

## Объ устойчивости движенія въ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ.

А. М. Ляпунова.

Примѣры рѣшенія тѣхъ вопросовъ объ устойчивости движенія, въ которыхъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія въ первомъ приближеніи суть линейныя съ *перемѣнными* коэффициентами, до настоящаго времени еще на столько немногочисленны, что всякій примѣръ этого рода, по моему мнѣнію, представляетъ нѣкоторый интересъ.

Предлагаемое изслѣдованіе представляетъ попытку рѣшенія такого вопроса для одного извѣстнаго частнаго случая задачи о трехъ тѣлахъ.

Еще Лапласомъ было замѣчено, что задача о трехъ тѣлахъ, при произвольномъ законѣ притяженія, допускаетъ частное рѣшеніе, въ которомъ притягивающіяся матерьяльныя точки всегда остаются въ вершинахъ равносторонняго треугольника, плоскость котораго сохраняетъ перпендикулярность къ неизмѣнному направленію въ пространствѣ.

Въ числѣ движеній этого рода находятся между прочимъ такія, въ которыхъ упомянутый треугольникъ остается неизмѣняемымъ. Эти движенія я называю *постоянными*.

Вопросъ объ устойчивости постоянныхъ движеній приводится (въ первомъ приближеніи) къ интегрированію системы линейныхъ уравненій съ постоянными коэффициентами, и для притяженія, пропорціональнаго какой-либо степени разстоянія, былъ рѣшенъ Routh'омъ \*). Предполагая возмущенія такими, вслѣдствіе которыхъ движеніе плоскости треугольника не нарушается, Routh пришелъ къ слѣдующему результату:

Если притяженіе пропорціонально произведенію изъ массъ и обратно пропорціонально  $N$ -ой степени разстоянія, то при  $N > 3$  движеніе

\*) Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. VI. 1875. Менѣе подробное рѣшеніе той-же задачи можно найти въ сочиненіи Routh'a: „Dynamik of a system of rigid bodies“. Part II. 1884.

всегда неустойчиво. Если-же  $N < 3$ , и  $M, m, m'$  суть массы трех матерьяльныхъ точекъ, то оно устойчиво, когда выполнено условіе

$$\frac{(M + m + m')^2}{Mm + Mm' + mm'} > 3 \left( \frac{1 + N}{3 - N} \right)^2.$$

Изъ послѣдняго слѣдуетъ, что при  $N < 1$  движеніе всегда устойчиво.

Здѣсь признакомъ устойчивости считается то обстоятельство, чтобы послѣ бесконечно-малыхъ возмущеній стороны треугольника въ каждый моментъ послѣдующаго движенія бесконечно-мало отличались отъ той неизмѣнной длины, которую онѣ сохраняли въ невозмущенномъ движеніи.

Если-же удержать, какъ признакъ устойчивости, только то требованіе, чтобы послѣ бесконечно-малыхъ возмущеній треугольникъ во все время движенія бесконечно-мало отличался отъ равносторонняго (т. е. чтобы углы его бесконечно-мало отличались отъ  $\frac{\pi}{3}$ ), то можетъ быть поставленъ вопросъ и объ устойчивости непостоянныхъ движеній разсматриваемаго рода.

Въ особенности интересно было-бы рѣшить этотъ вопросъ для *движеній періодическихъ*, т. е. тѣхъ, въ которыхъ стороны треугольника съ теченіемъ времени періодически измѣняются между извѣстными предѣлами.

Въ предлагаемомъ изслѣдованіи показывается, къ чему приводится рѣшеніе этого вопроса, если при интегрированіи дифференціальнаго уравненія возмущеннаго движенія ограничиться однимъ первымъ приближеніемъ. Такое ограниченіе, конечно, равносильно замѣнѣ разсматриваемой задачи нѣкоторою другою, простѣйшею.

Это изслѣдованіе состоитъ изъ трехъ главъ. Первая содержитъ выводъ дифференціальнаго уравненія возмущеннаго движенія и нѣкоторыя замѣчанія о ихъ интегрированіи. Во второй рѣшеніе вопроса объ устойчивости приводится къ опредѣленію двухъ постоянныхъ. Въ третьей излагаются два способа для приближеннаго вычисленія этихъ постоянныхъ; и здѣсь-же рѣшаются нѣкоторые вопросы объ устойчивости. Перечисленіе полученныхъ при этомъ результатовъ читатель найдетъ въ концѣ всего изслѣдованія.

Законъ притяженія я предполагаю произвольнымъ, подчиняя функцію разстоянія, которою выражается притяженіе, только нѣкоторымъ условіямъ общаго характера.

Также и возмущенія я оставляю совершенно произвольными. Изъ полученныхъ мною уравненій видно, что ограниченіе, которое дѣлаетъ въ этомъ отношеніи Routh, по крайней мѣрѣ въ первомъ приближеніи, не имѣетъ существеннаго значенія.

I.

1. Точкою отправленія намъ будутъ служить дифференціальныя уравненія движенія задачи о трехъ тѣлахъ въ особой формѣ, подобной той, которою пользуется Routh.

Пусть  $M$ ,  $m$  и  $m'$  суть наши матерьяльныя точки. Массы ихъ будемъ означать тѣми-же буквами.

Пусть  $r$ ,  $r'$  и  $R$  суть разстоянія  $Mm$ ,  $Mm'$  и  $mm'$ , и  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi'$  — углы треугольника соотвѣтственно при точкахъ:  $M$ ,  $m$  и  $m'$ .

Разсматриваемъ неизмѣняемую систему, опредѣляемую точкою  $M$ , направлениемъ  $Mm$  и плоскостью треугольника  $Mmm'$ . Угловую скорость этой системы опредѣляемъ ея проэкціями:  $\omega_1$  — на направление  $Mm$ ,  $\omega_2$  — на направление перпендикуляра къ  $Mm$  въ плоскости  $Mmm'$ , составляющее острый уголъ съ направлениемъ  $Mm'$ , и  $\omega_3$  — на направление перпендикуляра къ плоскости  $Mmm'$ .

Величины  $r$ ,  $r'$ ,  $\psi$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  будутъ неизвѣстными функціями времени  $t$  въ разсматриваемой задачѣ, для которыхъ составлены ниже дифференціальныя уравненія. Первые три изъ этихъ уравненій получаются изъ разсмотрѣнія относительнаго движенія точки  $m$  по отношенію къ только-что упомянутой неизмѣняемой системѣ, а послѣднія три — изъ разсмотрѣнія относительнаго движенія точки  $m'$  по отношенію къ неизмѣняемой системѣ, опредѣляемой точкою  $M$ , направлениемъ  $Mm'$  и плоскостью  $Mmm'$ .

Если взаимное притяженіе всякихъ двухъ массъ  $\mu$  и  $\mu'$ , находящихся одна отъ другой въ разстояніи  $r$ , выражается формулой  $\mu\mu'f(r)$ , то уравненія эти будутъ слѣдующаго вида:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^2r}{dt^2} - r(\omega_2^2 + \omega_3^2) + (M + m)f(r) + \\ & + m'f(r') \cos \psi + m'f(R) \cos \varphi = 0, \\ & \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\omega_3) + r\omega_1\omega_2 + m'f(r') \sin \psi - m'f(R) \sin \varphi = 0, \\ & \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\omega_2) - r\omega_1\omega_3 = 0, \\ & \frac{d^2r'}{dt^2} - r'(\omega'_2{}^2 + \omega'_3{}^2) + (M + m')f(r') + \\ & + mf(r) \cos \psi + mf(R) \cos \varphi' = 0, \\ & \frac{1}{r'} \frac{d}{dt}(r'^2\omega'_3) + r'\omega'_1\omega'_2 + mf(R) \sin \varphi' - mf(r) \sin \psi = 0, \\ & \frac{1}{r'} \frac{d}{dt}(r'^2\omega'_2) - r'\omega'_1\omega'_3 = 0, \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

гдѣ

$$\omega'_1 = \omega_1 \cos \psi + \omega_2 \sin \psi ,$$

$$\omega'_2 = -\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi ,$$

$$\omega'_3 = \omega_3 + \frac{d\psi}{dt} ,$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi} ,$$

$$\sin \varphi = \frac{r'}{R} \sin \psi , \quad \sin \varphi' = \frac{r}{R} \sin \psi .$$

Этимъ уравненіямъ мы можемъ удовлетворить, полагая

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \psi = \frac{\pi}{3}, \quad r = r' = \rho, \quad \omega_3 = \omega ,$$

и подчиняя  $\rho$  и  $\omega$  уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \omega^2 + (M + m + m') f(\rho) &= 0, \\ \rho^2 \omega &= C, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ  $C$  постоянная произвольная.

Получаемое такимъ образомъ движеніе будемъ называть *Лапласовымъ*.

Вмѣсто времени  $t$  примемъ за независимую переменную полярный уголъ  $\vartheta$ , опредѣляемый уравненіемъ:

$$\omega dt = C \frac{dt}{\rho^2} = d\vartheta ,$$

и положимъ

$$\frac{M + m + m'}{C^2} = g .$$

Тогда первое изъ уравненій (2) обратится въ слѣдующее

$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\rho} - g f(\rho) \rho^2 = 0 , \quad \dots \dots \dots (3)$$

откуда найдемъ:

$$d\vartheta = \pm \frac{d \frac{1}{\rho}}{\sqrt{h - \frac{1}{\rho^2} - 2g \int f(\rho) d\rho}} \dots \dots \dots (4)$$

Здѣсь  $h$  постоянная произвольная.

Постоянныя  $g$  и  $h$  характеризуютъ Лапласово движеніе.

Предположимъ функцію  $f(\varrho)$  и эти постоянныя такими, чтобы уравненіе

$$h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g \int f(\varrho) d\varrho = 0,$$

имѣло въ числѣ другихъ два *простыхъ* положительныхъ корня  $\varrho_0$  и  $\varrho_1 > \varrho_0$ , и чтобы для  $\varrho_0 < \varrho < \varrho_1$  постоянно было

$$h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g \int f(\varrho) d\varrho > 0.$$

При этомъ, если начальное значеніе  $\varrho$  заключается между предѣлами  $\varrho_0$  и  $\varrho_1$ , то получается періодическое движеніе разсматриваемаго рода, въ которомъ  $\varrho$  будетъ періодическою функціей  $\vartheta$  съ періодомъ:

$$\Omega = 2 \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{h\varrho^2 - 1 - 2g\varrho^2 \int f(\varrho) d\varrho}} \dots \dots \dots (5)$$

Въ постоянныхъ Лапласовыхъ движеніяхъ постоянныя величины  $\varrho$  и  $\omega$  связаны уравненіемъ:

$$(M + m + m') f(\varrho) = \varrho \omega^2.$$

При томъ

$$g\varrho^3 f(\varrho) = 1 \dots \dots \dots (6)$$

Разсматривая одно изъ Лапласовыхъ движеній, какъ невозмущенное, выведемъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія, ограничиваясь первымъ приближеніемъ.

2. Полагаемъ:

$$r = \varrho(1 + \xi), \quad r' = \varrho(1 + \xi + x),$$

$$\psi = \frac{\pi}{3} + y, \quad \omega_3 = \omega(1 + \eta),$$

и разсматриваемъ величины  $x, y, \xi, \eta, \omega_1, \omega_2$  и ихъ производныя по  $t$ , какъ безконечно-малыя одного и того-же порядка.

При этомъ, удерживая въ разложеніяхъ только члены не выше перваго порядка, найдемъ:

$$R = \rho \left( 1 + \xi + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right),$$

$$\cos \psi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad \sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}y,$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y,$$

$$\cos \varphi' = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y, \quad \sin \varphi' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y,$$

$$\omega'_3 = \omega(1 + \eta) + \frac{dy}{dt},$$

$$\omega'_1 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2, \quad \omega'_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2.$$

Предполагая функцию  $f(r)$  такою, чтобы функция  $f(\rho + \xi)$  для всѣхъ разсматриваемыхъ значений  $\rho$  и для достаточно малыхъ  $\xi$  была разложима въ абсолютно сходящійся рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\xi$ , вносимъ эти величины въ уравненія (1) и удерживаемъ въ послѣднихъ только члены не выше перваго порядка. Тогда уравненія эти, послѣ сокращенія членовъ нулеваго порядка вслѣдствіе (2), примутъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2 \rho \xi}{dt^2} - \rho \omega^2 \xi - 2\rho \omega^2 \eta + (M + m + m') \rho f'(\rho) \xi -$$

$$- m' \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \left( \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y \right) = 0, \dots (7)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \rho^2 \omega (2\xi + \eta) + m' \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y \right) = 0, \dots (8)$$

$$\frac{d^2 \rho (\xi + x)}{dt^2} - \rho \omega^2 (\xi + x + 2\eta) - 2\rho \omega \frac{dy}{dt} +$$

$$+ (M + m + m') \rho f'(\rho) (\xi + x) + m \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \left( \frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y \right) = 0, \dots (9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \rho^2 \left( 2\omega (\xi + x) + \omega \eta + \frac{dy}{dt} \right) -$$

$$- m \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y \right) = 0, \dots (10)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \omega_2) - \rho \omega \omega_1 = 0, \dots \dots \dots (11)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \rho^2 (\omega_2 - \sqrt{3} \omega_1) - \rho \omega (\sqrt{3} \omega_2 + \omega_1) = 0 \dots \dots (12)$$

Въ этой системѣ уравненія (9), (10) и (12) вслѣдствіе (7), (8) и (11) приводятся къ болѣе простому виду:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \rho x}{dt^2} - \rho \omega^2 x - 2\rho \omega \frac{dy}{dt} + (M + m + m') \rho f'(\rho) x + \\ & + \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \left( \frac{3}{4} (m + m') x - \frac{\sqrt{3}}{4} (m - m') y \right) = 0, \dots (13) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \rho^2 \left( 2\omega x + \frac{dy}{dt} \right) - \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{4} (m - m') x + \frac{3}{4} (m + m') y \right) = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \omega_1) + \rho \omega \omega_2 = 0.$$

Наконецъ, при помощи (2) можемъ привести уравненія (7) и (13) къ виду:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \rho \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 \rho}{dt^2} - 2\rho \omega^2 \eta - (M + m + m') \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \xi - \\ & - m' \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \left( \frac{3}{4} x + \frac{\sqrt{3}}{4} y \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \rho x}{dt^2} - x \frac{d^2 \rho}{dt^2} - 2\rho \omega \frac{dy}{dt} - (M + m + m') \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) x + \\ & + \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) \left( \frac{3}{4} (m + m') x - \frac{\sqrt{3}}{4} (m - m') y \right) = 0. \end{aligned}$$

Принимаемъ за независимую переменную во всѣхъ этихъ уравненіяхъ опредѣленный выше уголъ  $\vartheta$ . Тогда замѣчая, что вообще

$$\frac{d^2 \rho \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{C^2}{\rho^3} \frac{d^2 \zeta}{d\vartheta^2},$$

и полагая для сокращенія

$$\frac{M + m + m'}{C^2} = g, \quad g \rho^3 \left( f(\rho) - \rho f'(\rho) \right) = u, \dots \dots (14)$$

$$\frac{3}{4} \frac{m+m'}{M+m+m'} = \mu, \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{m-m'}{M+m+m'} = \mu', \quad \dots (15)$$

получимъ окончательно слѣдующую систему уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dy}{d\vartheta} &= u \left( (1 - \mu)x + \mu'y \right), \\ \frac{d^2y}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dx}{d\vartheta} &= u (\mu'x + \mu y), \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} - 2\eta - u\xi &= \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2} u \left( \frac{1}{\sqrt{3}}y + x \right), \\ \frac{d\eta}{d\vartheta} + 2 \frac{d\xi}{d\vartheta} &= \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2} u \left( \frac{1}{\sqrt{3}}x - y \right), \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho^2\omega_1}{d\vartheta} + \rho^2\omega_2 &= 0, \\ \frac{d\rho^2\omega_2}{d\vartheta} - \rho^2\omega_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

3. Изъ полученныхъ нами уравненій уравненія (18) тотчасъ-же интегрируются и даютъ:

$$\begin{aligned} \rho^2\omega_1 &= A \sin \vartheta + B \cos \vartheta, \\ \rho^2\omega_2 &= -A \cos \vartheta + B \sin \vartheta, \end{aligned}$$

гдѣ  $A$  и  $B$  постоянныя произвольныя.

Отсюда видно, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  остаются всегда безконечно-малыми одного порядка съ своими начальными значеніями, если  $\rho$  никогда не обращается въ нуль. Это послѣднее условіе мы будемъ всегда предполагать удовлетвореннымъ.

Затѣмъ легко показать, что если функціи  $x$  и  $y$ , удовлетворяющія уравненіямъ (16), найдены, то функціи  $\xi$  и  $\eta$ , удовлетворяющія уравненіямъ (17), найдутся при помощи квадратуръ и дифференцированій.

Для этого прежде всего замѣтимъ слѣдующее свойство уравненій (16):

Если за неизвѣстныя функціи вмѣсто  $x$  и  $y$  принять  $x_1$  и  $y_1$ , связанные съ первыми уравненіями

$$x + ay = x_1, \quad y - ax = y_1,$$



гдѣ  $a$  какая-либо постоянная, то для опредѣленія ихъ получатся уравненія прежняго типа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dy_1}{d\vartheta} &= u \left( (1 - \mu_1)x_1 + \mu'_1 y_1 \right), \\ \frac{d^2y_1}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dx_1}{d\vartheta} &= u \left( \mu'_1 x_1 + \mu_1 y_1 \right), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

гдѣ

$$\mu_1 = \frac{\mu - 2\mu'a + (1 - \mu)a^2}{1 + a^2},$$

$$\mu'_1 = \frac{\mu' + (2\mu - 1)a - \mu'a^2}{1 + a^2},$$

Опредѣлимъ  $a$  и новую постоянную  $b$  изъ условія

$$\mu'_1 x_1 + \mu_1 y_1 = b \left( \frac{1}{\sqrt{3}} x - y \right) \dots \dots \dots (20)$$

Послѣднее дастъ для нихъ уравненія

$$\mu_1 + \mu'_1 a = -b, \quad \mu'_1 - \mu_1 a = \frac{b}{\sqrt{3}}, \dots \dots \dots (21)$$

вслѣдствіе которыхъ удовлетворится также условіе

$$-\mu_1 x_1 + \mu'_1 y_1 = b \left( \frac{1}{\sqrt{3}} y + x \right) \dots \dots \dots (22)$$

При томъ величины  $a$  и  $b$ , слѣдующія изъ уравненій (21), будутъ:

$$a = \frac{\mu + \mu' \sqrt{3}}{\mu' + (1 - \mu) \sqrt{3}}, \quad b = - \frac{\mu - \mu^2 - \mu'^2}{\mu' + (1 - \mu) \sqrt{3}} \sqrt{3}.$$

Но вслѣдствіе (19), (20) и (22) уравненія (17) могутъ быть представлены подъ видомъ:

$$\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} - 2\eta - u\xi = \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b} \left( \frac{d^2x_1}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dy_1}{d\vartheta} - ux_1 \right),$$

$$\frac{d\eta}{d\vartheta} + 2 \frac{d\xi}{d\vartheta} = \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b} \left( \frac{d^2 y_1}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dx_1}{d\vartheta} \right),$$

а отсюда слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b} x_1 + \Xi, \\ \eta &= \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b} \frac{dy_1}{d\vartheta} + \Upsilon, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

гдѣ  $\Xi$  и  $\Upsilon$  общія величины, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Xi}{d\vartheta^2} - 2\Upsilon - u\Xi &= 0, \\ \frac{d\Upsilon}{d\vartheta} + 2 \frac{d\Xi}{d\vartheta} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

Наконецъ, замѣчая, что этими послѣдними уравненіями опредѣляется переходъ отъ одного Лапласова движенія къ другому такому-же, въ которомъ постоянныя  $g$  и  $h$  бесконечно-мало отличаются отъ своихъ значеній въ первомъ движеніи, находимъ общій интеграль этихъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= \frac{1}{\varrho^3} \frac{d\varrho}{d\vartheta} \int \frac{C_2 \varrho^6 - C_1 \varrho^4}{\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2} d\vartheta + \frac{C_3}{\varrho^3} \frac{d\varrho}{d\vartheta}, \\ \Upsilon &= -2\Xi + C_1, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

гдѣ  $C_1, C_2, C_3$  постоянныя произвольныя \*).

