quad P = 2q\delta$$

требуютъ таковаго.

Въ случаѣ

$$\text{В)}\quad p - \left(\frac{\Delta}{p}\right) = p - 1 = d\,.\,\pi_1\,.\,\delta$$

и при четности d дѣлимость $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ на $\frac{P}{\delta} = 2\pi_1$ ясна; допустимъ-же, что $d = 2d_1 + 1$: изъ того, что

$$S\,(p-1) = S(d\pi_1\delta) = S\left(\frac{d}{2}.P\right) \equiv 2\ ^{1)} \quad (\text{mod. } p)$$

слѣдуетъ, что при

$$d = 2d_1 + 1 \quad S\left(\frac{d}{2}P\right) \equiv S\left(\frac{P}{2}\right) \equiv 2 \quad (\text{mod. } p)$$

и такъ какъ

$$R\left(\frac{P}{2}\right) = R(\pi_1\delta) = R(h_1 q) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

всегда, то изъ предположенія $d = 2d_1 + 1$ вытекало-бы, что періодомъ является не P, а $\frac{P}{2}$, что доказываетъ на неправильность допущеннаго. Итакъ въ случаѣ В) всегда $d = 2d_1$ и $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ дѣлится слѣдовательно на $\frac{P}{\delta}$.

Въ случаѣ Е) точно также четность h обезпечиваетъ дѣлимость $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right) = p + 1 = hq$ на $\frac{P}{\delta} = 2q$, а допущеніе $h = 2h_1 + 1$ такъ какъ $S[(p+1)\delta] \equiv 2$ [2]) даетъ слѣдствіе:

$$S[(p+1)\delta] = S(hq\delta) = S\left(\frac{h}{2}.P\right) \equiv S\left(\frac{P}{2}\right) \equiv 2,$$

а

$$R\left(\frac{P}{2}\right) = R(\delta q) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

[1]) В. II. стр. 86; форм. (94).

[2]) В. II. стр. 89.

всегда и такимъ образомъ если-бы въ случаѣ E) h было нечетно, то періодомъ было-бы не P, а $\frac{P}{2}$, слѣдовательно въ случаѣ E) всегда h четно и такимъ образомъ показано, что $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ всегда дѣлится на $\frac{P}{\delta}$ нацѣло.

Въ качествѣ примѣра возьмемъ $f(x) = x$; интегрируя при $n > 0$ по частямъ, мы получаемъ

$$I_n = \int_0^{\frac{P}{\delta}} x \,.\, S(n\delta x) = \Big/_0^{\frac{P}{\delta}} x \,.\, \int S(n\delta x) - \int_0^{\frac{P}{\delta}} \left[\int^{x+1} S(n\delta x)\right]$$

ergo

$$[2 - S(n\delta)] \,.\, I_n \equiv \frac{P}{\delta} \,.\, \Big/_{x=\frac{P}{\delta}} \{S(n\delta\overline{x-1}) - S(n\delta x)\} - \int_0^{\frac{P}{\delta}} [S(n\delta x) - S(n\delta(x+1))].$$

Разлагая

$$2S(n\delta \,.\, \overline{x+1}) = S(n\delta) \,.\, S(n\delta x) + \Delta R(n\delta) \,.\, R(n\delta x)$$

мы убѣждаемся, что интегралъ въ правой части $\equiv 0$ и такимъ образомъ

$$[2 - S(n\delta)] \,.\, I_n \equiv \frac{P}{\delta} [S(-n\delta) - S(nP)] \equiv -[2 - S(n\delta)] \,.\, \frac{P}{\delta}$$

и въ разложеніи (D_1)

$$b_n \equiv \frac{\delta \,.\, I_n}{4P} \equiv -\frac{1}{4} \quad n > 0$$

$$b_0 \equiv \frac{\delta}{4P} \int_0^{\frac{P}{\delta}} x \,.\, S(0) \equiv \frac{\delta}{2P} \Big/_0^{\frac{P}{\delta}} \frac{x^{[2]}}{4} \equiv \frac{\delta}{4P} \,.\, \frac{P}{\delta} \,.\, \left(\frac{P}{\delta} - 1\right) \equiv \frac{1}{4} \,.\, \left(\frac{P}{\delta} - 1\right)$$

Далѣе

$$I'_n = \int_0^{\frac{P}{\delta}} x \,.\, R(n\delta x)$$

вычисляется тѣмъ-же путемъ, и мы получаемъ

$$I'_n \equiv -\frac{P}{\delta} \,.\, \frac{R(n\delta)}{2 - S(n\delta)},$$

а отсюда

$$a_n \equiv \frac{\Delta}{4} \,.\, \frac{R(n\delta)}{2 - S(n\delta)}$$

Такимъ образомъ окончательно мы имѣемъ:

$$\left(0 \leq x \leq \frac{P}{\delta}-1\right) \quad 4x \equiv \left(\frac{P}{\delta}-1\right).S(0)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\frac{P}{\delta}-1}\left[\frac{\Delta R(n\delta)}{2-S(n\delta)}.R(n\delta x)-S(n\delta x)\right] \pmod{p}$$

