О движенiи тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости.

(СТАТЬЯ ВТОРАЯ).

В. А. Стеклова.

Въ предыдущей статьѣ я указалъ, что если поверхность измѣненныхъ массъ въ твердомъ тѣлѣ есть шаръ, то возможно движенiе, при которомъ

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0\,,$$

а ξ_i ($i = 1\,,\ 2\,,\ 3$) опредѣляются при помощи уравненiй

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt_1} &= \xi_2\frac{\partial T_1}{\partial\xi_3} - \xi_3\frac{\partial T_1}{\partial\xi_2}\\ \frac{d\xi_2}{dt_1} &= \xi_3\frac{\partial T_1}{\partial\xi_1} - \xi_1\frac{\partial T_1}{\partial\xi_3}\\ \frac{d\xi_3}{dt_1} &= \xi_1\frac{\partial T_1}{\partial\xi_2} - \xi_2\frac{\partial T_1}{\partial\xi_1}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

интегралы которыхъ суть

$$\left.\begin{aligned}\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} + \xi_3^{\,2} = m^2\,, &\quad (\alpha)\\ T_1 = H\,, &\quad (\beta)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}2T_1 = a_{14}\xi_1^{\,2} + a_{25}\xi_2^{\,2} + a_{36}\xi_3^{\,2} + 2a_{24}\xi_1\xi_2 + 2a_{35}\xi_2\xi_3 + 2a_{16}\xi_1\xi_3\\ tdt = dt_1\end{aligned}\right\} \ (3)$$

и

Для нетяжелаго тѣла возможно подобное же движенiе, при которомъ всѣ y_i суть нули, а x_i опредѣлятся въ функцiи t при помощи уравненій (1), если въ нихъ вмѣсто ξ_i поставимъ x_i, и t_1 замѣнимъ черезъ t (время).

При этомъ можно дать чисто геометрическое объясненіе этого движенія. Въ самомъ дѣлѣ, называя черезъ Ω угловую скорость движенія, и черезъ p, q, r, по прежнему, проекціи ея на оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, по предыдущему (преобразованіе Клебша), имѣемъ

$$p=\frac{\partial T}{\partial y_1},\ q=\frac{\partial T}{\partial y_2},\ r=\frac{\partial T}{\partial y_3},$$

гдѣ T живая сила твердаго тѣла. Разумѣя теперь подъ ξ_i проекціи на координатныя оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, вектора производящихъ движеніе импульсовъ (величины x_i въ прежнемъ обозначеніи), и подъ t_1 время, будемъ пользоваться уравненіями (1), (2), (3). По предыдущему для разсматриваемаго движенія

$$p=\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1},\ q=\frac{\partial T_1}{\partial \xi_2},\ r=\frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} \quad \ldots\ldots (4)$$

Уравненіе (β) (2) при этомъ даетъ (смот. предыдущую статью)

$$\Omega\cos(m\Omega)=H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Какъ было указано и раньше, уравненія (2), (4) и (5), а также соотношенія

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3&=0\\ \beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3&=0\\ \gamma_1\xi_1+\gamma_2\xi_2+\gamma_3\xi_3&=m\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

приводятъ къ слѣдующимъ положеніямъ:

1. Векторъ Ξ (опредѣляемый проэкціями ξ_1, ξ_2, ξ_3) сохраняетъ постоянную величину при движеніи тѣла (первое изъ уравненій (2)).
2. Векторъ этотъ сохраняетъ неизмѣнно свое направленіе въ пространствѣ, совпадая съ направленіемъ оси ζ'овъ.
3. Конецъ вектора Ξ лежитъ одновременно на шарѣ радіуса m (величина вектора) и на нѣкоторой поверхности втораго порядка (уравненія (2)), т. е. лежитъ на линіи пересѣченія этихъ поверхностей.
4. Угловая скорость въ любой моментъ времени направлена по нормали къ поверхности $T_1=H$ въ точкѣ пересѣченія ея съ векторомъ Ξ.
5. Проекція угловой скорости Ω на направленіе вектора Ξ сохраняетъ постоянную величину.

Таковы геометрическія свойства разсматриваемаго движенія.

Отсюда прежде всего заключаемъ, что движеніе совершается такимъ образомъ, что точки линіи пересѣченія поверхностей (2), линіи (A), послѣдовательно проходятъ черезъ точку $\zeta = m$ оси ζ'овъ *). Поверхность (β) (2), вообще говоря, можетъ быть эллипсоидомъ или гиперболоидомъ.

