О законѣ большихъ чиселъ.

С. Н. Бернштейна.

1. Различные виды закона большихъ чиселъ формулируются такимъ образомъ: *существуетъ нѣкоторая величина x, зависящая отъ числа n, обладающая свойствомъ, что вѣроятность неравенства $|x| < \varepsilon$, при произвольномаломъ ε, стремится къ достовѣрности, когда n безконечно возрастаетъ.*

Укажемъ условіе необходимое и достаточное для соблюденія этого закона. Пусть $f(x)$ будетъ какая-нибудь четная, ограниченная, возрастающая и непрерывная функція, удовлетворяющая условію, что $f(0) = 0$ (напримѣръ, $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$). *Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы вѣроятность неравенства $|x| < \varepsilon$, при произвольномъ ε, имѣла предѣломъ достовѣрность, заключается въ томъ, что* пред. Мат. ож. $f(x) = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ классическихъ разсужденій Чебышева вытекаетъ, что соблюденіе условія: пред. Мат. ож. $f(x) = 0$, влечетъ за собой, что вѣроятность неравенства $f(x) < f(\varepsilon) = \varepsilon_1$, равнозначнаго неравенству $|x| < \varepsilon$, имѣетъ предѣломъ 1. Наоборотъ, если вѣроятность неравенства $|x| < \varepsilon$ больше, чѣмъ $1 - \eta$, то

$$|\text{Мат. ож. } f(x)| < f(\varepsilon) + L\eta,$$

гдѣ L есть верхняя граница $f(x)$; а потому, если ε и η суть два произвольно малыхъ числа, то пред. Мат. ож. $f(x) = 0$.

Указанное условіе упрощается, если дано, что $|x|$ есть величина *ограниченная*; тогда условіе ограниченности функціи $f(x)$ отпадаетъ, и тѣмъ же разсужденіемъ устанавливается, что *условіе необходимое и достаточное для того, чтобы вѣроятность неравенства $|x| < \varepsilon$* (если x величина ограниченная) *имѣла предѣломъ 1, состоитъ въ томъ, что Мат. ож. x^2 имѣетъ предѣломъ 0.*

Посредствомъ столь же простыхъ соображеній можно получить удобное для практики условіе необходимое и достаточное примѣнимости теоремы Пуассона къ ряду зависимыхъ опытовъ.

2. Теорема. *Пусть p_k представляетъ вѣроятность a priori наступленія событія A_k; вѣроятность же A_k въ случаѣ наступленія A_i пусть будетъ p_k^i, а въ случаѣ ненаступленія A_i пусть вѣроятность A_k станетъ равной $p_k^{(i)}$; пусть далѣе n есть число всѣхъ испытаній, a m — число наступившихъ событій. Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы, при произвольно маломъ ε, вѣроятность неравенства*

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right|<\varepsilon$$

имѣла предѣломъ достовѣрность, когда $n\to\infty$, состоитъ въ томъ, что

$$p_iq_i\left[\frac{p_1^i+p_2^i+\ldots+p_n^i}{n}-\frac{p_1^{(i)}+p_2^{(i)}+\ldots p_n^{(i)}}{n}\right]$$

равномѣрно (т. е. при всякомъ $i<n$) *стремится къ* 0.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$I_n=\text{Мат. ож.}\left[\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right]^2.$$

Въ такомъ случаѣ

$$I_n=\frac{1}{n}\Bigg[\text{Мат. ож.}\,(x_1-p_1)\left(\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)+$$
$$+\text{Мат. ож.}\,(x_2-p_2)\left(\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)+$$
$$+\ldots+\text{Мат. ож.}\,(x_n-p_n)\left(\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)\Bigg],$$

гдѣ x_i получаетъ значеніе 1 или 0, въ зависимости отъ того, наступаетъ ли A_i или нѣтъ. Поэтому

$$\text{Мат. ож.}\,(x_i-p_i)\left(\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)=$$
$$=p_iq_i\left(\frac{p_1^i+p_2^i+\ldots+p_n^i}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)-$$
$$-p_iq_i\left(\frac{p_1^{(i)}+p_2^{(i)}+\ldots+p_n^{(i)}}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right)=$$
$$=p_iq_i\left[\frac{p_1^i+p_2^i+\ldots+p_n^i}{n}-\frac{p_1^{(i)}+p_2^{(i)}+\ldots+p_n^{(i)}}{n}\right].$$

Согласно предположенію, при всякомъ i, полученное выраженіе можетъ быть сдѣлано менѣе любого произвольно малаго числа ε, если n неограниченно возрастаетъ. Слѣдовательно,

$$I_n < \varepsilon,$$

откуда вытекаетъ достаточность высказаннаго въ теоремѣ условія.