Возьмемъ напримѣръ $a=3$ $b=1$ и $p=139$

$$\Delta=a^2-4b=5 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1 \quad \delta=1 \quad \pi=138.$$

Составляя таблицу остатковъ R и S (mod. 139), мы убѣждаемся, что $q=23$ слѣдовательно $h=6$, а отсюда $d=D(\pi_1 h)=6$ и $\pi_1=23$. Такъ какъ $S(23)\equiv+2$, то $P=\omega.\pi_1.\delta=23$ т. е. $\omega=1$. И мы имѣемъ:

$$(0 \leq x \leq 22) \quad x \equiv 11+\frac{1}{4}.\sum_{n=1}^{22}\left\{\frac{5.R(n)}{2-S(n)}.R(nx)-S(nx)\right\} \pmod{139}$$

Покажемъ въ заключеніе, что выраженіе, составленное изъ квадратовъ коэффиціентовъ, сравнимо съ интеграломъ отъ квадрата функціи, что совершенно аналогично формулѣ

$$a_0^2+\sum_1^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2.dx$$

изъ теоріи тригонометрическихъ рядовъ.

Изъ формулъ

$$\left.\begin{aligned} a_n &= -\frac{\delta\Delta}{4P}.\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).R(n\delta u) \\ b_n &= \frac{\delta}{4P}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).S(n\delta u) \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIV)}$$

мы имѣемъ:

$$b_n^2-\frac{a_n^2}{\Delta}=\frac{\delta^2}{(4P)^2}\int_0^{\frac{P}{\delta}}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).f(v).[S(n\delta u).S(n\delta v)-\Delta R(n\delta u).R(n\delta v)]\equiv$$

$$\equiv\frac{\delta^2}{16.P^2}\int_0^{\frac{P}{\delta}}\int_0^{\frac{P}{\delta}} f(u).f(v).S[n\delta(u-v)] \quad 0 \leq n \leq \frac{P}{\delta}-1$$

и слѣдовательно

$$\sum_{n=1}^{\frac{P}{\delta}-1}\left(b_n^2-\frac{a_n^2}{\varDelta}\right)\equiv\frac{\delta^2}{16P^2}\cdot\int_0^{\frac{P}{\delta}}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(u).f(v).\int_{\xi=0}^{\frac{P}{\delta}}S[\xi\delta(u-v)]$$

но

$$\int_{\xi=0}^{\frac{P}{\delta}}S[\xi\delta(u-v)]\equiv 0 \quad \text{при} \quad u\neq v$$

$$\equiv\frac{2P}{\delta} \quad \text{при} \quad u=v$$

и такимъ образомъ

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}}[f(u)]^2\equiv\frac{8P}{\delta}\cdot\sum_{n=0}^{\frac{P}{\delta}-1}\left[b_n^2-\frac{a_n^2}{\varDelta}\right] \quad \text{q. e. d.} \qquad \text{(XV)}$$

Точно такимъ-же образомъ изъ разложенія (D_2) мы получимъ:

$$\int_0^{\frac{P}{\delta}}[f(u)]^2\equiv-8\left(\frac{\varDelta}{p}\right)\cdot\sum_{n=0}^{p-1-\left(\frac{\varDelta}{p}\right)}\left(B_n^2-\frac{A_n^2}{\varDelta}\right) \quad (\text{mod. } p)$$

Изъ разложенія (D_1) легко также получается формула,

$$f(x)\equiv\frac{\delta}{2P}\cdot\int_0^{\frac{P}{\delta}}\int_0^{\frac{P}{\delta}}f(v).S[\delta u(x-v)] \quad (\text{mod. } p)$$

аналогичная интегралу Фурье.

Формула (XV) въ частномъ случаѣ $f(x)=x$ принимаетъ видъ:

$$(\text{mod. } p) \quad \frac{8P}{\delta}\cdot\frac{1}{16}\left\{\left(\frac{P}{\delta}-1\right)^2+\sum_{n=1}^{\frac{P}{\delta}-1}\left(1-\frac{\varDelta R^2(n\delta)}{(2-S(n\delta))^2}\right)\right\}\equiv$$

$$\equiv\int_0^{\frac{P}{\delta}}x^2=\frac{\left(\frac{P}{\delta}-1\right)\cdot\frac{P}{\delta}\left(2\frac{P}{\delta}+1\right)}{6}$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\frac{P}{\delta}-1}\left(1-\frac{\varDelta R^2(n\delta)}{[2-S(n\delta)]^2}\right)\equiv\left(\frac{P}{\delta}-1\right)\cdot\left(\frac{P}{\delta}-4\right) \quad (\text{mod. } p)$$

что при $a=3$, $b=1$ и $p=139$ даетъ болѣе частную формулу

$$\sum_{n=1}^{22}\left(1-\frac{5.R^2(n)}{[2-S(n)]^2}\right)\equiv 1 \quad (\text{mod. } 139)$$

Москва.