Кривая (A) есть нѣкоторая сферическая кривая. Если поверхность (β) (2) есть эллипсоидъ, то эти кривыя охватываютъ меньшую или большую ось этого эллипсоида. Въ частности онѣ могутъ обращаться въ точки пересѣченія этихъ осей съ эллипсоидомъ, и въ этомъ случаѣ, очевидно изъ предыдущаго, получится вращательное движеніе вокругъ оси неизмѣннаго направленія. Кривая эта можетъ представлять также два круговыхъ сѣченія эллипсоида, пересѣкающихся по его средней оси. Получится также вращательное движеніе вокругъ оси неизмѣннаго направленія. Но въ первыхъ двухъ случаяхъ движеніе будетъ устойчиво, въ послѣднемъ неустойчиво, ибо круговыя сѣченія при сколь угодно маломъ возмущеніи (состоящемъ въ измѣненіи произвольныхъ постоянныхъ) обращаются въ кривыя, охватывающія или большую, или меньшую ось эллипсоида.

Въ случаѣ если поверхность (β) (2) — однополый гиперболоидъ, вышеупомянутыя кривыя (A) будетъ охватывать или меньшую изъ дѣйствительныхъ осей (меньшую ось горловаго эллипса), или мнимую ось, и въ частномъ случаѣ могутъ обратиться или въ точку пересѣченія первой оси съ поверхностью или въ круговыя сѣченія, пересѣкающіяся по большей оси горловаго эллипса. Въ этомъ случаѣ возможно вращательное движеніе вокругъ двухъ дѣйствительныхъ осей, причемъ движеніе вокругъ большей оси горловаго эллипса неустойчиво.

Если поверхность (β) (2) — двуполый гиперболоидъ, кривая (A) можетъ охватывать только дѣйствительную ось поверхности.

Въ частности она можетъ обратиться въ вершины поверхности, причемъ получится вращательное движеніе вокругъ оси неизмѣннаго направленія. Движеніе это будетъ устойчиво.

Все предыдущее относится къ движенію нетяжелаго тѣла.

Допуская теперь, что на тѣло дѣйствуетъ сила тяжести, по предыдущему имѣемъ, что поверхности (2) изъ неизмѣняемыхъ, сохраняя прежнее механическое значеніе, обращаются въ деформирующіяся такимъ образомъ, что поверхность β (2) измѣняется подобно себѣ пропорціонально времени, и радіусъ шара такимъ же образомъ возрастаетъ со временемъ. Предыдущее отчасти будетъ приложимо и къ разсматриваемому случаю. Именно, точки линіи пересѣченія вышеупомянутымъ образомъ деформирующихся поверхностей будутъ послѣдовательно проходить черезъ неизмѣнное направленіе вектора Ξ (величина котораго въ данномъ случаѣ возрастаетъ пропорціонально времени), и потому также возможны вращательныя движенія вокругъ осей неизмѣннаго направ-

---

*) Это одно изъ условій движенія, конечно, не опредѣляющее самаго движенія.

ленія, тѣхъ-же самыхъ, что и въ случаѣ нетяжелаго тѣла. Но всѣ эти движенія неустойчивы, какъ было замѣчено раньше (см. предыдущую статью).

Хотя для осей, соотвѣтствующихъ осямъ устойчиваго движенія нетяжелаго тѣла, направленіе угловой скорости послѣ возмущенія во все время послѣдующаго движенія не будетъ достаточно отклоняться отъ первоначальнаго направленія, но величина угловой скорости будетъ безпредѣльно возрастать съ теченіемъ времени и въ этомъ смыслѣ движеніе будетъ неустойчиво. При вращеніи вокругъ осей, соотвѣтствующихъ осямъ неустойчиваго вращенія нетяжелаго тѣла, эти движенія, конечно, и подавно неустойчивы.

Покажемъ теперь, что движенія эти для нетяжелаго тѣла могутъ быть воспроизведены катаніемъ нѣкоторой поверхности второго порядка съ центромъ въ началѣ координатъ по нѣкоторой неподвижной плоскости.