Перейдемъ теперь къ доказательству необходимости упомянутаго условія.

Полагая для краткости

$$\frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} - \frac{p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + \ldots + p_n^{(i)}}{n} = \varepsilon_i,$$

замѣчаемъ сначала, что

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} - \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} = -q_i \varepsilon_i,$$

такъ какъ

$$p_k = p_i p_k^i + q_i p_k^{(i)}.$$

Итакъ допустимъ, что законъ большихъ чиселъ соблюденъ, т. е. вѣроятность неравенства

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \right| < \varepsilon \qquad \text{(I)}$$

равна $1 - \alpha$, гдѣ ε и α стремятся къ 0 при возрастаніи n. Въ такомъ случаѣ, послѣ наступленія A_i вѣроятность неравенства (I) остается больше, чѣмъ $1 - \dfrac{\alpha}{p_i}$. А потому, послѣ наступленія A_i,

$$\left| \text{Мат. ож.} \left(\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \right) \right| < \varepsilon + \frac{\alpha}{p_i}.$$

Но, послѣ наступленія A_i,

$$\text{Мат. ож.} \frac{m}{n} = \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n};$$

слѣдовательно,

$$\left| \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} - \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} \right| < \varepsilon + \frac{\alpha}{p_i},$$

откуда

$$|p_i q_i \varepsilon_i| = p_i q_i \left| \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} - \frac{p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + \ldots + p_n^{(i)}}{n} \right| < \varepsilon + \alpha,$$

ч. и т. д.

3. Указанное условіе примѣнимости теоремы Пуассона къ зависимымъ испытаніямъ можно видоизмѣнить, введя на мѣсто

$$\varepsilon_i = \frac{p_1^i + p_2^i + \ldots + p_n^i}{n} - \frac{p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + \ldots + p_n^{(i)}}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{p_k^i}{n} - \frac{p_k^{(i)}}{n} \right),$$

ту же сумму только для испытаній, слѣдующихъ за A_i, т. е. беря сумму

$$\varepsilon_i' = \sum_{k=i+1}^{k=n} \left(\frac{p_k^i}{n} - \frac{p_k^{(i)}}{n} \right).$$

Чтобы въ этомъ убѣдиться замѣтимъ, что

$$I_n = \frac{1}{n^2} \text{Мат. ож.} \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - p_k)^2 + \frac{2}{n^2} \text{Мат. ож.} \left[(x_1 - p_1) \sum_{k=2}^{k=n} (x_k - p_k) + \right.$$

$$\left. + \ldots + (x_{n-1} - p_{n-1}) \sum_{k=n}^{k=n} (x_n - p_n) \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} p_k q_k + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{i=n} p_i q_i \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{p_k^i - p_k^{(i)}}{n}.$$

Такимъ образомъ изъ условія

$$p_i q_i \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{p_k^i}{n} - \frac{p_k^{(i)}}{n} < \varepsilon$$

вытекаетъ, что $I_n < \frac{1}{4n} + \varepsilon$, а потому видоизмѣненное условіе достаточно для примѣнимости теоремы Пуассона.

Съ другой стороны, покажемъ необходимость видоизмѣненнаго условія. Съ этой цѣлью замѣчаемъ, что, если теорема Пуассона примѣнима, то неравенство

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \right| < \varepsilon \qquad \text{(I)}$$

имѣетъ вѣроятность $1 - \alpha$, гдѣ α и ε стремятся къ 0 съ возрастаніемъ n; вслѣдствіе этого, при всякомъ $i < n$, вѣроятность неравенства

$$\left| \frac{m - m_i}{n} - \frac{p_{i+1} + \ldots + p_n}{n} \right| < 2\varepsilon, \qquad \text{(II)}$$

гдѣ m есть число появившихся A при первыхъ i опытахъ, болѣе чѣмъ $1 - 2\alpha$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, для всякаго $n > n_0$, неравенство (I) имѣетъ вѣроятность больше, чѣмъ $1-\alpha$, и возьмемъ $n > \frac{n_0}{\varepsilon}$. Тогда, для $i \leq n_0$,

$$\left|\frac{m_i}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_i}{n}\right| < \frac{n_0}{n} < \varepsilon, \qquad \text{(III)}$$