Такимъ образомъ, если  $x$  и  $y$  извѣстны, то  $\xi$  и  $\eta$  найдутся по формуламъ (25) и (23). Послѣднія, если въ нихъ подставить вмѣсто  $x_1, y_1, a, b$  ихъ значенія и затѣмъ  $\mu$  и  $\mu'$  замѣнить ихъ выраженіями (15), примутъ видъ:

\*) Формулы эти легко провѣрить, замѣчая, что вслѣдствіе (3) выраженіе (14) приводится къ виду

$$u = 4 + \frac{d^3 v}{d\vartheta^3},$$

гдѣ  $v = \frac{1}{\varrho^2}$ .

$$\left. \begin{aligned} \xi &= - \frac{\left(M + \frac{m}{2}\right) m' x + \frac{\sqrt{3}}{2} m m' y}{M m + M m' + m m'} + \Xi, \\ \eta &= - \frac{\left(M + \frac{m}{2}\right) m' \frac{dy}{d\vartheta} - \frac{\sqrt{3}}{2} m m' \frac{dx}{d\vartheta}}{M m + M m' + m m'} + \Upsilon. \end{aligned} \right\} \dots \dots (26)$$

При томъ, если мы положимъ здѣсь  $\Xi = \Upsilon = 0$ , то это будетъ только равносильно предположенію, что вмѣсто прежняго Лапласова движенія берется для сравненія съ возмущеннымъ нѣкоторое новое такое-же, въ которомъ постоянныя  $g$  и  $h$  бесконечно-мало отличаются отъ своихъ прежнихъ значеній.

Возвращаемся теперь къ уравненіямъ (16).

При помощи вышеприведенной подстановки преобразовываемъ ихъ къ виду (19). Затѣмъ можемъ воспользоваться неопредѣленностью параметра  $a$  для приведенія послѣднихъ уравненій къ возможно болѣе простому виду. Мы остановимся на такомъ выборѣ  $a$ , для котораго  $\mu'_1 = 0$ .

Такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$\mu' a^2 - (2\mu - 1)a - \mu' = 0.$$

Называя соотвѣтствующую величину  $\mu_1$  черезъ  $\lambda$ , найдемъ для нея въ силу этого уравненія слѣдующее выраженіе:

$$\lambda = \mu - \mu' a.$$

Поэтому для опредѣленія  $\lambda$  получимъ уравненіе:

$$\lambda^2 - \lambda + \mu - \mu'^2 = 0,$$

которое вслѣдствіе формуль (15) приводится къ виду:

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{3}{4} \frac{M m + M m' + m m'}{(M + m + m')^2} = 0 \dots \dots (27)$$

Если теперь назовемъ величины  $x_1$  и  $y_1$ , соотвѣтствующія разсматриваемому опредѣленію  $a$ , черезъ  $X$  и  $Y$ , то будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\left. \begin{aligned} X &= x + \frac{\mu - \lambda}{\mu'} y, \\ Y &= y - \frac{\mu - \lambda}{\mu'} x, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dY}{d\vartheta} &= (1 - \lambda) u X, \\ \frac{d^2 Y}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dX}{d\vartheta} &= \lambda u Y. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

Вопросъ приводится такимъ образомъ къ интегрированію уравненій (29). Въ этихъ уравненіяхъ  $\lambda$  есть какой-либо изъ корней уравненія (27). Послѣдніе-же, какъ нетрудно убѣдиться, всегда вещественны и заключаются: одинъ — между 0 и  $\frac{1}{2}$ , другой — между  $\frac{1}{2}$  и 1. При томъ, этихъ предѣловъ они могутъ достигать только въ двухъ случаяхъ: когда масса одной изъ точекъ безконечно-велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ, или когда массы всѣхъ трехъ точекъ равны между собою. Въ первомъ случаѣ корни уравненія (27) суть 0 и 1; во второмъ оба корня равны  $\frac{1}{2}$ .

4. Проинтегрировать уравненія (29), не дѣлая никакихъ частныхъ предположеній относительно функции  $u$  и постоянной  $\lambda$ , едва-ли возможно. Мы обратимъ вниманіе только на слѣдующую теорему: если найдены двѣ системы частныхъ рѣшеній уравненій (29), удовлетворяющія нѣкоторому условію, то окончательное интегрированіе ихъ приводится къ квадратурамъ.

Пусть  $X_i, Y_i$  и  $X_j, Y_j$  суть двѣ какія-либо системы частныхъ рѣшеній. Будемъ имѣть:

$$X_i \frac{d^2 X_j}{d\vartheta^2} - X_j \frac{d^2 X_i}{d\vartheta^2} - 2 X_i \frac{dY_j}{d\vartheta} + 2 X_j \frac{dY_i}{d\vartheta} = 0,$$

$$Y_i \frac{d^2 Y_j}{d\vartheta^2} - Y_j \frac{d^2 Y_i}{d\vartheta^2} + 2 Y_i \frac{dX_j}{d\vartheta} - 2 Y_j \frac{dX_i}{d\vartheta} = 0.$$

Складывая почленно эти уравненія и затѣмъ интегрируя, находимъ:

$$X_i \frac{dX_j}{d\vartheta} - X_j \frac{dX_i}{d\vartheta} + Y_i \frac{dY_j}{d\vartheta} - Y_j \frac{dY_i}{d\vartheta} + 2(Y_i X_j - Y_j X_i) = \text{const}.$$

Такимъ условіемъ связаны всякія двѣ системы рѣшеній уравненій (29).

Означая первую часть этого условія черезъ  $(X_i, X_j)$ , покажемъ, что всегда можно найти такія двѣ различныя системы частныхъ рѣшеній  $X_i, Y_i$  и  $X_j, Y_j$ , для которыхъ  $(X_i, X_j) = 0$ .

Въ самомъ дѣлѣ, если  $(X_i, X_j)$  не равно нулю, пусть  $X_l, Y_l$  новая система частныхъ рѣшеній, отличная отъ двухъ предыдущихъ, такъ-что между  $X_i, X_j$  и  $X_l$  не существуетъ зависимости вида

$$C_i X_i + C_j X_j + C_l X_l = 0,$$

гдѣ  $C_i, C_j$  и  $C_l$  постоянныя. Система частныхъ рѣшеній

$$X = a X_j + X_i,$$

$$Y = a Y_j + Y_i,$$

гдѣ  $a$  какая-либо постоянная, также будетъ отличною отъ системъ  $X_i, Y_i$  и  $X_j, Y_j$ . При томъ найдемъ

$$(X_i, X) = a (X_i, X_j) + (X_i, X_l),$$

и если припишемъ  $a$  значеніе

$$a = - \frac{(X_i, X_l)}{(X_i, X_j)},$$

то будемъ имѣть

$$(X_i, X) = 0.$$

Пусть найдены двѣ различныя системы частныхъ рѣшеній  $X_1, Y_1$  и  $X_2, Y_2$ , удовлетворяющія условію

$$(X_1, X_2) = 0 \dots \dots \dots (30)$$

Покажемъ, что окончательное интегрированіе уравненій (29) приводится къ квадратурамъ.

Пусть  $X$  и  $Y$  какія-либо функции, удовлетворяющія уравненіямъ (29). Будемъ имѣть:

$$(X_1, X) = C_1, \quad (X_2, X) = C_2, \quad \dots \dots \dots (31)$$

гдѣ  $C_1$  и  $C_2$  постоянныя. Легко также убѣдиться, что всякія функціи  $X$  и  $Y$ , удовлетворяющія уравненіямъ (31) при произвольныхъ постоянныхъ  $C_1$  и  $C_2$ , удовлетворяютъ также уравненіямъ (29).

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцированіемъ уравненій (31) находимъ:

$$\begin{aligned} & X_1 \left( \frac{d^2 X}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dY}{d\vartheta} \right) - X \left( \frac{d^2 X_1}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dY_1}{d\vartheta} \right) + \\ & + Y_1 \left( \frac{d^2 Y}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dX}{d\vartheta} \right) - Y \left( \frac{d^2 Y_1}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dX_1}{d\vartheta} \right) = 0, \\ & X_2 \left( \frac{d^2 X}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dY}{d\vartheta} \right) - X \left( \frac{d^2 X_2}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dY_2}{d\vartheta} \right) + \\ & + Y_2 \left( \frac{d^2 Y}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dX}{d\vartheta} \right) - Y \left( \frac{d^2 Y_2}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dX_2}{d\vartheta} \right) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & X_1 \left( \frac{d^2 X}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dY}{d\vartheta} - (1-\lambda)uX \right) + Y_1 \left( \frac{d^2 Y}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dX}{d\vartheta} - \lambda uY \right) = 0, \\ & X_2 \left( \frac{d^2 X}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dY}{d\vartheta} - (1-\lambda)uX \right) + Y_2 \left( \frac{d^2 Y}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dX}{d\vartheta} - \lambda uY \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія о различности системъ  $X_1, Y_1$  и  $X_2, Y_2$ , которое равносильно предположенію, что  $X_1 Y_2 - X_2 Y_1$  не равно нулю, получаемъ уравненія (29).

Такимъ образомъ общій интеграль уравненій (31) при произвольности постоянныхъ  $C_1$  и  $C_2$  дастъ общій интеграль уравненій (29).

Положимъ

$$X = P_1 X_1 + P_2 X_2, \quad Y = P_1 Y_1 + P_2 Y_2.$$

Тогда вслѣдствіе (30) уравненія (31) примутъ видъ:

$$(X_1^2 + Y_1^2) \frac{dP_1}{d\vartheta} + (X_1 X_2 + Y_1 Y_2) \frac{dP_2}{d\vartheta} = C_1,$$

$$(X_1 X_2 + Y_1 Y_2) \frac{dP_1}{d\vartheta} + (X_2^2 + Y_2^2) \frac{dP_2}{d\vartheta} = C_2,$$

а отсюда, полагая для сокращенія

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = Z,$$

найдемъ:

$$P_1 = C_1 \int \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta - C_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta + \text{const.},$$

$$P_2 = -C_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta + C_2 \int \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta + \text{const.}$$

Такимъ образомъ, если

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= X_1 \int \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta - X_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ Y_3 &= Y_1 \int \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta - Y_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ X_4 &= X_2 \int \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta - X_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ Y_4 &= Y_2 \int \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta - Y_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

мы получаемъ двѣ новыя системы частныхъ рѣшеній  $X_3, Y_3$  и  $X_4, Y_4$ , которыя вмѣстѣ съ прежними  $X_1, Y_1$  и  $X_2, Y_2$  даютъ возможность составить общій интеграль уравненій (29).

Замѣтимъ еще, что въ томъ случаѣ, когда массы всѣхъ трехъ точекъ равны между собою, интегрированіе уравненій (29) приводится къ интегрированію нѣкотораго линейнаго уравненія второго порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ  $\lambda = \frac{1}{2}$ , а при этомъ уравненіямъ (29) удовлетворимъ, полагая

$$\left. \begin{aligned} X &= S_1 \cos \vartheta + S_2 \sin \vartheta, \\ Y &= -S_1 \sin \vartheta + S_2 \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

гдѣ  $S_1$  и  $S_2$  суть какія-либо рѣшенія уравненія:

$$\frac{d^2 S}{d\vartheta^2} = \left(\frac{u}{2} - 1\right) S \dots (34)$$

При томъ, найдя общій интеграль этого послѣдняго уравненія, получимъ общій интеграль уравненій (29) по формуламъ (33), если для  $S_1$  и  $S_2$  возьмемъ двѣ различныя линейныя комбинаціи частныхъ рѣшеній уравненія (34) съ произвольными постоянными коэффициентами.

Изъ случаевъ, когда уравненіе (34) при непостоянномъ  $u$  интегрируется въ квадратурахъ, укажемъ на одинъ:  $f(r) = \frac{\alpha}{r}$ , гдѣ  $\alpha$  нѣкоторая постоянная. Въ этомъ случаѣ по формулѣ (14) находимъ:

$$u = 2g\alpha r^2,$$

а потому уравненіе (3), которому удовлетворяетъ  $\varrho$ , приводится къ

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{\sqrt{u}}{2} = 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что  $\frac{1}{\sqrt{u}}$  есть одно изъ частныхъ рѣшеній уравненія (34). Поэтому общій интеграль его имѣетъ видъ:

$$S = \frac{C_1}{\sqrt{u}} + \frac{C_2}{\sqrt{u}} \int u \, d\vartheta, \dots \dots \dots (35)$$

гдѣ  $C_1$  и  $C_2$  постоянныя произвольныя.

Наконецъ замѣтимъ, что когда  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ , уравненія (29) приводятся къ (24) и, слѣдовательно, интегрируются въ квадратурахъ. Но въ этомъ случаѣ масса одной изъ точекъ бесконечно-велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ, и потому задача о трехъ тѣлахъ распадается на двѣ задачи о двухъ тѣлахъ.

## II.

5. Переходя теперь къ изслѣдованію устойчивости, рассмотримъ сначала случай, когда  $u$  есть постоянная величина.

Въ этомъ случаѣ интегрированіе уравненій (29) вообще даетъ:

$$X = A_1 \cos(k_1 \vartheta + \alpha_1) + A_2 \cos(k_2 \vartheta + \alpha_2),$$

$$Y = -\frac{k_1^2 + (1 - \lambda)u}{2k_1} A_1 \sin(k_1 \vartheta + \alpha_1) - \frac{k_2^2 + (1 - \lambda)u}{2k_2} A_2 \sin(k_2 \vartheta + \alpha_2),$$

гдѣ  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$  суть произвольныя постоянныя, а  $k_1^2$  и  $k_2^2$  корни квадратнаго относительно  $k^2$  уравненія:

$$k^4 - (4 - u)k^2 + \lambda(1 - \lambda)u^2 = 0 \dots \dots \dots (36)$$



Кромѣ того, непосредственное интегрирование уравненій (24) даетъ:

$$\Xi = C_1 + C_2 \cos(\sqrt{4-u} \vartheta + \gamma),$$

$$\Upsilon = -2\Xi + \frac{4-u}{2} C_1,$$

гдѣ  $C_1, C_2$  и  $\gamma$  произвольныя постоянныя.

Изъ этихъ послѣднихъ выраженій видно, что для устойчивости необходимо условіе

$$4 - u > 0 \dots \dots \dots (37)$$

Изъ выраженій-же для  $X$  и  $Y$  видно, что для этого еще необходимо, чтобы обѣ величины  $k^2$ , удовлетворяющія уравненію (36), были вещественными, положительными и различными. Выражая это обстоятельство, получаемъ, кромѣ условія (37), еще слѣдующее:

$$\left(\frac{4-u}{u}\right)^2 - 4\lambda(1-\lambda) > 0, \dots \dots \dots (38)$$

№ 53-48142

при добавочномъ условіи, что  $\lambda(1-\lambda)u^2$  не есть нуль.

Величина  $u$  можетъ быть постоянною въ двухъ случаяхъ: во первыхъ—для всякой функціи  $f(r)$ , если рассматриваемое Лапласово движеніе есть постоянное; во вторыхъ—для всякаго Лапласова движенія, но при нѣкоторомъ опредѣленномъ типѣ функціи  $f(r)$ .

Въ первомъ случаѣ  $\varrho$  есть постоянная величина, и формулы (14) и (6) даютъ:

$$u = 1 - \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)},$$

а потому условія (37) и (38), если еще примемъ въ расчетъ уравненіе (27), приводятся къ слѣдующему виду:

$$\left. \begin{aligned} 3 + \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)} > 0, \\ \frac{(M+m+m')^2}{Mm + Mm' + mm'} > 3 \left\{ \frac{1 - \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)}}{3 + \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)}} \right\}^2 \dots \dots \dots (39) \end{aligned} \right\}$$

При  $f(\varrho) = \frac{1}{\varrho^N}$  условия эти обращаются въ данныя Routh'омъ.

Замѣтимъ, что первое изъ нихъ есть условіе возможности періодическихъ Лапласовыхъ движеній, бесконечно-близкихъ къ разсматриваемому постоянному.

Во второмъ случаѣ изъ условія, что

$$u = g\varrho^3 \left( f(\varrho) - \varrho f'(\varrho) \right) = \text{const.}$$

для всякаго  $\varrho$ , находимъ:

$$f(\varrho) = \frac{\alpha}{\varrho^3} + \beta\varrho,$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\beta$  постоянныя.

Нетрудно убѣдиться, что въ этомъ случаѣ Лапласовы движенія будутъ періодическими, только когда  $1 - g\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ . Неравенство (38), приводящееся къ виду:

$$\frac{(M + m + m')^2}{Mm + Mn' + mm'} > 3 \left( \frac{g\alpha}{1 - g\alpha} \right)^2,$$

представляетъ условіе устойчивости этихъ періодическихъ движеній.

### 6. Обращаемся теперь къ общему случаю.

Мы будемъ предполагать, что  $\varrho$  всегда заключается между предѣлами  $\varrho_0$  и  $\varrho_1 > \varrho_0$ , изъ которыхъ первый не нуль, второй не бесконеченъ, и что разсматриваемое Лапласово движеніе есть періодическое, такъ-что  $\varrho$  есть періодическая функція  $\vartheta$  съ періодомъ  $\Omega$ , опредѣляемымъ формулою (5).

Для этого необходимо, чтобы  $\varrho_0$  и  $\varrho_1$  были простыми корнями уравненія

$$h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g \int f(\varrho) d\varrho = 0, \dots \dots \dots (40)$$

и чтобы между предѣлами  $\varrho_0$  и  $\varrho_1$  первая часть послѣдняго не обращалась въ нуль, и при томъ была положительною.

Будемъ искать условия, при которыхъ функціи  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $x$ ,  $y$  остаются конечными для всякихъ вещественныхъ значеній  $\vartheta$ . Эти условия и будутъ условиями устойчивости разсматриваемаго движенія.