Назовемъ черезъ $\triangle_{ik}$ миноръ симметрическаго опредѣлителя

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{14}, & a_{24}, & a_{16} \\ a_{24}, & a_{25}, & a_{35} \\ a_{16}, & a_{35}, & a_{36} \end{vmatrix},$$

соотвѣтствующій i столбцу и k строкѣ, причемъ, очевидно, $\triangle_{ik} = \triangle_{ki}$

Рѣшая систему (4) относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\triangle_{11}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{12}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{13}}{\triangle} r \\ \xi_2 &= \frac{\triangle_{21}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{22}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} r \\ \xi_3 &= \frac{\triangle_{31}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{32}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{33}}{\triangle} r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Подставляя эти выраженія ξ_i въ уравненіе (α) (2), находимъ

$$(\triangle_{11}p + \triangle_{12}q + \triangle_{13}r)^2 + (\triangle_{21}p + \triangle_{22}q + \triangle_{23}r)^2 + (\triangle_{31}p + \triangle_{32}q + \triangle_{33}r)^2 = \triangle^2 m^2 \quad (8)$$

уравненіе эллипсоида, если будемъ разсматривать p, q, r какъ координаты нѣкоторой точки.

Подставивъ ξ_i, выраженныя черезъ p, q, r въ уравненіе (β) (2), имѣемъ

$$2T_1 = p\left(\frac{\partial T_1}{\partial p}\right) + q\left(\frac{\partial T_1}{\partial q}\right) + r\left(\frac{\partial T_1}{\partial r}\right),$$

гдѣ скобки означаютъ, что въ T_1 вмѣсто ξ_i занесены ихъ выраженія черезъ p, q, r. Отсюда

$$2T = p(\Delta_{11}p + \Delta_{12}q + \Delta_{13}r) + q(\Delta_{21}p + \Delta_{22}q + \Delta_{23}r) + r(\Delta_{31}p + \Delta_{32}q + \Delta_{33}r) = H_1\Delta \quad (9)$$

гдѣ H_1 постоянная.

Разсмотримъ теперь поверхность втораго порядка.

$$\Delta_{11}x^2 + \Delta_{22}y^2 + \Delta_{33}z^2 + 2\Delta_{12}xy + 2\Delta_{13}xz + 2\Delta_{23}yz = k, \quad (10)$$

разумѣя подъ k нѣкоторую постоянную.

Несомнѣнно прежде всего, что радіусъ векторъ этой поверхности, совпадающій по направленію съ направленіемъ угловой скорости, по величинѣ пропорціоналенъ ей.

Координаты конца этого радіуса будутъ

$$x_1 = \frac{r_1}{\Omega}p, \quad y = \frac{r_1}{\Omega}q, \quad z = \frac{r_1}{\Omega}r,$$

гдѣ r_1 длина радіуса, а потому

$$r_1{}^2 = \frac{k\Omega^2}{H_1\Delta} \text{ или } r_1 = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{H_1\Delta}}\Omega, \quad \ldots\ldots (11)$$

откуда и слѣдуетъ вышесказанное.

Не трудно далѣе видѣть при помощи уравненія (9), что плоскость касательная къ поверхности (10) въ точкѣ пересѣченія ея съ угловой скоростью перпендикулярна къ вектору Ξ. Доказательство совершенно тоже, конечно, что и для эллипсоида Пуансо.

Такимъ образомъ находимъ, что косинусы угловъ перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на плоскость касательную къ поверхности (10) въ точкѣ пересѣченія ея съ направленіемъ угловой скорости, съ осями координатъ, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, будутъ соотвѣтственно

$$\cos(Px) = \frac{\xi_1}{m}, \quad \cos(Py) = \frac{\xi_2}{m}, \quad \cos(Pz) = \frac{\xi_3}{m},$$

откуда и слѣдуетъ вышесказанное (P обозначаетъ направленіе перпендикуляра). Разстояніе-же h этой плоскости отъ начала координатъ (длина перпендикуляра къ ней) будетъ

$$h = k\frac{H}{m} \; *).$$

---

*) Поверхности β (2) и (10), изъ которыхъ вторая имѣетъ коэффиціентами миноры дискриминанта первой, могутъ быть названы взаимными. Онѣ обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что радіусъ векторъ одной въ какой-либо ея точкѣ параллеленъ нормали ко второй въ точкѣ пересѣченія ея съ радіусомъ векторомъ, параллельнымъ нормали къ первой въ первой точкѣ.

А такъ какъ векторъ Ξ не измѣняетъ своего направленія въ пространствѣ (и своей величины), то плоскость эта неподвижна въ пространствѣ. Такъ какъ поверхность (10) всегда касается этой плоскости въ точкѣ пересѣченія ея съ угловой скоростью, то движеніе тѣла можетъ быть воспроизведено катаніемъ этой поверхности безъ скольженія по вышеупомянутой плоскости.