а, для $i > n_0$, вѣроятность неравенства

$$\left|\frac{m_i}{i} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_i}{i}\right| < \varepsilon, \text{ т. е. } \left|\frac{m_i}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_i}{n}\right| < \frac{\varepsilon \, . \, i}{n} \qquad \text{(IV)}$$

болѣе, чѣмъ $1-\alpha$; поэтому вѣроятность совмѣщенія неравенства (I) съ неравенствомъ (III) больше, чѣмъ $(1-\alpha)$, а съ неравенствомъ (IV) больше, чѣмъ $1-2\alpha$. Слѣдовательно, вѣроятность (II) также болѣе, чѣмъ $1-2\alpha$; а потому, подобно предыдущему, убѣждаемся въ необходимости условія, чтобы

$$p_i q_i \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{p_k^i - p_k^{(i)}}{n}$$

равномѣрно стремилось къ 0.

4. Примѣнимъ, напримѣръ, послѣдній результатъ къ совокупности испытаній *связанныхъ въ цѣпь*. Пользуясь вычисленіями А. А. Маркова[1]), найдемъ

$$p_i q_i \varepsilon_i' = p_i q_i \left[\frac{\delta_{i+1} + \delta_{i+1}\delta_{i+2} + \ldots + \delta_{i+1}\delta_{i+2} \ldots \delta_n}{n}\right],$$

гдѣ δ_{h+1} есть разность между вѣроятностями A_{h+1} при предположеніи, что A_h произошло, и при предположеніи, что A_h не произошло (т. е. $\delta_{h+1} = p_{h+1}^h - p_{h+1}^{(h)}$).

Такимъ образомъ для примѣнимости закона большихъ чиселъ къ испытаніямъ связаннымъ въ цѣпь *необходимо и достаточно, чтобы* $p_i q_i \varepsilon_i'$ *равномѣрно стремилось къ* 0. Отсюда немедленно получаемъ достаточное условіе А. А. Маркова $|\delta_i| < \lambda < 1$.

Легко видѣть, что вообще *достаточно*, чтобы произведеніе

$$\delta_{i+1}\delta_{i+2} \ldots \delta_{i+n}$$

равномѣрно стремилось къ 0 *при возрастаніи* n, *когда* $i < n$. *Это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, когда* $|\delta_k| < 1 - \frac{1}{k^\alpha}$, *гдѣ* $\alpha < 1$. Изъ слу-

[1]) Изслѣдованіе общаго случая испытаній связанныхъ въ цѣпь. Записки Имп. Акад. Наукъ. т. XXV. 1910 г.

чаевъ, когда послѣднее условіе нарушено, но $p_i q_i \varepsilon_i$ все же стремится къ 0, а потому теорема Пуассона примѣнима, отмѣтимъ два случая: 1) если среди чиселъ δ_k *періодически* встрѣчаются отрицательныя числа; 2) если $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{p_k q_k}{n}$ стремится [1]) къ 0, при $n \to \infty$. Напротивъ, *законъ большихъ чиселъ непримѣнимъ, если всѣ δ положительны и произведеніе $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ не стремится къ 0; это имѣетъ мѣсто, въ частности, когда $\delta_k > 1 - \frac{1}{k^\alpha}$, гдѣ $\alpha > 1$.*

Замѣтимъ, что въ случаѣ, когда $\delta_k = 1 - \frac{1}{k}$, примѣнимость теоремы Пуассона зависитъ отъ того, будетъ-ли $p_k q_k$ стремиться къ 0. Дѣйствительно, если $p_i q_i$ не стремится къ 0 (напримѣръ, если $p_i = \frac{1}{2}$), то

$$p_i q_i \varepsilon_i' = \frac{p_i q_i}{n} \left[\frac{i}{i+1} + \frac{i}{i+2} + \ldots + \frac{i}{n} \right]$$

съ возрастаніемъ n стремится къ 0, но *не равномѣрно*, т. к. при всякомъ n можно найти значеніе i, для котораго это выраженіе не стремится къ 0; напротивъ, оно стремится къ 0 *равномѣрно*, если $p_i q_i \to 0$; слѣдовательно, теорема Пуассона примѣнима только въ послѣднемъ случаѣ.

[1]) Поэтому, въ частности, законъ большихъ чиселъ примѣнимъ всегда, когда $\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$ стремится къ 0 (при этомъ нѣтъ даже надобности ограничиваться предположеніемъ, что испытанія связаны въ цѣпь).