Прежде всего разсмотримъ выраженія (25) для  $\Xi$  и  $\Upsilon$ .

Нетрудно убѣдиться, что функціи  $\Xi$  и  $\Upsilon$ , опредѣляемыя этими формулами, вообще суть слѣдующаго типа

$$P(\vartheta) + \vartheta Q(\vartheta),$$

гдѣ  $P(\vartheta)$  и  $Q(\vartheta)$  суть періодическія функціи  $\vartheta$  съ періодомъ  $\Omega$ .

Но изъ уравненія (пар. 1)

$$C \frac{dt}{\varrho^2} = d\vartheta,$$

въ которомъ, чтобы остановиться на чемъ-либо определенномъ, будемъ считать  $C$  положительнымъ, слѣдуетъ, что  $\vartheta$  есть непрерывная возрастающая функція  $t$ , получающая приращеніе  $\Omega$  каждый разъ, какъ  $t$  получаетъ приращеніе

$$T = \frac{1}{C} \int_0^{\Omega} \varrho^2 d\vartheta.$$

Поэтому всякая функція типа

$$P(\vartheta) + \vartheta Q(\vartheta)$$

приводится къ виду

$$p(t) + tq(t),$$

гдѣ  $p(t)$  и  $q(t)$  суть періодическія функціи  $t$  съ періодомъ  $T$ .

Такого вида будутъ, слѣдовательно, вообще  $\Xi$  и  $\Upsilon$ , какъ функціи  $t$ .

Отсюда слѣдуетъ, что если признакомъ устойчивости считать то обстоятельство, чтобы въ возмущенномъ движеніи стороны треугольника всегда бесконечно мало отличались отъ тѣхъ длинъ, которыя имъ соотвѣтствовали-бы въ невозмущенномъ движеніи *въ тотъ-же моментъ времени*, то непостоянныя Лапласовы движенія вообще неустойчивы.

Это обстоятельство впрочемъ очевидно изъ слѣдующихъ соображеній:

Когда мы переходимъ отъ одного періодическаго Лапласова движенія къ другому, то при этомъ вообще измѣняется и періодъ  $T$ , а коль скоро это происходитъ, то хотя-бы постоянныя  $g$  и  $h$ , характеризующія новое движеніе, и отличались бесконечно-мало отъ своихъ прежнихъ значеній, очевидно, что разности между одновременными длинами сторонъ треугольника въ обоихъ движеніяхъ, не могутъ оставаться всегда бесконечно-малыми. Последнее возможно только при условіи, что періодъ  $T$  не измѣнился.

Интересно найти законъ притяженія, для котораго періодическія Лапласовы движенія могутъ быть устойчивыми въ только-что определенномъ смыслѣ. Вопросъ этотъ, по только-что замѣченному, приводится

къ разысканію такого закона притяженія, для котораго періодъ  $T$  въ этихъ движеніяхъ не зависитъ отъ постоянныхъ  $g$  и  $h$ .

Мы рѣшимъ этотъ вопросъ при сдѣланномъ уже предположеніи относительно функции  $f(\varrho)$ , что  $f(\varrho + \zeta)$  для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній  $\varrho$  и для достаточно малыхъ  $\zeta$  разложима въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\zeta$ . То-же предположеніе дѣлаетъ Бертранъ, разыскивая всевозможные законы притяженія, для которыхъ траекторіи точки, притягиваемой неподвижнымъ центромъ, есть всегда замкнутая кривая\*). Пріемъ нашъ будетъ вполне аналогиченъ Бертранову.

Полагая

$$\frac{1}{\varrho} = s, \quad \int f(\varrho) d\varrho = \varphi(s),$$

приводимъ уравненіе (4) къ виду:

$$d\vartheta = \pm \frac{ds}{\sqrt{h - s^2 - 2g\varphi(s)}}.$$

При томъ имѣемъ:

$$dt = \frac{\varrho^2}{C} d\vartheta = \sqrt{\frac{g}{M + m + m'}} \frac{d\vartheta}{s^2}.$$

Поэтому, если положимъ

$$\frac{1}{\varrho_0} = s_0, \quad \frac{1}{\varrho_1} = s_1,$$

то найдемъ:

$$T = 2 \sqrt{\frac{g}{M + m + m'}} \int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{s^2 \sqrt{h - s^2 - 2g\varphi(s)}}.$$

Но изъ уравненій

$$h - s_0^2 - 2g\varphi(s_0) = 0,$$

$$h - s_1^2 - 2g\varphi(s_1) = 0$$

находимъ:

$$h = \frac{s_0^2\varphi(s_1) - s_1^2\varphi(s_0)}{\varphi(s_1) - \varphi(s_0)}, \quad 2g = \frac{s_0^2 - s_1^2}{\varphi(s_1) - \varphi(s_0)},$$

\*) Comptes rendus, t. I.XXVII, 1873, p. 849.

вслѣдствіе чего формула наша принимаетъ видъ:

$$T = \sqrt{\frac{2(s_0^2 - s_1^2)}{M + m + m'}} \int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{s^2 \sqrt{s_0^2 \varphi(s_1) - s_1^2 \varphi(s_0) - [\varphi(s_1) - \varphi(s_0)] s^2 - (s_0^2 - s_1^2) \varphi(s)}}.$$

Вопросъ приводится къ разысканію функціи  $\varphi(s)$  изъ условія, чтобы это выраженіе не зависѣло отъ  $s_1$  и  $s_0$ .

Сдѣлаемъ подстановку

$$s = s_1 + (s_0 - s_1)u,$$

и предположимъ разность  $s_0 - s_1$  на столько малую, чтобы функція  $\varphi(s)$  была разложима въ рядъ по восходящимъ степенямъ  $(s_0 - s_1)u$  для всякаго  $u$ , лежащаго между предѣлами 0 и 1.

Тогда предполагая, что  $s_1 \varphi''(s_1) - \varphi'(s_1)$  не нуль, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$T = \frac{1}{\sqrt{M + m + m'}} \sqrt{\frac{2(s_0 + s_1)}{s_1 \varphi''(s_1) - \varphi'(s_1)}} \int_0^1 \frac{du}{[s_1 + (s_0 - s_1)u]^2 \sqrt{u(1-u)} \sqrt{1 + (s_0 - s_1)\psi(u)}},$$

гдѣ  $\psi(u)$  есть непрерывная функція отъ  $u$ , остающаяся конечною при  $s_0 - s_1 = 0$ .

Для того, чтобы выраженіе это не зависѣло отъ  $s_1$  и  $s_0$ , необходимо, чтобы выраженіе

$$\frac{2}{\sqrt{M + m + m'}} \frac{1}{\sqrt{s_1^4 \varphi''(s_1) - s_1^3 \varphi'(s_1)}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}},$$

въ которое оно обращается при  $s_0 = s_1$ , не зависѣло отъ  $s_1$ , а для этого функція  $\varphi(s)$  должна удовлетворять уравненію:

$$s^4 \varphi''(s) - s^3 \varphi'(s) = \text{const.}$$

Послѣднее приводится къ виду

$$f'(q) + \frac{3}{q} f(q) = \text{const.}$$

и слѣдовательно даетъ:

$$f(q) = \frac{\alpha}{q^3} + \beta q,$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\beta$  постоянныя.

Что при этомъ законѣ притяженія періодъ  $T$  дѣйствительно не зависитъ отъ  $s_1$  и  $s_0$ , убѣждаемся непосредственнымъ вычисленіемъ, которое даетъ:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta(M + m + m')}}.$$

Такимъ образомъ мы получили тотъ самый законъ притяженія, для котораго устойчивость Лапласовыхъ движеній была изслѣдована въ предыдущемъ параграфѣ. Мы видѣли, что при этомъ законѣ притяженія функции  $\Xi$  и  $\Upsilon$  дѣйствительно содержатъ только періодическіе члены.

Далѣе мы будемъ говорить объ устойчивости иного рода. А именно, мы будемъ періодическое Лапласово движеніе считать устойчивымъ, когда послѣ всякихъ бесконечно-малыхъ возмущеній, треугольникъ, въ вершинахъ котораго находятся матерьяльныя точки, всегда бесконечно-мало отличается отъ равносторонняго, при чемъ стороны его измѣняются между предѣлами, бесконечно-мало отличающимися отъ прежнихъ.

Для рѣшенія вопроса объ устойчивости въ этомъ смыслѣ, мы можемъ сравнивать возмущенное движеніе не съ разсматриваемымъ, а съ какимъ-либо другимъ періодическимъ Лапласовымъ движеніемъ, въ которомъ постоянныя  $g$  и  $h$  имѣютъ значенія, бесконечно-мало отличающіяся отъ соотвѣтствующихъ разсматриваемому. Вслѣдствіе этого можемъ предполагать  $\Xi = \Upsilon = 0$ , откуда слѣдуетъ, что рѣшеніе нашего вопроса исключительно зависитъ отъ интегрированія уравненій, которымъ удовлетворяютъ  $x$  и  $y$ , или — что все равно — отъ интегрированія уравненій (29).

Теперь и обращаемся къ этимъ уравненіямъ.

7. Мы уже сдѣлали предположеніе, что функція  $f(\varrho + \zeta)$  при  $\varrho_0 \leq \varrho \leq \varrho_1$  разложима въ абсолютно сходящійся рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\zeta$  для всякихъ достаточно малыхъ значеній послѣдняго. Мы примемъ теперь этотъ рядъ за опредѣленіе функціи  $f(\varrho + \zeta)$  для комплексныхъ значеній  $\zeta$ , модули которыхъ достаточно малы.

Такимъ образомъ функція  $f(\varrho)$  будетъ опредѣлена для комплексныхъ значеній  $\varrho$ , достаточно близкихъ къ вещественнымъ, лежащимъ между предѣлами  $\varrho_0$  и  $\varrho_1$ , и для этой области будетъ синектичною.

Уравненіе (4) опредѣлитъ затѣмъ  $\varrho$ , какъ періодическую функцію  $\vartheta$  съ періодомъ  $\Omega$ , и при томъ синектичную для всякихъ значеній  $\vartheta$ , достаточно близкихъ къ вещественнымъ, если предположимъ вещественнымъ одно изъ значеній  $\vartheta$ , для которыхъ  $\varrho = \varrho_0$ . Функція  $u$ , входящая въ уравненія (29), будетъ такого-же характера.

Включивши въ разсмотрѣніе комплексныя значенія  $\vartheta$ , мы можемъ приложить къ нашимъ уравненіямъ общія теоремы теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи бесконечныхъ рядовъ.

Во первыхъ, изъ свойства синектичности функций  $u$  заключаемъ, что  $X$  и  $Y$  можно разсматривать, какъ синектичныя функции  $\vartheta$ , вблизи всякихъ вещественныхъ конечныхъ значеній  $\vartheta$ .

Во вторыхъ, изъ періодичности функций  $u$  выводимъ, что если

$$X_i(\vartheta), Y_i(\vartheta), (i = 1, 2, 3, 4) \dots \dots \dots (41)$$

суть четыре независимыя системы частныхъ рѣшеній уравненій (29), то

$$\left. \begin{aligned} X_i(\vartheta + \Omega) &= a_{i1}X_1(\vartheta) + a_{i2}X_2(\vartheta) + a_{i3}X_3(\vartheta) + a_{i4}X_4(\vartheta), \\ Y_i(\vartheta + \Omega) &= a_{i1}Y_1(\vartheta) + a_{i2}Y_2(\vartheta) + a_{i3}Y_3(\vartheta) + a_{i4}Y_4(\vartheta), \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

гдѣ  $a_{ij}$  суть нѣкоторые постоянныя.

При томъ, если уравненіе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - q, & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - q, & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - q, & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - q \end{vmatrix} = 0 \dots \dots (43)$$

приведемъ къ виду

$$q^4 + b_1q^3 + b_2q^2 + b_3q + b_4 = 0,$$

то коэффициенты  $b$  будутъ оставаться неизмѣнными при замѣнѣ выбранной нами группы (41) какою-либо другою группою четырехъ независимыхъ системъ частныхъ рѣшеній уравненій (29).

Наконецъ, предполагая инварианты  $b$  извѣстными, и называя корни уравненія (43) черезъ  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , найдемъ общій интеграль уравненій (29), когда эти корни различны, подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^4 C_i P_i(\vartheta) q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \\ Y &= \sum_{i=1}^4 C_i Q_i(\vartheta) q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

гдѣ  $P(\vartheta)$  и  $Q(\vartheta)$  суть періодическія функціи  $\vartheta$  съ періодомъ  $\Omega$ , при томъ—однозначныя и непрерывныя для всѣхъ значеній  $\vartheta$ , достаточно близкихъ къ вещественнымъ, а  $C$ —постоянныя произвольныя.

Въ случаѣ равенства между нѣкоторыми изъ корней уравненія (43) выраженія для  $X$  и  $Y$  будутъ вообще нѣсколько иного вида. А именно, нѣкоторыя изъ постоянныхъ  $C$  замѣнятся вообще цѣлыми функціями  $\vartheta$  степени не выше числа, на единицу меньшаго кратности соотвѣтствующаго корня. Такъ если  $q_2 = q_1$ , и если *всѣ* миноры опредѣлителя  $\Delta$  не обращаются въ нуль при  $q = q_1$ , то члены выраженія  $X$ , соотвѣтствующіе разсматриваемому корню, будутъ вида:

$$(C_1 + C_2\vartheta)P_1(\vartheta)q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}} + C_2P_2(\vartheta)q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}.$$

Типъ (44) общаго интеграла для двукратнаго корня  $q_1$  сохранится только въ томъ случаѣ, когда при  $q = q_1$  всѣ миноры опредѣлителя  $\Delta$  обращаются въ нуль. Вообще въ случаѣ  $\mu$ -кратнаго корня этого уравненія, типъ (44) общаго интеграла сохранится только при условіи, что для этого корня обращаются въ нуль всѣ младшіе опредѣлители опредѣлителя  $\Delta$  до порядка  $\mu$  невключительно \*).

Наша задача приводится такимъ образомъ къ составленію и изслѣдованію уравненія (43). Въ случаѣ, когда корни послѣдняго различны, условія устойчивости будутъ состоять въ томъ, чтобы модули этихъ корней были равны или меньше 1. Въ случаѣ кратныхъ корней получатся еще добавочныя условія, если только они возможны,—чтобы кратный корень обращалъ въ нуль всѣ младшіе опредѣлители опредѣлителя  $\Delta$  до извѣстнаго порядка.

Къ сожалѣнію, задача о составленіи опредѣлителя  $\Delta$  на столько трудна, что можно дать только способы для приближеннаго вычисленія его элементовъ, которые и будутъ изложены далѣе.

Теперь-же покажемъ, что здѣсь задача приводится главнымъ образомъ къ вычисленію только двухъ величинъ, ибо характеристичное уравненіе (43) въ разсматриваемомъ вопросѣ всегда будетъ слѣдующаго типа:

$$\Delta = q^4 - 2Aq^3 + 2Bq^2 - 2Aq + 1 = 0 \dots \dots (45)$$

Чтобы доказать это, прежде всего замѣчаемъ, что если  $\vartheta = 0$  есть одно изъ значеній  $\vartheta$ , для которыхъ  $\varrho = \varrho_0$ , что всегда можно предположить, то  $\varrho$ , а слѣд. и  $n$  есть четная функція  $\vartheta$ . Это представляетъ непосредственное слѣдствіе уравненія (4).

\*) См. наприм. *Floquet*. „Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques“.—Annales scientifiques de l'École normale supérieure. Tome 12, 1883.



Но если  $u$  есть четная функция  $\vartheta$ , то уравнения (29) не мѣняются при одновременной замѣнѣ  $\vartheta$  черезъ  $-\vartheta$  и  $Y$  черезъ  $-Y$ . Поэтому если

$$X = \varphi(\vartheta), \quad Y = \psi(\vartheta)$$

есть какая-либо система рѣшеній этихъ уравненій, то

$$X = \varphi(-\vartheta), \quad Y = -\psi(-\vartheta)$$

представить также нѣкоторую систему рѣшеній этихъ уравненій:

Пусть  $q$  есть одинъ изъ корней уравненія (43). Мы будемъ имѣть систему частныхъ рѣшеній уравненій (29) слѣдующаго вида

$$X = P(\vartheta)q^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y = Q(\vartheta)q^{\frac{\vartheta}{\Omega}},$$

гдѣ  $P(\vartheta)$  и  $Q(\vartheta)$  суть периодическія функции  $\vartheta$  съ періодомъ  $\Omega$ . Но по-только-что замѣченному, существованіе этой системы рѣшеній влечетъ за собою заключеніе о существованіи слѣдующей

$$X = P(-\vartheta)q^{-\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y = -Q(-\vartheta)q^{-\frac{\vartheta}{\Omega}},$$

въ которой  $P(-\vartheta)$  и  $Q(-\vartheta)$  суть периодическія функции  $\vartheta$  съ тѣмъ-же періодомъ  $\Omega$ . Эта-же послѣдняя система рѣшеній возможна только при условіи, что  $\frac{1}{q}$  есть корень уравненія (43).

И такъ, каждому корню  $q$  этого уравненія соответствуетъ корень  $\frac{1}{q}$ . Другими словами, уравненіе это должно приводиться къ виду (45).

Наше доказательство основывалось на томъ свойствѣ функции  $u$ , что ее можно разсматривать, какъ четную функцию  $\vartheta$ . Но разсматриваемая теорема можетъ быть доказана и независимо отъ этого свойства функции  $u$ .

Приводимъ другое доказательство ея.

Прежде всего замѣчаемъ, что корни уравненія (43) вообще различны. Это слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что уже въ частномъ случаѣ, когда  $u$  есть постоянная величина, корни его вообще различны.

Пусть  $q_1$  и  $q_2$  два различныхъ корня уравненія (43) и при томъ такихъ, что  $q_1 q_2$  не равно 1. Мы будемъ имѣть двѣ различныхъ системы частныхъ рѣшеній уравненій (29) слѣдующаго вида:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= P_1(\vartheta) q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, & Y_1 &= Q_1(\vartheta) q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \\ X_2 &= P_2(\vartheta) q_2^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, & Y_2 &= Q_2(\vartheta) q_2^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

гдѣ  $P$  и  $Q$  по прежнему означаютъ періодическія функціи  $\vartheta$  съ періодомъ  $\Omega$ .

Составляемъ изъ этихъ частныхъ рѣшеній выраженіе  $(X_1, X_2)$  (см. пар. 4). Вслѣдствіе періодичности функцій  $P$  и  $Q$ , а слѣдовательно — и ихъ производныхъ, выраженіе это, при увеличеніи  $\vartheta$  на  $\Omega$ , возвращается къ прежнему значенію, умноженному на величину  $q_1 q_2$ , отличную отъ 1. Но мы знаемъ, что выраженіе это представляетъ постоянную величину. Поэтому приходимъ къ заключенію, что

$$(X_1, X_2) = 0.$$

Но въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли въ параграфѣ 4, двѣ другія системы частныхъ рѣшеній  $X_3, Y_3$  и  $X_4, Y_4$ , изъ которыхъ вмѣстѣ съ (46) можетъ быть составленъ общій интеграль уравненій (29), будутъ опредѣляться формулами (32).