Полодію этой поверхности можно получить на основаніи вышеприведенныхъ положеній. Проводя въ точкахъ кривой (A) непрерывный рядъ плоскостей, касательныхъ къ поверхности (β) (2), и опуская послѣдовательно перпендикуляры на эти плоскости изъ начала координатъ (центра поверхности), получимъ коническую поверхность, представляющую аксоидъ (C) мгновенныхъ осей. Линія пересѣченія этого конуса съ поверхностью (10) и дастъ полодію. Опредѣливъ эрполодію по методу Пуансо, найдемъ неподвижный аксоидъ мгновенныхъ осей (D). Катаніемъ конуса (C) по конусу (D) также, какъ извѣстно, опредѣлится движеніе твердаго тѣла.

Предыдущія разсужденія, понятно, относятся къ движенію нетяжелаго твердаго тѣла въ жидкости. Если же на тѣло дѣйствуетъ сила тяжести, то, по предыдущему, поверхность (10) обращается въ деформирующуюся подобно самой себѣ, а плоскость касательная къ ней въ точкѣ пересѣченія ея съ мгновенной осью перемѣщается равномѣрно по оси ζ'овъ, оставаясь перпендикулярной къ ней, и движеніе воспроизведется катаніемъ вышеупомянутой поверхности по этой плоскости; угловая скорость при этомъ будетъ безпредѣльно возрастать съ теченіемъ времени. Отсюда понятно замѣчаніе, сдѣланное въ концѣ предыдущей статьи. Промежутки времени между повтореніями движенія будутъ убывать только въ силу того, что вращательная скорость безпредѣльно возрастаетъ.

Поверхность (10) въ разсматриваемомъ случаѣ можетъ быть не только эллипсоидомъ, но какою угодно центральною поверхностью второго порядка. Получается обобщенный случай движенія Пуансо, (который разсматривалъ только катаніе эллипсоида по неподвижной плоскости), разсмотрѣнный, между прочимъ, въ примѣчаніяхъ Darboux къ механикѣ Despeyrous (Despeyrous. Cours de Michanique. Note par Darboux. p. 494 etc).

Предыдущія сужденія могутъ быть основаны на одномъ общемъ свойствѣ двухъ поверхностей втораго порядка

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = k \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

и

$$\triangle_{11}x^2 + \triangle_{22}y^2 + \triangle_{33}z^2 + 2\triangle_{12}xy + 2\triangle_{13}xz + 2\triangle_{23}yz = h \cdot \; . \; (2)$$

Коэффиціенты второй поверхности суть миноры дискриминанта коэффиціентовъ функціи, представляющей лѣвую часть уравненія (1), т. е. миноры опредѣлителя

$$\triangle = \begin{vmatrix} a, & d, & e \\ d, & b, & f \\ e, & f, & c \end{vmatrix}$$

Причемъ $\triangle_{ik}$ миноръ i'аго столбца и k'ой строки и $\triangle_{ik} = \triangle_{ki}$ (очевидно). Возьмемъ какую либо точку (x, y, z) поверхности (1). Назвавъ ея первый дифференціальный параметръ въ этой точкѣ черезъ $\triangle_k$, найдемъ слѣдующія соотношенія для cosinus'овъ угловъ нормали къ ней въ этой же точкѣ, направленіе которой обозначимъ черезъ N_k

$$\left.\begin{aligned} \triangle_k \cos(N_k x) &= ax + dy + ez, \\ \triangle_k \cos(N_k y) &= dx + by + fz, \\ \triangle_k \cos(N_k z) &= ex + fy + cz. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Отложимъ отъ начала координатъ векторъ $\triangle_k$ по направленію нормали къ поверхности (1). Называя его проекціи на координатныя оси черезъ p, q. r, имѣемъ:

$$\triangle_k \cos(N_k x) = p = ax + dy + ez,$$
$$\triangle_k \cos(N_k y) = q = dx + by + fz,$$
$$\triangle_k \cos(N_k z) = r = ex + fy + cz.$$

Рѣшая эту систему относительно x, y, z, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\triangle_{11}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{12}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{13}}{\triangle} r, \\ y &= \frac{\triangle_{12}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{22}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} r, \\ z &= \frac{\triangle_{13}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{33}}{\triangle} r, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