Опредѣлимъ болѣе точнымъ образомъ эти частныя рѣшенія.

Будемъ изображать комплексныя значенія  $\vartheta$  точками на нѣкоторой плоскости, и предположимъ, что во всѣхъ интегралахъ, входящихъ въ формулы (32), интегрированіе начинается отъ какой-либо точки  $\vartheta = \vartheta_0$  на вещественной оси, для которой функція

$$Z = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

не обращается въ нуль, и затѣмъ ведется до точки, изображающей разсматриваемое значеніе  $\vartheta$ , по какой-либо кривой, всѣ точки которой достаточно близки къ вещественной оси, и на которой не лежатъ точки, изображающія корни уравненія  $Z = 0$ . Мы знаемъ, что функціи  $X$  и  $Y$  для всѣхъ значеній  $\vartheta$ , достаточно близкихъ къ вещественнымъ, однозначны. Поэтому кривыя эти въ извѣстныхъ предѣлахъ можно выбирать произвольно, не измѣняя значеній интеграловъ. Мы удержимъ для обозначенія послѣднихъ обычныя означенія, принятія для опредѣленныхъ интеграловъ.

Разсматриваемъ выраженія:

$$X_3 = X_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta - X_2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta,$$

$$X_4 = X_2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta - X_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta.$$

Дѣлаемъ въ нихъ замѣну  $\vartheta$  черезъ  $\vartheta + \Omega$ ; затѣмъ интегралы, взятые въ предѣлахъ отъ  $\vartheta_0$  до  $\vartheta + \Omega$ , преобразовываемъ по слѣдующей схемѣ

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta + \Omega} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + \Omega} + \int_{\vartheta_0 + \Omega}^{\vartheta + \Omega},$$

и наконецъ замѣчаемъ, что при указанной замѣнѣ  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z$  обращаются соответственно въ  $q_1 X_1, q_1 Y_1, q_2 X_2, q_2 Y_2, q_1 q_2 Z$ , вслѣдствіе чего

$$\int_{\vartheta_0 + \Omega}^{\vartheta + \Omega} \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta = \frac{1}{q_1^2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta,$$

$$\int_{\vartheta_0 + \Omega}^{\vartheta + \Omega} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta = \frac{1}{q_1 q_2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta,$$

$$\int_{\vartheta_0 + \Omega}^{\vartheta + \Omega} \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta = \frac{1}{q_2^2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta.$$

Послѣ этихъ преобразованій находимъ:

$$\left. \begin{aligned} X_3(\vartheta + \Omega) &= q_1 c_{22} X_1(\vartheta) - q_2 c_{12} X_2(\vartheta) + \frac{1}{q_1} X_3(\vartheta), \\ X_4(\vartheta + \Omega) &= q_2 c_{11} X_2(\vartheta) - q_1 c_{12} X_1(\vartheta) + \frac{1}{q_2} X_4(\vartheta), \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

гдѣ  $c_{ij}$  постоянныя, опредѣляемыя формулами

$$c_{11} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + \Omega} \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta ,$$

$$c_{12} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + \Omega} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta ,$$

$$c_{22} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + \Omega} \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta .$$

Присоединивши къ формуламъ (47) слѣдующія

$$X_1(\vartheta + \Omega) = q_1 X_1(\vartheta) , \quad X_2(\vartheta + \Omega) = q_2 X_2(\vartheta) ,$$

можемъ составить уравненіе (43), которое будетъ слѣдующаго вида:

$$\begin{vmatrix} q_1 - q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 - q & 0 & 0 \\ q_1 c_{22} & -q_2 c_{12} & \frac{1}{q_1} - q & 0 \\ -q_1 c_{12} & q_2 c_{11} & 0 & \frac{1}{q_2} - q \end{vmatrix} = 0 .$$

Корни этого уравненія суть  $q_1, q_2, \frac{1}{q_1}$  и  $\frac{1}{q_2}$ .

И такъ, вопросъ приводится вообще къ опредѣленію двухъ постоянныхъ  $A$  и  $B$ , входящихъ въ уравненіе (45).

Въ частномъ случаѣ  $\lambda = \frac{1}{2}$  интегрированіе уравненій (29) зависитъ, какъ мы видѣли, отъ интегрированія линейнаго уравненія второго порядка (34). Характеристичное уравненіе  $\Delta = 0$ , соотвѣтствующее послѣднему, будетъ типа

$$q^2 - 2A_1 q + 1 = 0 ,$$

и потому въ этомъ случаѣ вопросъ приводится къ опредѣленію одной только постоянной  $A_1$ .

8. Такъ-какъ каждому корню  $q$  уравненія (45) соотвѣтствуетъ корень  $\frac{1}{q}$ , то условіе устойчивости приводится главнымъ образомъ къ тому, чтобы модули всѣхъ корней этого уравненія были равны 1.

Найдемъ условія, которымъ должны удовлетворять для этого коэффициенты  $A$  и  $B$ .

Пусть  $e^{\varphi_1 i}, e^{-\varphi_1 i}, e^{\varphi_2 i}, e^{-\varphi_2 i}$ , гдѣ  $i = \sqrt{-1}$ , а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  вещественныя величины, суть всѣ корни уравненія (45).

Будемъ имѣть:

$$A = \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2, \quad B = 1 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

откуда слѣдуетъ, что  $\cos \varphi_1$  и  $\cos \varphi_2$  суть корни квадратнаго уравненія:

$$x^2 - Ax + \frac{B-1}{2} = 0 \dots \dots \dots (48)$$

Условіе, что корни этого уравненія вещественны и различны, выразится неравенствомъ:

$$A^2 - 2(B-1) > 0, \dots \dots \dots (49)$$

а что они по числовымъ значеніямъ меньше 1 -- неравенствами:

$$\sqrt{A^2 - 2(B-1)} < 2 - A,$$

$$\sqrt{A^2 - 2(B-1)} < 2 + A.$$

Изъ послѣднихъ во первыхъ слѣдуетъ, что

$$2 - A > 0 \quad \text{и} \quad 2 + A > 0$$

или

$$A^2 < 4, \dots \dots \dots (50)$$

и во вторыхъ -- что

$$B + 1 > 2A > -B - 1,$$

откуда

$$B + 1 > 0 \quad \text{и} \quad A^2 < \left(\frac{B+1}{2}\right)^2 \dots \dots \dots (51)$$

Условія (49), (50) и (51) равносильны слѣдующимъ:

$$\left. \begin{aligned} -1 < B < 3, \\ 2(B-1) < A^2 < \left(\frac{B+1}{2}\right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

При этихъ условіяхъ корни уравненія (48) вещественны, различны и по числовымъ значеніямъ меньше 1, а потому корни уравненія (45) различны и имѣютъ модули, равные 1.

Въ предѣльныхъ случаяхъ неравенствъ (52) получается слѣдующее:

При  $B = 3$  оба корня уравненія (48) равны  $\pm 1$ , и слѣдовательно всѣ четыре корня уравненія (45) равны  $\pm 1$ .

При  $B = -1$  одинъ корень уравненія (48) равенъ, 1, другой — 1, и слѣдовательно — два корня уравненія (45) равны 1, а два остальныхъ равны — 1.

При  $A^2 = \left(\frac{B+1}{2}\right)^2$  одинъ корень уравненія (48) равенъ  $\pm 1$ , другой представляетъ вообще правильную дробь, и слѣдовательно два корня уравненія (45) равны  $\pm 1$ , а остальные два вообще отличны отъ  $\pm 1$ .

При  $A^2 = 2(B-1)$  корни уравненія (48) равны, будучи вообще отличными отъ  $\pm 1$ , и слѣдовательно уравненіе (45) имѣетъ двѣ пары равныхъ корней, вообще отличныхъ отъ  $\pm 1$ .

Въ непредѣльныхъ случаяхъ условій (52) устойчивость, по крайней мѣрѣ для перваго приближенія, несомнѣнна. Предѣльные случаи требуютъ еще дополнительныхъ изслѣдованій.

### III.

9. Обращаемся къ вопросу о приближенномъ вычисленіи инвариантовъ  $A$  и  $B$ .

Прилагая къ уравненіямъ (29) общую теорію интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, основанную на изслѣдованіи интеграловъ вблизи ихъ критическихъ точекъ, мы можемъ для каждаго даннаго частнаго вида функціи  $u$  найти способы какъ для приближеннаго вычисленія неизвѣстныхъ функцій для каждаго значенія независимой переменнѣй, такъ и для приближеннаго вычисленія постоянныхъ  $A$  и  $B$ . Способы эти могутъ быть весьма разнообразны какъ въ зависимости отъ вида функціи  $u$ , такъ и въ зависимости отъ различныхъ преобразованій, которымъ могутъ быть подвергаемы наши уравненія путемъ перемѣны независимой переменнѣй.

Приложеніе способовъ этого рода въ особенности къ случаю притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, конечно было бы не лишено интереса. Но мы отложимъ это до другаго изслѣдованія. Здѣсь-же изложимъ два общихъ для нашей задачи способа, основанныхъ на иныхъ началахъ. Однимъ изъ нихъ можно пользоваться всегда, хотя практически полезенъ онъ можетъ быть только въ случаѣ, когда масса одной изъ точекъ весьма велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ; другимъ — когда рассматриваемое періодическое Лапласово движеніе достаточно близко къ постоянному.

Только-что упомянутые способы основываются на слѣдующей теоремѣ:

Дана система  $n$  линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій съ  $n$  неизвѣстными функціями  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и независимой переменнѣй  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= P_{11}X_1 + P_{12}X_2 + \dots + P_{1n}X_n, \\ \frac{dX_2}{dt} &= P_{21}X_1 + P_{22}X_2 + \dots + P_{2n}X_n, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dX_n}{dt} &= P_{n1}X_1 + P_{n2}X_2 + \dots + P_{nn}X_n, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

въ которой  $P_{ij}$  суть періодическія функціи  $t$  съ однимъ и тѣмъ-же вещественнымъ періодомъ  $\omega$ , содержащія нѣкоторый параметръ  $\alpha$ . Называя черезъ  $T$  и  $A$  нѣкоторыя положительныя постоянныя и черезъ  $\tau$  — произвольную конечную вещественную величину, допустимъ, что  $P_{ij}$  суть синектичныя функціи двухъ переменныхъ  $t$  и  $\alpha$  для всѣхъ значеній послѣднихъ, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \text{mod}(t - \tau) &< T, \\ \text{mod } \alpha &< A, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (54)$$

при всякомъ  $\tau$ . Тогда, разумѣя подъ  $C_1, C_2, \dots, C_n$  произвольно заданныя значенія функцій  $X_1, X_2, \dots, X_n$  для какого-либо частнаго вещественнаго значенія  $t$ , положимъ,  $t = t_0$ , и представляя общій интеграль уравненій (53) подъ видомъ

$$X_j = C_1 Q_j^{(1)} + C_2 Q_j^{(2)} + \dots + C_n Q_j^{(n)} \\ (j = 1, 2, \dots, n),$$

найдемъ, что функціи  $Q_j^{(i)}$  разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\alpha$ , абсолютно сходящіеся для всѣхъ значеній  $\alpha$  и  $t$ , удовлетворяющихъ условіямъ (54). Кроме того, если

$$q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_{n-1} q + a_n = 0 \dots (55)$$

есть характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее періоду  $\omega$ , то и инварианты  $a_1, a_2$  и т. д. разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\alpha$ , абсолютно сходящіеся, пока  $\text{mod } \alpha < A$ .

Теорема эта докажется слѣдующимъ образомъ.

Пусть  $T_1$  и  $A_1$  суть какія-либо положительныя величины, соотвѣтственно меньшія  $T$  и  $A$ , и пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  суть значенія функцій  $X_1, X_2, \dots, X_n$  для  $t = \tau$ .

Функціи  $P_{ij}$  могутъ быть представлены подъ видомъ двойныхъ рядовъ

$$P_{ij} = \sum_{k, l=0}^{\infty} A_{ij}^{(kl)} (t - \tau)^k \alpha^l, \dots (56)$$

абсолютно сходящихся для всѣхъ значеній  $t$  и  $\alpha$ , удовлетворяющихъ условіямъ:

$$\text{mod}(t - \tau) \leq T_1, \quad \text{mod } \alpha \leq A_1.$$

При томъ, если  $P$  есть наибольшей изъ модулей всѣхъ значеній функцій  $P_{ij}$  для  $\text{mod}(t - \tau) = T_1$  и  $\text{mod } \alpha = A_1$ , то

$$\text{mod } A_{ij}^{(kl)} \leq \frac{P}{T_1^k A_1^l} \dots (57)$$

Вносимъ въ уравненія (53) вмѣсто каждой изъ функцій  $P_{ij}$  ряды (56), а вмѣсто каждой изъ функцій  $X_j$  ряды слѣдующаго вида

$$X_j = \Gamma_j + (t - \tau) \sum_{k, l=0}^{\infty} B_j^{(kl)} (t - \tau)^k \alpha^l, \dots (58)$$

и затѣмъ приравниваемъ коэффициенты при одинаковыхъ произведеніяхъ  $(t - \tau)^k \alpha^l$  въ обѣихъ частяхъ равенствъ.

Такимъ путемъ получимъ уравненія, изъ которыхъ каждый изъ коэффициентовъ  $B_j^{(kl)}$  найдется подъ видомъ выраженія, линейнаго и одно-



роднаго относительно всѣхъ  $\Gamma_i$ , въ которомъ послѣднія будутъ множителями при цѣлыхъ рациональныхъ функціяхъ съ положительными коэффициентами отъ тѣхъ изъ величинъ  $A_{i,j_1}^{(k,l)}$ , для которыхъ  $k_1$  не больше  $k$  и  $l_1$  не больше  $l$ .

Ряды (58) будутъ абсолютно сходящимися для всѣхъ значений  $t$  и  $\alpha$ , для которыхъ суть абсолютно сходящіеся ряды, получаемые изъ (58) замѣною коэффициентовъ  $B_j^{(k,l)}$  высшими предѣлами ихъ модулей. Но такіе предѣлы получимъ, замѣняя въ упомянутыхъ выраженіяхъ этихъ коэффициентовъ величины  $A_{ij}^{(k,l)}$  вторыми частями неравенствъ (57), а величины  $\Gamma_j$  — наибольшимъ изъ ихъ модулей, который назовемъ черезъ  $\Gamma$ . Замѣчая-же, что вслѣдствіе этой замѣны каждая изъ функцій  $P_j$  обращается въ

$$\frac{P}{\left(1 - \frac{t - \tau}{T_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{A_1}\right)},$$

найдемъ, что при этомъ каждый изъ рядовъ (58) обратится въ рядъ, удовлетворяющій уравненію

$$\frac{dX}{dt} = \frac{nPX}{\left(1 - \frac{t - \tau}{T_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{A_1}\right)}$$

и обращающійся въ  $\Gamma$  для  $t = \tau$ . Этотъ рядъ представить, слѣдовательно, разложеніе по восходящимъ степенямъ  $t - \tau$  и  $\alpha$  функціи

$$X = \Gamma \left(1 - \frac{t - \tau}{T_1}\right)^{-\frac{nPT_1}{1 - \frac{\alpha}{A_1}}},$$

которая остается синектичною, пока  $\text{mod}(t - \tau) < T_1$  и  $\text{mod} \alpha < A_1$ . Поэтому для такихъ значений  $t$  и  $\alpha$  рядъ этотъ есть абсолютно сходящійся.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что если  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  суть значенія функцій  $X_1, X_2, \dots, X_n$  для какого либо вещественнаго  $t = \tau$ , то для всякаго  $t$ , удовлетворяющаго условію  $\text{mod}(t - \tau) < T$ , функціи эти опредѣлятся уравненіями вида

$$X_j = \Gamma_1 R_j^{(1)} + \Gamma_2 R_j^{(2)} + \dots + \Gamma_n R_j^{(n)} \\ (j = 1, 2, \dots, n),$$

въ которыхъ  $R_j^{(i)}$  суть функции  $t$  и  $\alpha$ , разлагающіяся въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\alpha$ , абсолютно сходящіеся, пока  $\text{mod } \alpha < A$ .

Отсюда нетрудно заключить, что величины  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  могутъ быть представлены подъ видомъ линейныхъ функций постоянныхъ  $C_1, C_2, \dots, C_n$  съ коэффициентами, разлагающимися въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\alpha$ , абсолютно сходящіеся при томъ же условіи.

Изъ сопоставленія этихъ двухъ результатовъ слѣдуетъ справедливость первой части теоремы.

Для доказательства второй части ея замѣчаемъ, что

$$Q_j^{(i)}(t + \omega) = D_1^{(i)} Q_j^{(1)}(t) + D_2^{(i)} Q_j^{(2)}(t) + \dots + D_n^{(i)} Q_j^{(n)}(t),$$

гдѣ  $D_j^{(i)}$  суть величины, независящія отъ  $t$ .

Отсюда, принимая въ расчетъ, что  $Q_i^{(i)}(t_0) = 1$  и что  $Q_j^{(i)}(t_0) = 0$ , если  $j \leq i$ , находимъ:

$$D_j^{(i)} = Q_j^{(i)}(t_0 + \omega),$$

откуда слѣдуетъ, что всѣ  $D_j^{(i)}$  разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\alpha$ , абсолютно сходящіеся, пока  $\text{mod } \alpha < A$ . То же можно утверждать, слѣдовательно, и относительно коэффициентовъ при различныхъ степеняхъ  $q$  въ уравненіи

$$\begin{vmatrix} D_1^{(1)} - q, & D_2^{(1)}, & \dots & D_n^{(1)} \\ D_1^{(2)}, & D_2^{(2)} - q, & \dots & D_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1^{(n)}, & D_2^{(n)}, & \dots & D_n^{(n)} - q \end{vmatrix} = 0,$$

а послѣднее тождественно съ уравненіемъ (55).

10. Въ уравненіяхъ (29) роль параметра  $\alpha$  можетъ играть постоянная  $\lambda$ , для которой  $A = \infty$ . Поэтому при сдѣланныхъ предположеніяхъ относительно функции  $u$  и согласно съ только-что доказанною теоремою, можемъ утверждать, что функции  $X$  и  $Y$  (для всякихъ значеній  $\vartheta$ , достаточно близкихъ къ вещественнымъ) и инварианты  $A$  и  $B$  могутъ быть представлены подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\lambda$  и абсолютно сходящихся для всякаго  $\lambda$ .

Положимъ

$$X = \sum_0^{\infty} \lambda^n P_n, \quad Y = \sum_0^{\infty} \lambda^n Q_n,$$

предполагая  $P_n$  и  $Q_n$  функциями  $\vartheta$ , не зависящими отъ  $\lambda$ . Въ случаѣ надобности функции эти будемъ означать также черезъ  $P_n(\vartheta)$  и  $Q_n(\vartheta)$ .

Тогда, означая дифференцированія по  $\vartheta$  значками, получимъ изъ (29) слѣдующія уравненія:

$$\left. \begin{aligned} P_0'' - 2Q_0' - uP_0 &= 0, \\ Q_0'' + 2P_0' &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

и для  $n > 0$

$$\left. \begin{aligned} P_n'' - 2Q_n' - uP_n &= -uP_{n-1}, \\ Q_n'' + 2P_n' &= uQ_{n-1}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (60)$$

Уравненія (59), какъ мы знаемъ, интегрируются въ квадратурахъ. Поэтому можемъ послѣдовательно найти  $P_0, Q_0, P_1, Q_1$  и т. д. При этомъ, согласно съ предыдущей теоремой, постоянныя, вводимыя интегрированіемъ каждой изъ системъ уравненій (60), должны быть опредѣляемы изъ условія, чтобы функции  $P_n, P_n', Q_n, Q_n'$  обращались въ нуль для нѣкотораго даннаго (одного и того-же для всякаго  $n$ ) значенія  $\vartheta$ . Постоянныя-же, введенныя интегрированіемъ уравненій (59), могутъ быть опредѣлены изъ условія, чтобы для этого значенія  $\vartheta$  функции  $P_0, P_0', Q_0, Q_0'$  обращались въ заданныя значенія функций  $X, X', Y, Y'$ .

Чтобы составить формулы для послѣдовательнаго вычисленія функций  $P_n$  и  $Q_n$ , мы должны сначала обратить вниманіе на нѣкоторыя общія свойства функции

$$\frac{1}{\varrho^2} = v(\vartheta) = v.$$

При разсматриваемыхъ предположеніяхъ,  $v$  есть синектичная функция  $\vartheta$  для значеній послѣдняго, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, и при томъ — періодическая съ періодомъ  $\Omega$ , всѣ значенія которой для вещественнаго  $\vartheta$  лежатъ между предѣлами, изъ которыхъ низшій не нуль, высшій не безконеченъ. Первый назовемъ черезъ  $v_0$ , второй — черезъ  $v_1$ .

Мы будемъ предполагать, что  $\vartheta = 0$  есть одно изъ значеній  $\vartheta$ , для которыхъ  $v = v_0$ . Тогда, разумѣя подъ  $m$  произвольное цѣлое число, найдемъ всѣ другія вещественныя значенія  $\vartheta$ , удовлетворяющія этому уравненію, по формулѣ  $\vartheta = m\Omega$ , а всѣ вещественныя значенія  $\vartheta$ , удовлетворяющія уравненію  $v = v_1$ , — по формулѣ  $\vartheta = (2m + 1)\frac{\Omega}{2}$ .

Вслѣдствіе только-что сдѣланнаго предположенія, изъ уравненія (4) легко выводимъ слѣдующее равенство

$$v\left(m\frac{\Omega}{2} + \vartheta\right) = v\left(m\frac{\Omega}{2} - \vartheta\right),$$

справедливое для всякаго цѣлаго  $m$ . Изъ этого равенства слѣдуетъ, что если  $v_0^{(n)}$  и  $v_1^{(n)}$  суть значенія производной  $v^{(n)}$  для  $\vartheta = m\Omega$  и для  $\vartheta = (2m + 1)\frac{\Omega}{2}$ , то вообще  $v_0^{(2n+1)} = v_1^{(2n+1)} = 0$ .

Отсюда заключаемъ, что для значеній  $\vartheta$ , достаточно близкихъ къ значеніямъ типа  $m\Omega$  или  $(2m + 1)\frac{\Omega}{2}$ , функція  $v$  разложится въ рядъ одного изъ двухъ слѣдующихъ видовъ:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + \frac{v_0''}{1 \cdot 2} \bar{\vartheta}^2 + \frac{v_0^{IV}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \bar{\vartheta}^4 + \dots, \\ v &= v_1 + \frac{v_1''}{1 \cdot 2} \bar{\vartheta}^2 + \frac{v_1^{IV}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \bar{\vartheta}^4 + \dots, \end{aligned} \right\} \dots (61)$$

гдѣ  $\bar{\vartheta} = \vartheta - m\Omega$  для перваго ряда и  $\bar{\vartheta} = \vartheta - (2m + 1)\frac{\Omega}{2}$  — для втораго.

Наконецъ, замѣтимъ, что  $v_0''$  и  $v_1''$  всегда отличны отъ нуля, какъ это слѣдуетъ изъ того, что  $\varrho_0$  и  $\varrho_1$  суть *простые* корни уравненія (40).

Возвращаемся къ нашей задачѣ.

Принимая въ расчетъ уравненіе (3) и формулу (14), опредѣляющую  $u$ , легко находимъ:

$$u = 4 + \frac{v'''}{v'},$$

вслѣдствіе чего уравненія (59) даютъ:

$$\begin{aligned} Q_0' &= C_1 - 2P_0, \\ P_0'v' - v''P_0 &= 2C_1v + C_2, \dots \dots \dots (62) \end{aligned}$$

гдѣ  $C_1$  и  $C_2$  произвольныя постоянныя. Для опредѣленія ихъ, называемъ черезъ  $X_0, X_0', Y_0, Y_0'$  значенія функций  $X, X', Y, Y'$  для  $\vartheta = 0$ , которыя предположимъ заданными. Тогда найдемъ:

$$C_1 = Y_0' + 2X_0,$$

$$2C_1v_0 + C_2 = -v_0''X_0.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (62) можетъ быть представлено подѣ видомъ:

$$\frac{P_0'v' - v''(P_0 - X_0)}{v'^2} = \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2},$$

откуда замѣчая, что вторая часть равенства остается въ силу (61) конечною для  $\vartheta = 0$ , и что

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left\{ \frac{P_0 - X_0}{v'} \right\} = \frac{X_0'}{v_0''},$$

находимъ:

$$P_0 = X_0 + X_0' \frac{v'}{v_0''} + v' \int_0^{\vartheta} \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2} d\vartheta.$$

Входящій сюда интеграль теряетъ опредѣленный смыслъ, коль скоро въ числѣ значеній  $\vartheta$ , черезъ которыя проводится интегрированіе, встрѣчаются значенія типа  $\vartheta = (2m + 1) \frac{\Omega}{2}$ . Поэтому эти значенія  $\vartheta$  будемъ разсматривать, только какъ предѣльныя. Интегрированіе-же будемъ вести по какой-либо кривой, начинающейся въ точкѣ  $\vartheta = 0$ , на которой не находятся точки  $\vartheta = (2m + 1) \frac{\Omega}{2}$ , и которая достаточно близка къ вещественной оси для того, чтобы функция  $v$  оставалась синектичною, и не достигались мнимые корни уравненія  $v' = 0$ . Такъ-какъ при этомъ условіи разсматриваемый интеграль остается однозначнымъ (см. (61)), то не теряя опредѣленности результата, можно не означать точнымъ образомъ пути интегрированія. Но въ случаѣ вещественныхъ значеній  $\vartheta$  его всегда можно привести къ пути, состоящему изъ отрѣзковъ вещественной оси и полукруговъ безконечно-малыхъ радіусовъ, описанныхъ изъ центровъ  $\vartheta = (2m + 1) \frac{\Omega}{2}$ .

Далѣе мы встрѣтимся съ другими подобными-же интегралами, и для избѣжанія недоразумѣній введемъ для нихъ особыя обозначенія. А

именно, интеграль отъ какой-либо функции  $F(\vartheta)$ , взятый по пути, подобному только-что описанному, при помощи котораго обходятся всѣ точки вещественной оси, для которыхъ  $F(\vartheta) = \infty$ , условимся обозначать такъ:

$$\int_0^{\vartheta} F(\vartheta) d\vartheta .$$

Такимъ образомъ для опредѣленія  $P_0$  получаемъ слѣдующую формулу:

$$P_0 = X_0 + X_0' \frac{v'}{v_0''} + v' \int_0^{\vartheta} \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2} d\vartheta . . . (63)$$

Найдя  $P_0$ , получимъ  $Q_0$  по формулѣ:

$$Q_0 = Y_0 + C_1 \vartheta - 2 \int_0^{\vartheta} P_0 d\vartheta . . . . . (64)$$

Здѣсь

$$C_1 = 2X_0 + Y_0' .$$

Предполагая теперь всѣ  $P_m$  и  $Q_m$ , для которыхъ  $m < n$ , извѣстными, составимъ формулы для вычисленія функций  $P_n$  и  $Q_n$ .

Таеъ-какъ при  $\vartheta = 0$  функции эти вмѣстѣ со своими первыми производными должны обращаться въ нуль, то уравненія (60) дадутъ:

$$Q_n' + 2P_n = \int_0^{\vartheta} u Q_{n-1} d\vartheta ,$$

$$P_n' v' - P_n v'' = \int_0^{\vartheta} \left\{ 2 \int_0^{\vartheta} u Q_{n-1} d\vartheta - u P_{n-1} \right\} v' d\vartheta .$$

Положимъ

$$\int_0^{\vartheta} u Q_{n-1} d\vartheta = R_n(\vartheta) = R_n ,$$

$$\int_0^{\vartheta} (2R_n - u P_{n-1}) v' d\vartheta = S_n(\vartheta) = S_n .$$

Тогда, замѣчая, что  $S_n$  и  $S_n'$  обращаются въ нуль при  $\vartheta = 0$ , изъ послѣдняго уравненія найдемъ

$$P_n = v' \int_0^{\vartheta} \frac{S_n d\vartheta}{v'^2}, \dots \dots \dots (65)$$

гдѣ при интегрированіи должно обходить не только всѣ точки типа  $\vartheta = (2m + 1) \frac{\Omega}{2}$ , но также и всѣ точки типа  $\vartheta = m\Omega$ , для которыхъ  $m$  отлично отъ нуля.

Функция  $Q_n$  опредѣлится уравненіемъ:

$$Q_n = \int_0^{\vartheta} R_n d\vartheta - 2 \int_0^{\vartheta} P_n d\vartheta \dots \dots \dots (66)$$

Составимъ формулы для опредѣленія постоянныхъ  $P_n(\Omega)$ ,  $P_n'(\Omega)$ ,  $Q_n(\Omega)$  и  $Q_n'(\Omega)$ , которыя необходимы для вычисленія инвариантовъ  $A$  и  $B$ .

Постоянныя  $P_0(\Omega)$  и  $P_0'(\Omega)$  легко находятся изъ уравненія (63), которое даетъ:

$$P_0(\Omega) = X_0,$$

$$P_0'(\Omega) = X_0' + v_0'' \int_0^{\Omega} \frac{S d\vartheta}{v'^2},$$

гдѣ

$$S = 2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0.$$

Затѣмъ, замѣчая, что интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^{\Omega} P_0 d\vartheta = \Omega X_0 - \int_0^{\Omega} \frac{(v - v_0) S d\vartheta}{v'^2},$$

изъ (64) находимъ:

$$Q_0(\Omega) = Y_0 + (C_1 - 2X_0)\Omega + 2 \int_0^{\Omega} \frac{(v - v_0) S d\vartheta}{v'^2}.$$

Изъ того-же уравненія слѣдуетъ:

$$Q_0'(\Omega) = C_1 - 2X_0.$$

Замѣняя постоянную  $C_1$  ея значеніемъ, получаемъ такимъ образомъ слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned}
 P_0(\Omega) &= X_0, \\
 P_0'(\Omega) &= v_0'' \int_0^\Omega \frac{4(v-v_0) + v'' - v_0''}{v'^2} d\vartheta X_0 + \\
 &\quad + X_0' + 2v_0'' \int_0^\Omega \frac{(v-v_0)d\vartheta}{v'^2} Y_0', \\
 Q_0(\Omega) &= 2 \int_0^\Omega \frac{(v-v_0)[4(v-v_0) + v'' - v_0'']d\vartheta}{v'^2} X_0 + \\
 &\quad + Y_0 + \left\{ \Omega + 4 \int_0^\Omega \frac{(v-v_0)^2 d\vartheta}{v'^2} \right\} Y_0', \\
 Q_0'(\Omega) &= Y_0'.
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

Предположимъ теперь функции  $P_{n-1}$  и  $Q_{n-1}$  для какого-либо  $n$  известными. Тогда изъ (65), принимая въ расчетъ разложения (61), найдемъ:

$$P_n(\Omega) = -\frac{1}{v_0''} S_n(\Omega),$$

послѣ чего изъ (66) найдемъ  $Q_n'(\Omega)$ .

Для опредѣленія  $P_n'(\Omega)$  беремъ уравненіе

$$P_n''v' - P_nv''' = S_n',$$

которое даетъ:

$$P_n'(\Omega) = \int_0^\Omega \frac{P_n}{v'} v''' d\vartheta + \int_0^\Omega \frac{S_n' d\vartheta}{v'}.$$

Отсюда, интегрируя по частямъ, принимая въ расчетъ формулу (65), и замѣчая, что въ силу (61)

$$\lim \left\{ (v'' - v_0'') \int_0^\vartheta \frac{S_n d\vartheta}{v'^2} \right\}_{\vartheta=\Omega} = 0,$$

находимъ:



$$P_n'(\Omega) = - \int_0^{\Omega} \frac{(v'' - v_0'') S_n d\vartheta}{v'^2} + \int_0^{\Omega} \frac{S_n' d\vartheta}{v'}$$

Точно также замѣчая, что

$$\lim_{\vartheta=\Omega} \left\{ (v - v_0) \int_0^{\vartheta} \frac{S_n d\vartheta}{v'^2} \right\} = 0,$$

изъ (66) находимъ:

$$Q_n(\Omega) = \int_0^{\Omega} R_n d\vartheta + 2 \int_0^{\Omega} \frac{(v - v_0) S_n d\vartheta}{v'^2}$$

Когда нѣтъ надобности знать функции  $P_n$  и  $Q_n$ , а вся задача состоитъ только въ опредѣленіи постоянныхъ  $P_n(\Omega)$ ,  $P_n'(\Omega)$  и т. д., то можно избѣжать составленія функции  $S_n$ , что для вычисленій представить нѣкоторыя выгоды.

Съ этою цѣлью находимъ два интеграла:

$$\int_0^{\vartheta} \frac{(v - v_0) d\vartheta}{v'^2} = V$$

и

$$\int_0^{\vartheta} \frac{(v'' - v_0'') d\vartheta}{v'^2} = V_1,$$

знать которые уже необходимо для опредѣленія  $P_0$  по формулѣ (63).

Послѣ этого интегрированіемъ по частямъ найдемъ:

$$\int_0^{\Omega} \frac{(v - v_0) S_n d\vartheta}{v'^2} = V(\Omega) S_n(\Omega) - \int_0^{\Omega} V S_n' d\vartheta,$$

$$\int_0^{\Omega} \frac{(v'' - v_0'') S_n d\vartheta}{v'^2} = V_1(\Omega) S_n(\Omega) - \int_0^{\Omega} V_1 S_n' d\vartheta.$$

Вслѣдствіе этого получаемъ слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned}
 P_n(\Omega) &= -\frac{1}{v_0^n} \int_0^{\Omega} (2R_n - uP_{n-1})v' d\vartheta, \\
 P_n'(\Omega) &= \int_0^{\Omega} (2R_n - uP_{n-1})(1 + V_1v') d\vartheta - \\
 &\quad - V_1(\Omega) \int_0^{\Omega} (2R_n - uP_{n-1})v' d\vartheta, \\
 Q_n(\Omega) &= \int_0^{\Omega} R_n d\vartheta - 2 \int_0^{\Omega} (2R_n - uP_{n-1})Vv' d\vartheta + \\
 &\quad + 2V(\Omega) \int_0^{\Omega} (2R_n - uP_{n-1})v' d\vartheta, \\
 Q_n'(\Omega) &= R_n(\Omega) + \frac{2}{v_0^n} \int_0^{\Omega} (2R_n - uP_{n-1})v' d\vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

Для вычисления по этимъ формуламъ необходимо составить только одну новую функцію

$$R_n = \int_0^{\vartheta} u Q_{n-1} d\vartheta.$$

Когда все постоянныя  $P_n(\Omega)$ ,  $P_n'(\Omega)$  и т. д., которыя будутъ линейными однородными функціями  $X_0, X'_0, Y_0$  и  $Y'_0$ , найдены, инварианты  $A$  и  $B$  опредѣлятся слѣдующимъ образомъ:

Пусть

$$\begin{aligned}
 P_n(\Omega) &= (a, a)_n X_0 + (a, a')_n X'_0 + (a, b)_n Y_0 + (a, b')_n Y'_0, \\
 P_n'(\Omega) &= (a', a)_n X_0 + (a', a')_n X'_0 + (a', b)_n Y_0 + (a', b')_n Y'_0, \\
 Q_n(\Omega) &= (b, a)_n X_0 + (b, a')_n X'_0 + (b, b)_n Y_0 + (b, b')_n Y'_0, \\
 Q_n'(\Omega) &= (b', a)_n X_0 + (b', a')_n X'_0 + (b', b)_n Y_0 + (b', b')_n Y'_0,
 \end{aligned}$$

гдѣ  $(a, a)_n$ ,  $(a, a')_n$  и т. д. извѣстныя постоянныя.

Тогда характеристичное уравненіе, соответствующее періоду  $\Omega$ , будетъ:

$$\left| \begin{array}{cccc} \sum_0^{\infty} (a, a)_n \lambda^n - q, & \sum_0^{\infty} (a', a)_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (b, a)_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (b', a)_n \lambda^n \\ \sum_0^{\infty} (a, a')_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (a', a')_n \lambda^n - q, & \sum_0^{\infty} (b, a')_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (b', a')_n \lambda^n \\ \sum_0^{\infty} (a, b)_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (a', b)_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (b, b)_n \lambda^n - q, & \sum_0^{\infty} (b', b)_n \lambda^n \\ \sum_0^{\infty} (a, b')_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (a', b')_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (b, b')_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (b', b')_n \lambda^n - q \end{array} \right| = 0.$$

Изъ сравненія этого уравненія съ (45) получимъ  $A$  и  $B$  подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ  $\lambda$ .

II. Когда  $\lambda = 0$ , рассматриваемыя здѣсь движенія, очевидно, неустойчивы. Но это не исключаетъ возможности устойчивыхъ движеній для достаточно малыхъ значений  $\lambda$ , ибо при  $\lambda = 0$  всѣ четыре корня характеристичнаго уравненія равны 1.

Предыдущія формулы могутъ служить для рѣшенія вопроса объ устойчивости въ этомъ предположеніи, для чего достаточно составить только немногіе первые члены разложеній  $A$  и  $B$  по восходящимъ степенямъ  $\lambda$ .

Покажемъ, къ чему вообще приводится рѣшеніе этого вопроса.

Изъ формуль (67) находимъ:

$$(a, a)_0 = (a', a')_0 = (b, b)_0 = (b', b')_0 = 1,$$

вслѣдствіе чего наше характеристичное уравненіе будетъ вида:

$$(1 - q)^4 + \sum_1^{\infty} \left\{ K_n (1 - q)^3 + L_n (1 - q)^2 + M_n (1 - q) + N_n \right\} \lambda^n = 0,$$

гдѣ  $K_n, L_n, M_n, N_n$  суть величины, не зависящія ни отъ  $q$ , ни отъ  $\lambda$ .