или, называя черезъ r_k радіусъ векторъ поверхности (1) въ точкѣ x, y, z, получаемъ

$$\left.\begin{aligned} r_k \cos(r_k x) &= \frac{\triangle_{11}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{12}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{13}}{\triangle} r, \\ r_k \cos(r_k y) &= \frac{\triangle_{12}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{22}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} r, \\ r_k \cos(r_k z) &= \frac{\triangle_{13}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{33}}{\triangle} r. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

Называя далѣе черезъ $\triangle_h$ первый дифференціальный параметръ поверхности (2), имѣемъ для опредѣленія cosinus'овъ угловъ нормали къ ней въ какой либо точкѣ (x, y, z):

$$\left.\begin{aligned}\triangle_h\cos(N_hx) &= \triangle_{11}x + \triangle_{12}y + \triangle_{13}z\,,\\ \triangle_h\cos(N_hy) &= \triangle_{12}x + \triangle_{22}y + \triangle_{23}z\,,\\ \triangle_h\cos(N_hz) &= \triangle_{13}x + \triangle_{23}y + \triangle_{33}z\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

гдѣ N_h обозначаетъ направленіе нормали.

Примѣнимъ эти формулы къ точкѣ пересѣченія поверхности (2) съ векторомъ $\triangle_k$. Координаты этой точки опредѣлятся изъ пропорціи

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{r_h}{\triangle_k}\,,$$

гдѣ r_h радіусъ векторъ поверхности (2) въ точкѣ пересѣченія ея съ векторомъ $\triangle_k$, такъ что

$$x = \frac{r_h}{\triangle_k}\,p\,, \qquad y = \frac{r_h}{\triangle_k}\,q\,, \qquad z = \frac{r_h}{\triangle_k}\,r\,.$$

Вслѣдствіе этого выраженія (6) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned}\triangle_h\cos(N_hx) &= \frac{r_h}{\triangle_k}(\triangle_{11}p + \triangle_{12}q + \triangle_{13}r),\\ \triangle_h\cos(N_hy) &= \frac{r_h}{\triangle_k}(\triangle_{12}p + \triangle_{22}q + \triangle_{23}r),\\ \triangle_h\cos(N_hz) &= \frac{r_h}{\triangle_k}(\triangle_{12}p + \triangle_{23}q + \triangle_{33}r).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(7)$$

Сравнивая выраженія (7) съ (5), находимъ

$$r_k\triangle\cos(r_kx) = \frac{\triangle_h\triangle_k}{r_h}\cos(N_hx)\,,$$

$$r_k\triangle\cos(r_ky) = \frac{\triangle_h\triangle_k}{r_h}\cos(N_hy)\,,$$

$$r_k\triangle\cos(r_kz) = \frac{\triangle_h\triangle_k}{r_h}\cos(N_hz)\,,$$

а отсюда

$$\frac{\cos(r_k x)}{\cos(N_h x)} = \frac{\cos(r_k y)}{\cos(N_h y)} = \frac{\cos(r_k z)}{\cos(N_h z)} = \frac{\triangle_h \triangle_k}{r_k . r_h . \triangle} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Причемъ $\dfrac{\triangle_h \triangle_k}{r_k . r_h . \triangle} = 1$.

Соотношенія (8) показываютъ, что *поверхности (1) и (2), которыя могутъ быть названы взаимными, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что радіусъ векторъ одной въ какой-либо ея точкѣ параллеленъ нормали ко второй въ точкѣ пересѣченія ея съ ея радіусомъ векторомъ, параллельнымъ нормали къ первой въ первой точкѣ.*

Если при движеніи послѣдовательныя точки пересѣченія поверхности (1) со сферой радіуса $r_k = \mathrm{const}$ проходятъ черезъ неизмѣнное направленіе этого радіуса въ пространствѣ, то направленіе касательной плоскости въ точкѣ пересѣченія поверхности (2) съ направленіемъ угловой скорости движенія остается неизмѣннымъ въ пространствѣ. Такъ какъ при этомъ

$$r_h \cos(\Omega \Xi) = \mathrm{const},$$

(ибо направленіе угловой скорости совпадаетъ съ направленіемъ r_h) и по предыдущему

$$\Omega \cos(\Omega \Xi) = \mathrm{const},$$

то r_h пропорціоналенъ угловой скорости движенія и, слѣдовательно, движеніе можетъ быть воспроизведено катаніемъ поверхности (2) по вышеупомянутой неподвижной плоскости для нетяжелаго тѣла.