Но уравненіе это должно приводиться къ виду (45), вслѣдствіе чего между четырьмя величинами  $K_n, L_n, M_n$  и  $N_n$  должны существовать двѣ зависимости:

$$K_n + L_n = -\frac{M_n}{2} = N_n \dots \dots \dots (69)$$

Такимъ образомъ для каждаго значенія  $n$  достаточно вычислить только двѣ величины  $K_n$  и  $N_n$ .

Нетрудно видѣть, что первая опредѣляется формулой

$$K_n = (a, a)_n + (a', a')_n + (b, b)_n + (b', b')_n \dots \dots \dots (70)$$

Что-же касается второй, то замѣчая, что изъ (67) слѣдуетъ

$$(a, a')_0 = 0, (a, b)_0 = 0, (a, b')_0 = 0, (a', b)_0 = 0,$$

$$(b, a')_0 = 0, (b', a)_0 = 0, (b', a')_0 = 0, (b', b)_0 = 0,$$

получаемъ для опредѣленія ея тождественное относительно  $\lambda$  равенство:

$$\sum_1^{\infty} N_n \lambda^n = \begin{vmatrix} \sum_1^{\infty} (a, a)_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (a', a)_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (b, a)_n \lambda^n, & \sum_1^{\infty} (b', a)_n \lambda^n \\ \sum_1^{\infty} (a, a')_n \lambda^n, & \sum_1^{\infty} (a', a')_n \lambda^n, & \sum_1^{\infty} (b, a')_n \lambda^n, & \sum_1^{\infty} (b', a')_n \lambda^n \\ \sum_1^{\infty} (a, b)_n \lambda^n, & \sum_1^{\infty} (a', b)_n \lambda^n, & \sum_1^{\infty} (b, b)_n \lambda^n, & \sum_1^{\infty} (b', b)_n \lambda^n \\ \sum_1^{\infty} (a, b')_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (a', b')_n \lambda^n, & \sum_0^{\infty} (b, b')_n \lambda^n, & \sum_1^{\infty} (b', b')_n \lambda^n \end{vmatrix} \quad (71)$$

Изъ этого равенства находимъ:

$$N_1 = 0,$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} (a, a)_1, & (a', a)_0, & (b, a)_0, & (b', a)_1 \\ (a, a')_1, & 0, & 0, & (b', a')_1 \\ (a, b)_1, & 0, & 0, & (b', b)_1 \\ (a, b')_1, & (a', b')_0, & (b, b')_0, & (b', b')_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a', a)_0, & (b, a)_0 \\ (a', b')_0, & (b, b')_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a, a')_1, & (a, b)_1 \\ (b', a')_1, & (b', b)_1 \end{vmatrix}, \dots \dots (72)$$

и т. д.

Принимая въ расчетъ (69), находимъ для инвариантовъ  $A$  и  $B$  слѣдующія выраженія:

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} K_n \lambda^n, \\ B &= 3 + K_1 \lambda + \frac{1}{2} \sum_2^{\infty} (2K_n + N_n) \lambda^n. \end{aligned} \right\} \dots \dots (73)$$

Вслѣдствіе этого условія (52) приводятся къ виду:

$$\left. \begin{aligned} -4 &< K_1 \lambda + \frac{1}{2} \sum_2^{\infty} (2K_n + N_n) \lambda^n < 0, \\ N_2 \lambda^2 + \left( \frac{1}{4} K_1 N_2 + N_3 \right) \lambda^3 + \dots &> 0, \\ \left( \frac{1}{4} K_1^2 - N_2 \right) \lambda^2 + \left( \frac{1}{2} K_1 K_2 - N_3 \right) \lambda^3 + \dots &> 0, \end{aligned} \right\} \dots (74)$$

гдѣ невыписанные члены содержатъ степени  $\lambda$  выше третьей.

Отсюда видно, что условіями устойчивости разсматриваемыхъ движеній для достаточно малыхъ значеній  $\lambda$  вообще служатъ неравенства:

$$K_1 < 0, \quad 0 < N_2 < \frac{1}{4} K_1^2.$$

Въ предѣльныхъ случаяхъ послѣднихъ должны быть удовлетворены конечно еще другія неравенства, зависящія отъ членовъ высшихъ порядковъ.

Такъ, когда  $N_2 = 0$ , условіями устойчивости вообще служатъ неравенства:

$$K_1 < 0, \quad N_3 > 0 \dots \dots \dots (75)$$

Это послѣднее обстоятельство, какъ увидимъ, представляется въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія. Величина  $N_2$  въ этомъ случаѣ обращается въ нуль вслѣдствіе того, что между  $(a', a)_0$ ,  $(b, a)_0$ ,  $(a', b')_0$  и  $(b, b')_0$  существуетъ соотношеніе

$$\frac{(b, a)_0}{(a', a)_0} = \frac{(b, b')_0}{(a', b')_0}.$$

Пользуясь послѣднимъ и полагая

$$(b, a)_0 = -k(a', a)_0,$$

легко находимъ изъ (71) слѣдующее выраженіе  $N_3$ :

$$N_3 = \begin{vmatrix} (a, a)_1, (a', a)_0, (b, a)_1 + k(a', a)_1, (b', a)_1 \\ (a, a')_1, 0, (b, a')_1 + k(a', a')_1, (b', a')_1 \\ (a, b)_1, 0, (b, b)_1 + k(a', b)_1, (b', b)_1 \\ (a, b')_1, (a', b')_0, (b, b')_1 + k(a', b')_1, (b', b')_1 \end{vmatrix} \dots (76)$$

12. Приложимъ наши формулы къ случаю притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія.

Во всякомъ періодическомъ Лапласовомъ движеніи въ этомъ случаѣ относительная траекторія каждой изъ точекъ по отношенію къ одной изъ двухъ остальныхъ есть эллипсъ, въ фокусѣ котораго находится послѣдняя.

Называя черезъ  $p$  параметръ и черезъ  $\varepsilon$  эксцентриситетъ этого эллипса, будемъ имѣть:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \vartheta},$$

вслѣдствіе чего найдемъ:

$$p^2 v = (1 - \varepsilon \cos \vartheta)^2,$$

$$u = \frac{3}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}.$$

Кромѣ истинной аномаліи  $\vartheta$ , мы будемъ разсматривать также эксцентрическую  $\varphi$ .

Для облегченія интегрированій, которыя намъ придется произвести, полезно имѣть въ виду извѣстныя соотношенія между  $\varphi$  и  $\vartheta$ :

$$1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \vartheta},$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \vartheta}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}, \quad \cos \varphi = \frac{\cos \vartheta - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \vartheta},$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad \frac{d\vartheta}{1 - \varepsilon \cos \vartheta} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Мы предполагаемъ, что уголъ  $\varphi$  обращается въ нуль одновременно съ  $\vartheta$ . При этомъ  $\varphi$  также одновременно съ  $\vartheta$  будетъ обращаться въ каждое значеніе типа  $m\pi$ , гдѣ  $m$  цѣлое.

Періодъ  $\Omega$  въ разсматриваемомъ случаѣ равенъ  $2\pi$ .  
Прежде всего интегрированіемъ уравненій (59) находимъ:

$$P_0 = -C_1 \cos \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta) + C_2 \varepsilon \sin \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta) +$$

$$+ C_3 \left\{ 2 + \varepsilon^2 - 3\varepsilon \cos \vartheta + \frac{3\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \varepsilon \sin \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta) \right\},$$

$$Q_0 = C_1 \sin \vartheta (2 - \varepsilon \cos \vartheta) - C_2 (1 - \varepsilon \cos \vartheta)^2 +$$

$$+ 3C_3 \left\{ \varepsilon \sin \vartheta - \frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} (1 - \varepsilon \cos \vartheta)^2 \right\} + C_4,$$

гдѣ  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  постоянныя, для которыхъ получаемъ слѣдующія выраженія:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{3(1-2\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)} X_0 + \frac{2-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} Y_0', \\ C_3 &= \frac{2-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)} X_0 + \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} Y_0', \\ C_2 &= \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} X_0', \\ C_4 &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} X_0' + Y_0. \end{aligned} \right\} \dots (77)$$

Отсюда, замѣчая, что

$$P_0'(2\pi) = \varepsilon(1-\varepsilon)C_2 + \frac{6\pi\varepsilon(1-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_3,$$

$$Q_0(2\pi) = -(1-\varepsilon)^2 C_2 - \frac{6\pi(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_3 + C_4,$$

находимъ:

$$\left. \begin{aligned} (a', a)_0 &= \frac{6\pi\varepsilon(2-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & (a', b')_0 &= \frac{6\pi\varepsilon(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ (b, a)_0 &= -\frac{6\pi(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & (b, b')_0 &= -\frac{6\pi(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned} \right\} \dots (78)$$

Формулы эти даютъ:

$$\frac{(b, a)_0}{(a', a)_0} = \frac{(b, b')_0}{(a', b')_0} = -\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \dots \dots \dots (79)$$

Загѣмъ составляемъ функцію

$$R_1 = \int_0^{\vartheta} u Q_0 d\vartheta .$$

Находимъ:

$$R_1 = 3C_1 \left( 1 - \cos \vartheta + \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1 - \varepsilon \cos \vartheta}{1 - \varepsilon} \right) - 3C_2 (\vartheta - \varepsilon \sin \vartheta) + \\ + 9C_3 \left( \frac{\varepsilon \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin \vartheta - \int_0^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \right) + 3C_4 \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} .$$

Входящій сюда интеграль не выражается въ конечномъ видѣ, но значеніе его для  $\varphi = 2\pi$  легко находимъ, замѣняя интегральную переменную  $\varphi$  черезъ  $2\pi - \varphi$ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} .$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$R_1(2\pi) = -6\pi C_2 - \frac{18\pi^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} C_3 + \frac{6\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} C_4 \dots \dots (80)$$

Далѣе, замѣчая, что

$$p^2(2R_1 - uP_0)v' = \\ = 6\varepsilon C_1 \left\{ (2 - \cos \vartheta)(1 - \varepsilon \cos \vartheta) \sin \vartheta + \frac{2}{\varepsilon} \log \frac{1 - \varepsilon \cos \vartheta}{1 - \varepsilon} (1 - \varepsilon \cos \vartheta) \sin \vartheta \right\} + \\ + 6\varepsilon C_3 \left\{ \frac{3\varepsilon \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin^2 \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta) - 6 \sin \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta) \int_0^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - \right. \\ \left. - (2 + \varepsilon^2 - 3\varepsilon \cos \vartheta) \sin \vartheta \right\} - \\ - 6\varepsilon C_2 (2\vartheta - \varepsilon \sin \vartheta) (1 - \varepsilon \cos \vartheta) \sin \vartheta + 12\varepsilon C_4 \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} (1 - \varepsilon \cos \vartheta) \sin \vartheta ,$$

находимъ:

$$p^2 \int_0^{2\pi} (2R_1 - uP_0)v' d\vartheta = \\ = 24\pi\varepsilon C_2 + \frac{72\pi^2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} C_3 - 12\pi \left( 1 - \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) C_4 \dots \dots (81)$$



При составлении этой формулы, а также и тѣхъ, съ которыми мы встрѣтимся далѣе, полезно имѣть въ виду, что если  $f(x)$  есть непрерывная и однозначная функція  $x$ , то

$$\int_0^{2\pi} \vartheta f(\cos \vartheta) d\vartheta = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos \vartheta) d\vartheta$$

и

$$\int_0^{2\pi} \varphi f(\cos \vartheta) d\vartheta = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos \vartheta) d\vartheta,$$

какъ нетрудно убѣдиться, замѣняя интегральную переменную  $\vartheta$  черезъ  $2\pi - \vartheta$  и замѣчая, что при этомъ  $\varphi$  переходитъ въ  $2\pi - \varphi$ .

Вслѣдствіе (80) и (81) изъ (68) находимъ:

$$P_1(2\pi) = -\frac{12\pi}{1-\varepsilon} C_2 - \frac{36\pi^2}{(1-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_3 + \frac{6\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left(1 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) C_4,$$

$$Q_1'(2\pi) = 6\pi \frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon} C_2 + \frac{18\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon} C_3 + \frac{6\pi}{\varepsilon} \left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2}{1-\varepsilon}\right) C_4,$$

откуда вслѣдствіе (77) получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} (a, a)_1 &= -\frac{36\pi^2(2-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ (a, a')_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{1-4\varepsilon+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right), \\ (a, b)_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left(1 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right), \\ (a, b')_1 &= -\frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ (b', a)_1 &= \frac{18\pi^2(3+\varepsilon)(2-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ (b', a')_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2-7\varepsilon+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}\right), \\ (b', b)_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon} \left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2}{1-\varepsilon}\right), \\ (b', b')_1 &= \frac{18\pi^2(3+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right\} \dots (82)$$

Далѣе, замѣчая, что изъ формуль

$$\frac{1}{p^2} V = \int_0^{\vartheta} \frac{(v - v_0) d\vartheta}{p^2 v'^2} =$$

$$= \frac{1 - \cos \vartheta}{2\varepsilon(1 + \varepsilon)^2 \sin \vartheta} + \frac{\varepsilon \sin \vartheta}{4(1 + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon \cos \vartheta)} + \frac{3\vartheta}{4(1 + \varepsilon)^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

$$\frac{1}{p^2} V_1 = \int_0^{\vartheta} \frac{(v'' - v_0'') d\vartheta}{p^2 v'^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon(1 + 2\varepsilon^2) \sin^2 \vartheta - (1 - \varepsilon^2)(1 - \cos \vartheta)}{2\varepsilon(1 + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon) \sin \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta)} + \frac{3\varepsilon\vartheta}{2(1 + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon) \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

слѣдуетъ

$$(1 - \varepsilon)(V_1 v' + 1) - 2\varepsilon V v' = \cos \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta),$$

откуда

$$(1 - \varepsilon) V_1(2\pi) - 2\varepsilon V(2\pi) = 0,$$

изъ (68) находимъ:

$$(1 - \varepsilon) P_1'(2\pi) + \varepsilon Q_1(2\pi) = \varepsilon \int_0^{2\pi} R_1 d\vartheta + \int_0^{2\pi} (2R_1 - uP_0) \cos \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta) d\vartheta.$$

Отсюда

$$(1 - \varepsilon) P_1'(2\pi) + \varepsilon Q_1(2\pi) =$$

$$= -3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \vartheta (2 - \varepsilon \cos \vartheta)}{1 - \varepsilon \cos \vartheta} Q_0 d\vartheta - 3 \int_0^{2\pi} \cos \vartheta P_0 d\vartheta =$$

$$= -6\pi \left( \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} \right) C_1 + 6\pi \left( \frac{(1 - \varepsilon)(5 - \varepsilon + 2\varepsilon^2)}{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \frac{5 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \right) C_3.$$

Равенство это въ силу (77) даетъ:

$$(1 - \varepsilon)(a', a')_1 + \varepsilon(b, a')_1 = 0, \dots \dots \dots (83)$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\varepsilon)(a', a)_1 + \varepsilon(b, a)_1 = \\
 & = -\frac{6\pi(3+\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{6\pi(2-\varepsilon)(5-\varepsilon+2\varepsilon^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{18\pi(1-2\varepsilon)}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\
 & (1-\varepsilon)(a', b')_1 + \varepsilon(b, b')_1 = \\
 & = -\frac{12\pi}{\varepsilon^2} + \frac{6\pi(1-\varepsilon)(5-\varepsilon+2\varepsilon^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{6\pi(2-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2}.
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned}} \right\} \dots (84)$$

Намъ остается теперь составить выраженіе для  $Q_1(2\pi)$ . Но такъ-какъ мы встрѣтимъ надобность только въ членахъ этого выраженія, зависящихъ отъ постоянныхъ  $C_2$  и  $C_4$ , то въ послѣдующемъ вычисленіи опускаемъ члены съ постоянными  $C_1$  и  $C_3$ .

Имѣемъ:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} R_1 d\vartheta &= -6\pi^2 C_2 + \frac{6\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_4 + \dots, \\
 2(1+\varepsilon)^2(2R_1 - uP_0)Vv' &= \\
 &= -3C_2(2\vartheta - \varepsilon \sin \vartheta) \left\{ 2(1 - \cos \vartheta)(1 - \varepsilon \cos \vartheta) + \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3\varepsilon\vartheta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin \vartheta(1 - \varepsilon \cos \vartheta) \right\} + \\
 &+ 6C_4 \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ 2(1 - \cos \vartheta)(1 - \varepsilon \cos \vartheta) + \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3\varepsilon\vartheta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin \vartheta(1 - \varepsilon \cos \vartheta) \right\} + \dots, \\
 \int_0^{2\pi} (2R_1 - uP_0)Vv' d\vartheta &= \\
 &= -3\pi^2 \left( \frac{3(1-4\varepsilon+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} + 1 \right) C_2 + \frac{3\pi^2}{(1+\varepsilon)^2} \left( \frac{\varepsilon^2+2\varepsilon-2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + 6 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) C_4 + \dots, \\
 2V(2\pi) \int_0^{2\pi} (2R_1 - uP_0)v' d\vartheta &= \\
 &= \frac{72\pi^2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_2 - \frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left( 1 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) C_4 + \dots,
 \end{aligned}$$

откуда по (68)

$$Q_1(2\pi) = \frac{18\pi^2(1+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_2 - \frac{18\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_4 + \dots,$$

а отсюда вслѣдствіе (77):

$$(b, b)_1 = - \frac{18\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \dots \dots \dots (85)$$

$$(b, a')_1 = - \frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Послѣдняя формула въ силу (83) даетъ:

$$(a', a')_1 = - \frac{36\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \dots \dots \dots (86)$$

Теперь мы имѣемъ всѣ необходимыя формулы для вычисленія величинъ  $K_1$  и  $N_3$ .

Согласно (70), имѣемъ:

$$K_1 = (a, a)_1 + (a', a')_1 + (b, b)_1 + (b', b')_1,$$

и формула эта вслѣдствіе (82), (85) и (86) даетъ:

$$K_1 = - \frac{36\pi^2(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Отсюда видно, что первое изъ условий (75) всегда удовлетворено. Затѣмъ, замѣчая, что изъ (82) и (78) слѣдуетъ

$$\frac{(a, a)_1}{(a, b')_1} = \frac{(b', a)_1}{(b', b')_1} = \frac{(a', a)_0}{(a', b')_0},$$

приводимъ формулу (76) къ виду:

$$N_3 = \begin{vmatrix} 0 & , & (a', a)_0 & , & (b, a)_1 + k(a', a)_1 & , & 0 \\ (a, a')_1 & , & 0 & , & (b, a')_1 + k(a', a')_1 & , & (b', a')_1 \\ (a, b)_1 & , & 0 & , & (b, b)_1 + k(a', b)_1 & , & (b', b)_1 \\ 0 & , & (a', b')_0 & , & (b, b')_1 + k(a', b')_1 & , & 0 \end{vmatrix},$$

гдѣ, согласно (79),  $k = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ .

Отсюда находимъ:

$$N_3 = \left| \begin{array}{cc} (a, a')_1, (b', a')_1 & \left| \begin{array}{c} (a', a)_0, (b, a)_1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}(a', a)_1 \\ (a', b')_0, (b, b')_1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}(a', b')_1 \end{array} \right| \\ (a, b)_1, (b', b)_1 & \end{array} \right|,$$

что вслѣдствіе (78), (82) и (84) приводится къ:

$$N_3 = \left\{ \frac{36\pi^2}{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{1+\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 \right) \right\}^2.$$

Второе изъ условій (75), слѣдовательно, также всегда удовлетворено. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, всякое періодическое Лапласово движеніе устойчиво, если масса одной изъ точекъ достаточно велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ.

13. Обращаемся къ изложенію второго общаго способа вычисленія инвариантовъ  $A$  и  $B$ .

Прежде всего выведемъ нѣкоторыя вспомогательныя формулы.

Положимъ, какъ въ параграфѣ 7,

$$\frac{1}{\varrho} = s, \quad \frac{1}{\varrho_0} = s_0, \quad \frac{1}{\varrho_1} = s_1,$$

$$\int f(\varrho) d\varrho = \varphi(s).$$

Дифференціальное уравненіе, связывающее  $s$  и  $\vartheta$ , будетъ:

$$\left( \frac{ds}{d\vartheta} \right)^2 = h - s^2 - 2g\varphi(s),$$

гдѣ

$$h = \frac{s_0^2\varphi(s_1) - s_1^2\varphi(s_0)}{\varphi(s_1) - \varphi(s_0)}, \quad 2g = \frac{s_0^2 - s_1^2}{\varphi(s_1) - \varphi(s_0)}.$$

Положимъ далѣе

$$\frac{s_0 + s_1}{2} = \sigma, \quad \frac{s_0 - s_1}{s_0 + s_1} = \varepsilon.$$

Когда  $\varepsilon = 0$ , рассматриваемое періодическое движеніе обращается въ постоянное. Вообще  $\varepsilon$  будетъ нѣкоторою положительною правильною

дробью. Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, это есть эксцентриситетъ эллипса, описываемаго каждою изъ трехъ точекъ по отношенію къ одной изъ двухъ остальныхъ.

Введемъ вмѣсто  $\vartheta$  новую независимую переменную  $\psi$ , полагая

$$s = \sigma(1 - \varepsilon \cos \psi),$$

которую опредѣлимъ болѣе точнымъ образомъ условіемъ, чтобы  $\psi$  обращалась въ нуль одновременно съ  $\vartheta$ , и чтобы  $\vartheta$  была возрастающею функціей  $\psi$ , когда послѣдняя переходитъ черезъ вещественныя значенія.

Будемъ имѣть:

$$s_0 = \sigma(1 + \varepsilon), \quad s_1 = \sigma(1 - \varepsilon).$$

Предположимъ функцію  $\varphi(s)$  такою, чтобы функція  $\varphi(\sigma + \zeta)$  при достаточно маломъ  $\zeta$  была разложима въ абсолютно сходящійся рядъ:

$$\varphi(\sigma + \zeta) = \varphi(\sigma) + \zeta \varphi'(\sigma) + \frac{\zeta^2}{1.2} \varphi''(\sigma) + \dots$$

Тогда, означая для сокращенія  $\varphi(\sigma)$ ,  $\varphi'(\sigma)$  и т. д. черезъ  $\varphi$ ,  $\varphi'$  и т. д., и полагая

$$\cos \psi = t,$$

будемъ имѣть слѣдующія разложенія

$$\varphi(s) = \varphi - \sigma \varepsilon t \varphi' + \frac{\sigma^2 \varepsilon^2 t^2}{1.2} \varphi'' - \frac{\sigma^3 \varepsilon^3 t^3}{1.2.3} \varphi''' + \dots,$$

$$\varphi(s_0) = \varphi + \sigma \varepsilon \varphi' + \frac{\sigma^2 \varepsilon^2}{1.2} \varphi'' + \frac{\sigma^3 \varepsilon^3}{1.2.3} \varphi''' + \dots,$$

$$\varphi(s_1) = \varphi - \sigma \varepsilon \varphi' + \frac{\sigma^2 \varepsilon^2}{1.2} \varphi'' - \frac{\sigma^3 \varepsilon^3}{1.2.3} \varphi''' + \dots,$$

абсолютно сходящіяся для всякаго вещественнаго  $\psi$  и для всякаго  $\varepsilon$ , модуль котораго достаточно малъ.

Мы будемъ предполагать, что  $\varphi'(\sigma)$  отлична отъ нуля. Предположеніе это равносильно тому, что  $f\left(\frac{1}{\sigma}\right)$  не нуль.

Полагая

$$\frac{1}{1.2.3 \dots (n+1)} \frac{\sigma^n \varphi^{(n+1)}}{\varphi'} = \Phi_n, \dots \dots \dots (87)$$

вслѣдствіе этихъ разложеній находимъ:

$$g = -\frac{\sigma}{\varphi'} \frac{1}{1 + \sum_1^{\infty} \Phi_{2n} \varepsilon^{2n}} \dots \dots \dots (88)$$

Далѣе, имѣемъ:

$$\begin{aligned} & [\varphi(s_0) - \varphi(s_1)] [h - s^2 - 2g\varphi(s)] = \\ & = 2\sigma^3 \varepsilon^3 \sin^2 \psi (\varphi' - \sigma \varphi'') (1 + T), \dots \dots \dots (89) \end{aligned}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} & (\varphi' - \sigma \varphi'') T = \\ & = \varphi' \sum_1^{\infty} \left\{ 2\Phi_{2n} \frac{1-t^{2n}}{1-t^2} t \varepsilon^{2n-1} + \left( \Phi_{2n} - 2\Phi_{2n+1} \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \right) \varepsilon^{2n} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, замѣчая, что для достаточно малаго  $\varepsilon$

$$\frac{\varphi(s_0) - \varphi(s_1)}{\varphi'} > 0,$$

приходимъ къ заключенію, что для возможности періодическихъ движеній, бесконечно близкихъ къ постоянному, соотвѣтствующему данному  $\sigma$ , необходимо условіе:

$$1 - \frac{\sigma \varphi''}{\varphi'} \geq 0.$$

Это условіе, приводящееся къ виду:

$$3 + \frac{f' \left( \frac{1}{\sigma} \right)}{\sigma f \left( \frac{1}{\sigma} \right)} \geq 0,$$

мы всегда будемъ предполагать удовлетвореннымъ со знакомъ неравенства, ибо случай, когда

$$3 + \frac{f' \left( \frac{1}{\sigma} \right)}{\sigma f \left( \frac{1}{\sigma} \right)} = 0$$

вслѣдствіе выбора нѣкотораго опредѣленнаго значенія  $\sigma$ , не представляетъ интереса. Если же это равенство удовлетворено для всякаго  $\sigma$ , то

$$f(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^3},$$

гдѣ  $\alpha$  постоянная; а въ послѣднемъ случаѣ между Лапласовыми движеніями не можетъ быть періодическихъ.

Полагая

$$\sqrt{1 - \frac{\sigma \varphi''}{\varphi'}} = k,$$

получимъ:

$$k^2 T = \sum_1^{\infty} \left\{ 2\Phi_{2n} \frac{1-t^{2n}}{1-t^2} t \varepsilon^{2n-1} + \left( \Phi_{2n} - 2\Phi_{2n+1} \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \right) \varepsilon^{2n} \right\}. \quad (90)$$

Затѣмъ, полагая

$$\frac{k}{\sqrt{1 + \sum_1^{\infty} \Phi_{2n} \varepsilon^{2n}}} = l, \dots \dots \dots (91)$$

найдемъ:

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = l \sqrt{1+T}, \dots \dots \dots (92)$$

откуда

$$\vartheta = \frac{1}{l} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1+T}},$$

и слѣдовательно

$$\Omega = \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1+T}}.$$

Увеличенію  $\psi$  на  $2\pi$  будетъ соответствовать увеличеніе  $\vartheta$  на  $\Omega$ .

Мы должны еще составить формулы для разложенія функции  $u$ .

Формула (14) даетъ:

$$u = -g \left( 3 \frac{\varphi'(s)}{s} + \varphi''(s) \right).$$

Поэтому замѣчая, что



$$\frac{3\varphi'(s) + s\varphi''(s)}{\varphi'} =$$

$$= 4 - k^2 + \sum_1^{\infty} (-1)^n (n+1) \left( (n+3)\Phi_n + (n+2)\Phi_{n+1} \right) t^n \varepsilon^n,$$

и полагая для сокращения:

$$S = \sum_1^{\infty} (-1)^n (n+1) \left( (n+3)\Phi_n + (n+2)\Phi_{n+1} \right) t^n \varepsilon^n, \dots (93)$$

вслѣдствіе (88) находимъ:

$$u = \frac{4 - k^2 + S}{\left( 1 + \sum_1^{\infty} \Phi_{2n} \varepsilon^{2n} \right) (1 - \varepsilon t)} \dots \dots \dots (94)$$

Положимъ теперь

$$\frac{d\vartheta}{d\psi} = \vartheta' \quad \text{и} \quad \frac{d^2\vartheta}{d\psi^2} = \vartheta''.$$

Тогда преобразования уравненій (29) для независимой переменнѣй  $\psi$  будутъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\psi^2} - \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \frac{dX}{d\psi} - 2\vartheta' \frac{dY}{d\psi} - (1 - \lambda) u \vartheta'^2 X &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{d\psi^2} - \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \frac{dY}{d\psi} + 2\vartheta' \frac{dX}{d\psi} - \lambda u \vartheta'^2 Y &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (95)$$

Коэффициенты въ этихъ уравненіяхъ суть періодическія функціи  $\psi$  съ періодомъ  $2\pi$ . При томъ, для достаточно малыхъ значеній модуля  $\varepsilon$  и для значеній  $\psi$ , достаточно близкихъ къ вещественнымъ, это суть синектичныя функціи  $\psi$  и  $\varepsilon$ . Поэтому къ уравненіямъ (95) можетъ быть приложена общая теорема параграфа 9, если за параметръ  $\alpha$  принять величину  $\varepsilon$ .

Для приложенія этой теоремы къ нашимъ уравненіямъ должно составить разложенія по восходящимъ степенямъ  $\varepsilon$  трехъ функцій:

$$\left. \begin{aligned} k^2 u \vartheta'^2 &= \frac{4 - k^2 + S}{(1 + T)(1 - \varepsilon t)}, \\ k \vartheta' &= \frac{\sqrt{1 + \sum_1^{\infty} \Phi_{2n} \varepsilon^{2n}}}{\sqrt{1 + T}}, \\ k^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta'} &= -\frac{k^2 T'}{2(1 + T)}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (96)$$

гдѣ  $T'$  есть производная функции  $T$  по  $\psi$ .

Пусть

$$\left. \begin{aligned} k^2 u \vartheta'^2 &= 4 - k^2 + \sum_1^{\infty} u_n \varepsilon^n, \\ k \vartheta' &= 1 + \sum_1^{\infty} v_n \varepsilon^n, \\ k^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta'} &= \sin \psi \sum_1^{\infty} w_n \varepsilon^n, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (97)$$

суть эти разложения. На основаніи предыдущихъ формулъ нетрудно убѣдиться, что здѣсь  $u_n$ ,  $v_n$  и  $w_n$  суть рациональныя цѣлыя функции  $t$ , изъ которыхъ первыя двѣ суть  $n$ -ой, послѣдняя  $(n-1)$ -ой степени.

Ряды (97) будутъ абсолютно сходящимися для всякаго  $\psi$ , достаточно близкаго къ какому-либо вещественному значенію, пока  $\text{mod } \varepsilon$  достаточно малъ. Между прочимъ ряды эти будутъ абсолютно сходящимися для всякаго вещественнаго  $\psi$ , пока модуль  $\varepsilon$  менѣе нѣкотораго предѣла  $E$ .

Отсюда на основаніи упомянутой теоремы заключаемъ, что инварианты  $A$  и  $B$  могутъ быть представлены подѣ видомъ рядовъ, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ  $\varepsilon$  и абсолютно сходящихся, пока  $\varepsilon < E$ . Для  $\varepsilon = E$  ряды эти могутъ дѣлаться расходящимися.

Замѣтимъ одно свойство этихъ разложений  $A$  и  $B$ .

Изъ формулъ (90) и (93) видно, что функции

$$T, \quad S, \quad \frac{T'}{\varepsilon \sin \psi}$$

не мѣняются вслѣдствіе одновременной замѣны  $t$  черезъ  $-t$  и  $\varepsilon$  черезъ  $-\varepsilon$ . Поэтому коэффициенты въ уравненіяхъ (95), а слѣдовательно и самыя уравненія не мѣняются при одновременной замѣнѣ  $\varepsilon$  черезъ  $-\varepsilon$  и  $\psi$  черезъ  $\psi + \pi$ .

Отсюда слѣдуетъ, что если

$$X = F(\psi), \quad Y = \Phi(\psi)$$

есть какая-либо система рѣшеній уравненій (95), то

$$X = F(\psi + \pi), \quad Y = \Phi(\psi + \pi)$$

представить нѣкоторую систему рѣшеній для уравненій, получаемыхъ изъ (95) замѣною  $\varepsilon$  черезъ  $-\varepsilon$ .

Отсюда заключаемъ, что корни характеристическаго уравненія, соответствующаго уравненіямъ (95) и періоду  $2\pi$ , при замѣнѣ  $\varepsilon$  черезъ

—  $\varepsilon$  переходят одинъ въ другой, а слѣдовательно инварианты  $A$  и  $B$  при этой замѣнѣ не мѣняются.

Вслѣдствіе этого разложенія  $A$  и  $B$  по восходящимъ степенямъ  $\varepsilon$  будутъ содержать всегда только четныя степени  $\varepsilon$ .

14. Замѣняемъ коэффициенты въ уравненіяхъ (95) ихъ разложеніями (97). Затѣмъ полагаемъ

$$X = \sum_0^{\infty} P_n \varepsilon^n, \quad Y = \sum_0^{\infty} Q_n \varepsilon^n,$$

и рассматриваемъ  $P_n$  и  $Q_n$ , какъ функціи  $\psi$ , не зависящія отъ  $\varepsilon$ . Тогда, означая дифференцированія по  $\psi$  значками, получимъ для опредѣленія этихъ функцій слѣдующія уравненія:

$$\left. \begin{aligned} k^2 P_0'' - 2k Q_0' - (1-\lambda)(4-k^2) P_0 &= 0, \\ k^2 Q_0'' + 2k P_0' - \lambda(4-k^2) Q_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (98)$$

и для  $n > 0$

$$\left. \begin{aligned} k^2 P_n'' - 2k Q_n' - (1-\lambda)(4-k^2) P_n &= S_n, \\ k^2 Q_n'' + 2k P_n' - \lambda(4-k^2) Q_n &= T_n, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (99)$$

гдѣ

$$\left. \begin{aligned} S_n &= (1-\lambda) \sum_{j=0}^{j=n-1} u_{n-j} P_j + \sin\psi \sum_{j=0}^{j=n-1} w_{n-j} P_j' + 2k \sum_{j=0}^{j=n-1} v_{n-j} Q_j', \\ T_n &= \lambda \sum_{j=0}^{j=n-1} u_{n-j} Q_j + \sin\psi \sum_{j=0}^{j=n-1} w_{n-j} Q_j' - 2k \sum_{j=0}^{j=n-1} v_{n-j} P_j'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (100)$$

Непосредственное приложеніе теоремы параграфа 9 требуетъ, чтобы при интегрированіи каждой изъ системъ уравненій (99) постоянныя произвольныя опредѣлялись изъ условія, чтобы функціи  $P_n, P_n', Q_n, Q_n'$  обращались въ нуль для нѣкотораго частнаго значенія  $\psi$ , одного и того-же для всякаго  $n$ , положимъ,  $\psi = 0$ . Если при томъ постоянныя интегрированія уравненій (98) опредѣлены изъ условія, чтобы для  $\psi = 0$  функціи  $P_0, P_0', Q_0, Q_0'$  соответственно принимали значенія  $X_0, X_0', Y_0, Y_0'$ , то постоянныя  $P_n(2\pi), P_n'(2\pi), Q_n(2\pi), Q_n'(2\pi)$  найдутся подъ видомъ линейныхъ и однородныхъ функцій постоянныхъ  $X_0, X_0', Y_0, Y_0'$ . Затѣмъ при помощи коэффициентовъ этихъ функцій

составится характеристическое уравнение, какъ это было показано въ концѣ параграфа 10.

Этотъ способъ вычисленія инвариантовъ  $A$  и  $B$ , вполне аналогичный изложенному въ параграфахъ 10 и 11, можно приложить на примѣръ къ случаю  $k=2$ , когда интегрированіе уравненій (98) и (99) даетъ:

$$P_0 = X_0 + Y_0' + X_0' \sin \psi - Y_0' \cos \psi,$$

$$Q_0 = Y_0 - X_0' + X_0' \cos \psi + Y_0' \sin \psi,$$

и для  $n > 0$ :

$$\begin{aligned} 4P_n &= \int_0^\psi T_n d\psi + \sin \psi \int_0^\psi (S_n \cos \psi - T_n \sin \psi) d\psi - \\ &\quad - \cos \psi \int_0^\psi (S_n \sin \psi + T_n \cos \psi) d\psi, \\ 4Q_n &= - \int_0^\psi S_n d\psi + \sin \psi \int_0^\psi (S_n \sin \psi + T_n \cos \psi) d\psi + \\ &\quad + \cos \psi \int_0^\psi (S_n \cos \psi - T_n \sin \psi) d\psi. \end{aligned}$$

Вообще-же онъ ведетъ къ довольно сложнымъ вычисленіямъ. Поэтому укажемъ на другіе, болѣе общіе способы.

Предыдущій способъ даетъ для  $X$  и  $Y$  выраженія подъ видомъ линейныхъ и однородныхъ функций постоянныхъ  $X_0, X_0', Y_0, Y_0'$ , въ которыхъ коэффициенты суть функции  $\psi$  и  $\varepsilon$ , разлагающіяся въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\varepsilon$ , абсолютно сходящіяся для всякаго вещественнаго  $\psi$ , пока  $\varepsilon < E$ . Замѣнимъ въ этихъ выраженіяхъ постоянныя  $X_0, X_0', Y_0, Y_0'$  линейными и однородными независимыми между собою функциями четырехъ новыхъ постоянныхъ  $C_1, C_2, C_3, C_4$  съ коэффициентами, представляющими ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\varepsilon$  и абсолютно сходящіяся, пока  $\varepsilon < E$ . Тогда получимъ общій интеграль уравненій (95) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + C_4 X_4,$$

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4,$$

гдѣ  $X_j, Y_j$  суть функціи  $\psi$  и  $\varepsilon$ , разлагающіяся въ ряды прежняго вида, абсолютно сходящіяся при томъ-же условіи.

Положимъ

$$\left. \begin{aligned} X_j(\psi + 2\pi) &= (j1)X_1 + (j2)X_2 + (j3)X_3 + (j4)X_4, \\ X_j'(\psi + 2\pi) &= (j1)X_1' + (j2)X_2' + (j3)X_3' + (j4)X_4', \\ Y_j(\psi + 2\pi) &= (j1)Y_1 + (j2)Y_2 + (j3)Y_3 + (j4)Y_4, \\ Y_j'(\psi + 2\pi) &= (j1)Y_1' + (j2)Y_2' + (j3)Y_3' + (j4)Y_4', \end{aligned} \right\} \dots (101)$$

$$(j = 1, 2, 3, 4),$$

гдѣ  $(ji)$  суть нѣкоторые постоянныя.

Если четыре независимыя системы частныхъ рѣшеній  $X_j, Y_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) остаются независимыми и для  $\varepsilon = 0$ , что мы всегда будемъ предполагать, то отсюда, когда разложенія функцій  $X_j, Y_j$  извѣстны, получимъ постоянныя  $(ji)$  подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\varepsilon$  и абсолютно сходящихся при  $\varepsilon$  достаточно маломъ \*).

Положимъ

$$(ji) = \sum_0^{\infty} (ji)_n \varepsilon^n,$$

$$(j, i = 1, 2, 3, 4),$$

и

$$X_j = \sum_0^{\infty} P_{j,n} \varepsilon^n, \quad Y_j = \sum_0^{\infty} Q_{j,n} \varepsilon^n.$$

Тогда для опредѣленія коэффициентовъ  $(ji)_n$  получимъ изъ уравненій (101) слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} (j1)_n P_{1,0} + (j2)_n P_{2,0} + (j3)_n P_{3,0} + (j4)_n P_{4,0} &= G_{j,n}, \\ (j1)_n P_{1,0}' + (j2)_n P_{2,0}' + (j3)_n P_{3,0}' + (j4)_n P_{4,0}' &= G_{j,n}', \\ (j1)_n Q_{1,0} + (j2)_n Q_{2,0} + (j3)_n Q_{3,0} + (j4)_n Q_{4,0} &= H_{j,n}, \\ (j1)_n Q_{1,0}' + (j2)_n Q_{2,0}' + (j3)_n Q_{3,0}' + (j4)_n Q_{4,0}' &= H_{j,n}', \end{aligned} \right\} \dots (102)$$

\*) Радиусъ круга общей сходимости этихъ рядовъ вообще будетъ менѣе  $E$ .

гдѣ

$$G_{j,0} = P_{j,0} (\psi + 2\pi),$$

$$G_{j,n} = P_{j,n} (\psi + 2\pi) - \sum_{l=1}^{l=n} \left\{ (j^1)_{n-l} P_{1,l} + (j^2)_{n-l} P_{2,l} + (j^3)_{n-l} P_{3,l} + (j^4)_{n-l} P_{4,l} \right\},$$

а  $G_{j,n}'$ ,  $H_{j,n}$ ,  $H_{j,n}'$  получаются изъ выраженія  $G_{j,n}$  замѣною буквы  $P$  соответственно черезъ  $P'$ ,  $Q$ ,  $Q'$ .

Когда разложенія  $(j^i)$  найдены, составимъ характеристичное уравненіе:

$$\begin{vmatrix} (11) - q, & (12) & , & (13) & , & (14) \\ (21) & , & (22) - q, & (23) & , & (24) \\ (31) & , & (32) & , & (33) - q, & (34) \\ (41) & , & (42) & , & (43) & , & (44) - q \end{vmatrix} = 0.$$

Сравнивая послѣднее съ (45), найдемъ:

$$2A = (11) + (22) + (33) + (44),$$

$$2B = \left. \begin{aligned} & \left| \begin{matrix} (11), (12) \\ (21), (22) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} (11), (13) \\ (31), (33) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} (11), (14) \\ (41), (44) \end{matrix} \right| + \\ & + \left| \begin{matrix} (22), (23) \\ (32), (33) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} (22), (24) \\ (42), (44) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} (33), (34) \\ (43), (44) \end{matrix} \right| \end{aligned} \right\} . \quad (103)$$

Можно предположить въ упомянутыхъ выше выраженіяхъ  $X_0$ ,  $X_0'$ ,  $Y_0$ ,  $Y_0'$  черезъ постоянныя  $C_1, C_2, C_3, C_4$  коэффициенты цѣлыми функциями  $\varepsilon$  какой-либо степени  $n_1$ . Функции эти могутъ быть взяты произвольно подъ тѣмъ условіемъ, чтобы определитель, составленный изъ нихъ, не обращался въ нуль при  $\varepsilon = 0$ . А надлежащимъ выборомъ этихъ функций можно сдѣлать величины  $P_{j,n}, Q_{j,n}$  для  $n \leq n_1$  какими угодно частными рѣшеніями уравненій (99).

Отсюда видно, что при интегрированіи уравненій (99) можно не стѣснять себя какимъ-либо напередъ поставленнымъ условіемъ для определенія постоянныхъ произвольныхъ до значенія  $n$ , равнаго произвольному числу  $n_1$ . Въ каждомъ частномъ случаѣ постояннымъ этимъ можно приписывать значенія, наиболѣе упрощающія дальнѣйшія вычисленія.

Въ общемъ случаѣ можно наиримѣръ вести вычисленія слѣдующимъ образомъ:

Возьмем общий интеграл уравнений (98) подь слѣдующимъ видомъ:

$$P_0 = C_1 e^{p_1 i \psi} + C_2 e^{p_2 i \psi} + C_3 e^{p_3 i \psi} + C_4 e^{p_4 i \psi},$$

$$Q_0 = C_1 \eta_1 i e^{p_1 i \psi} + C_2 \eta_2 i e^{p_2 i \psi} + C_3 \eta_3 i e^{p_3 i \psi} + C_4 \eta_4 i e^{p_4 i \psi},$$

гдѣ  $i = \sqrt{-1}$ , а  $p_1, p_2, p_3 = -p_1$  и  $p_4 = -p_2$  суть корни уравненія

$$p^4 - p^2 + \lambda(1 - \lambda) \left( \frac{4 - k^2}{k^2} \right)^2 = 0, \dots \dots \dots (104)$$

которые предполагаются здѣсь всеѣ различными. Наконецъ,  $\eta_j$  суть постоянныя, опредѣляемыя формулой

$$\eta_j = \frac{p_j^2 k^2 + (1 - \lambda)(4 - k^2)}{2k p_j}.$$

Изъ разсмотрѣнннхъ формулъ (100) легко убѣждаемся, что интегрированіе каждой изъ системъ уравненій (99) можно затѣмъ вести такъ, чтобы для функций  $P_{j,n}, Q_{j,n}$  получались выраженія вида:

$$P_{j,n} = e^{p_j i \psi} M_{j,n}, \quad Q_{j,n} = e^{p_j i \psi} N_{j,n},$$

гдѣ  $M_{j,n}$  и  $N_{j,n}$  суть рациональныя цѣлыя функции отъ  $\sin \psi, \cos \psi$  и  $\psi$ . Функции эти можно находить по способу неопредѣленныхъ коэффициентовъ, замѣчая, что степень ихъ относительно  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$  будетъ  $n$ , а относительно  $\psi$  — вообще не выше  $n - 1$ .

Пусть  $n_1$  есть наибольшее значеніе  $n$ , до котораго вычисленіе ведется по этому плану. Тогда для  $n \leq n_1$  изъ уравненій (102), очевидно, найдемъ:

$$(jl)_n = 0,$$

если  $j$  и  $l$  различны, и

$$(jj)_n P_{j,0} = P_{j,n}(\psi + 2\pi) - \sum_{l=1}^{l=n} (jj)_{n-l} P_{j,l} \dots \dots \dots (105)$$

Легко видѣть, что вообще можно полагать  $n_1 = \infty$ . Въ самомъ дѣлѣ, если корни характеристичнаго уравненія для всеѣхъ комплексныхъ значеній  $\varepsilon$ , модули которыхъ не превосходятъ нѣкотораго предѣла  $E_1 \leq E$ , различны, то корни эти разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\varepsilon$ , абсолютно сходящіяся, пока  $\varepsilon < E_1$ . Съ другой

стороны изъ самаго характеристичнаго уравненія видно, что если для  $j$  и  $l$  различныхъ и для  $n \leq n_1$

$$(jl)_n = 0,$$

то разложенія эти до членовъ съ  $2n_1$ -ой степенью  $\varepsilon$  включительно суть:

$$\sum_{n=0}^{n=2n_1} (jj)_n \varepsilon^n,$$

$$(j = 1, 2, 3, 4).$$

Такимъ образомъ, если всѣ корни характеристичнаго уравненія для  $\varepsilon = 0$  различны, для чего необходимо и достаточно, чтобы разности между корнями уравненія (104) не были цѣлыми числами, то предполагая  $n_1 = \infty$  и составляя изъ вычисляемыхъ въ этомъ предположеніи величинъ  $(jj)_n$  ряды

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (jj)_n \varepsilon^n, \dots \dots \dots (106)$$

найдемъ, что послѣдніе для достаточно малыхъ значеній  $\varepsilon$  будутъ абсолютно сходящимися и представляютъ разложенія по восходящимъ степенямъ  $\varepsilon$  корней характеристичнаго уравненія.

Радиусомъ круга сходимости этихъ рядовъ будетъ или наименьшій изъ непревосходящихъ  $E$  модулей тѣхъ значеній  $\varepsilon$ , для которыхъ по крайней мѣрѣ одно изъ условий (52) есть равенство, или  $E$ , когда такихъ значеній  $\varepsilon$  не существуетъ.

Замѣтимъ, что для нечетныхъ  $n$  всѣ  $(jj)_n$ , вычисляемыя въ разсматриваемомъ предположеніи, будутъ равны нулю, ибо изъ того обстоятельства, что разложенія  $A$  и  $B$  содержатъ только четныя степени  $\varepsilon$ , слѣдуетъ, что тѣмъ-же свойствомъ будутъ обладать и разложенія (106).

15. Величины  $A$  и  $B$  вообще зависятъ отъ  $\sigma$ . Въ случаѣ-же притяженія, пропорціональнаго какой-либо степени разстоянія, зависимость эта исчезаетъ, потому что, если

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^N},$$

то

$$\varphi' = -\alpha \sigma^{N-2},$$

и формула (87) даетъ:



$$\Phi_n = \frac{(N-2)(N-3)\dots(N-n-1)}{1.2.3\dots(n+1)}.$$

Въ этомъ случаѣ  $A$  и  $B$  зависятъ только отъ трехъ параметровъ:  $N$ ,  $\lambda$  и  $\varepsilon$ .

Уравненіе, которому удовлетворяютъ  $s_0$  и  $s_1$ , если положимъ

$$s = \sqrt{\alpha} g^{\frac{1}{3-N}} \zeta,$$

принимаетъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$\frac{2}{N-1} \zeta^{N-1} - \zeta^2 + h_1 = 0,$$

если  $N \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 1$ , и

$$2 \log \zeta - \zeta^2 + h_1 = 0,$$

если  $N=1$ . Здѣсь  $h_1$  представляетъ произвольное число.

Отсюда видно, что при  $N \geq 3$  въ числѣ Лапласовыхъ движеній не можетъ быть періодическихъ. Напротивъ, при  $N \leq 1$  всѣ Лапласовы движенія суть періодическія.

Покажемъ, какими условіями опредѣляется при разсматриваемомъ законѣ притяженія величина  $E$  — радіусъ круга сходимости разложениій  $A$  и  $B$  по восходящимъ степенямъ  $\varepsilon$ .

Величина  $E$  есть высшій предѣлъ модулей тѣхъ значеній  $\varepsilon$ , для которыхъ при всякомъ вещественномъ  $t$ , лежащемъ между  $-1$  и  $+1$ , ряды (97) суть абсолютно сходящіеся.

Обращаясь къ формуламъ (96), видимъ, что это есть также высшій предѣлъ модулей тѣхъ значеній  $\varepsilon$ , для которыхъ при такихъ-же значеніяхъ  $t$  разложенія функцій

$$\frac{4 - k^2 + S}{1 - \varepsilon t}, \quad T', \dots \dots \dots (107)$$

$$\sqrt{1 + \sum_0^{\infty} \Phi_{2n} \varepsilon^{2n}}, \quad \dots \dots \dots (108)$$

$$(1 + T)^{-1}, \quad (1 + T)^{-\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (109)$$

суть абсолютно сходящіеся.

Замѣчая, что

$$k^2 = 1 - \frac{\sigma \varphi''}{\varphi'} = 3 - N,$$

и принимая въ расчетъ выраженіе (93) для  $S$ , находимъ:

$$\frac{4 - k^2 + S}{1 - \varepsilon t} = \frac{N + 1}{(1 - \varepsilon t)^{3-N}}.$$

Далѣе, изъ (89) получаемъ:

$$1 + T = \frac{4(1 - \varepsilon t)^{N-1} - 2(1 + \varepsilon)^{N-1} - 2(1 - \varepsilon)^{N-1} + [2t + \varepsilon(1 - t^2)][(1 + \varepsilon)^{N-1} - (1 - \varepsilon)^{N-1}]}{2(3 - N)(N - 1)\varepsilon^2(1 - t^2)}.$$

Отсюда видно, что при разсматриваемыхъ значеніяхъ  $t$  разложенія функцій (107) суть абсолютно сходящіяся, пока  $\text{mod } \varepsilon < 1$ .

При томъ-же условіи и разложенія функцій:  $T$  и

$$\frac{(1 + \varepsilon)^{N-1} - (1 - \varepsilon)^{N-1}}{2(N-1)\varepsilon} = 1 + \sum_1^{\infty} \Phi_{2n} \varepsilon^{2n}$$

суть абсолютно сходящіяся.

Поэтому радіусомъ круга сходимости разложенія функціи (108) служитъ или наименьшій изъ непревосходящихъ 1 модулей корней уравненія

$$\frac{(1 + \varepsilon)^{N-1} - (1 - \varepsilon)^{N-1}}{2(N-1)\varepsilon} = 0,$$

или 1, когда уравненіе это такихъ корней не имѣеть. Назовемъ этотъ радіусъ черезъ  $\varepsilon_0$ .

Подобнымъ-же образомъ для всякаго даннаго  $t$ , лежащаго между предѣлами  $-1$  и  $+1$  включительно, радіусомъ круга сходимости разложеній каждой изъ функцій (109) будетъ или наименьшій изъ непревосходящихъ 1 модулей корней уравненія

$$1 + T = 0$$

или 1, если послѣднее не имѣеть такихъ корней. Этотъ радіусъ будетъ нѣкоторою функціей  $t$ , наименьшее значеніе которой въ разсматриваемыхъ предѣлахъ измѣняемости  $t$  назовемъ черезъ  $\varepsilon_1$ .

Наименьшее изъ чиселъ  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  и будетъ  $E$ .

Остановившись на опредѣленіи числа  $E$  для всякаго даннаго  $N$  не будемъ. Замѣтимъ только, что для случая  $3 > N > 2$  предыдущія формулы весьма легко даютъ  $E = 1$ .

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$\Phi_{2n} = -(N-2) \frac{(3-N)(4-N)\dots(2n+1-N)}{1.2.3\dots(2n+1)}$$

всегда отрицательно, а потому при  $\text{mod } \varepsilon < 1$

$$\text{mod} \left( 1 + \sum_1^{\infty} \Phi_{2n} \varepsilon^{2n} \right) > 1 + \sum_1^{\infty} \Phi_{2n} = \frac{2^{N-2}}{N-1}.$$

Точно такъ-же, замѣчая, что  $\Phi_{2n+1}$  въ разсматриваемомъ случаѣ положительно, изъ разложенія (90) при условіи  $\text{mod } \varepsilon < 1$  заключаемъ:

$$\text{mod}(1 + T) > 1 + (T)_{t=\varepsilon=1} = 0.$$

При  $N=2$  конечно также  $E=1$ .

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ наши формулы значительно упрощаются вслѣдствіе того, что  $\Phi_n = 0$ ,  $k=1$ . Уравненіе (92) при этомъ даетъ  $\psi = \vartheta$ .

Уравненія (99) обращаются въ слѣдующія:

$$\frac{d^2 P_n}{d\vartheta^2} - 2 \frac{dQ_n}{d\vartheta} - 3(1-\lambda)P_n = 3(1-\lambda) \sum_{l=0}^{l=n-1} \cos^{n-l} \vartheta P_l,$$

$$\frac{d^2 Q_n}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dP_n}{d\vartheta} - 3\lambda Q_n = 3\lambda \sum_{l=0}^{l=n-1} \cos^{n-l} \vartheta Q_l.$$

**16.** Возможность разложенія  $A$  и  $B$  въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\varepsilon$ , для достаточно малыхъ значеній послѣдняго, позволяетъ рѣшать вопросы объ устойчивости періодическихъ Лапласовыхъ движеній, достаточно близкихъ къ постояннымъ.

Возвращаясь опять къ произвольному закону притяженія, положимъ, что при какихъ-либо данныхъ  $\lambda$  и  $\sigma$  неравенства (52) удовлетворены для  $\varepsilon=0$ . Изъ этого мы заключимъ, что при тѣхъ-же  $\lambda$  и  $\sigma$  неравенства эти удовлетворятся также и для другихъ достаточно малыхъ значеній  $\varepsilon$ . Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, не только постоянное, но и достаточно близкія къ нему непостоянныя періодическія движенія, соотвѣтствующія тому-же  $\sigma$ , устойчивы.

Напротивъ, если при данныхъ  $\lambda$  и  $\sigma$  для  $\varepsilon=0$  удовлетворено хотя одно изъ неравенствъ, противоположныхъ (52), то же будетъ и для достаточно малыхъ значеній  $\varepsilon$ , а слѣдовательно періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, не будутъ устойчивыми.

Когда для  $\varepsilon = 0$  удовлетворяются только нѣкоторыя изъ неравенствъ (52), а остальные переходятъ въ равенства, разсматриваемыя движенія могутъ быть какъ устойчивыми, такъ и неустойчивыми.

Займемся рѣшеніемъ этого вопроса. Но прежде опредѣлимъ всѣ случаи, въ которыхъ только-что упомянутое обстоятельство можетъ представиться.

Неравенства (52) могутъ обращаться въ равенства только въ случаяхъ, когда по крайней мѣрѣ два изъ корней характеристичнаго уравненія дѣлаются равными. А для того, чтобы послѣднее имѣло мѣсто при  $\varepsilon = 0$ , уравненіе (104) должно имѣть по крайней мѣрѣ одну пару корней, разность между которыми есть число цѣлое.

Положимъ

$$\lambda(1 - \lambda) \left( \frac{4 - k^2}{k^2} \right)^2 = \tau.$$

Мы будемъ предполагать  $\tau \leq \frac{1}{4}$ , потому что должны разсмотрѣть только случай, когда корни уравненія (104) вещественны.

Пусть эти корни суть:  $p_1, p_2, -p_1$  и  $-p_2$ .

Предполагая  $p_2 \geq p_1 \geq 0$ , легко убѣдиться, что  $p_1$  и  $p_2$  удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq p_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &\leq p_2 \leq 1. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

Числовыя величины всевозможныхъ разностей, которыя могутъ быть составлены изъ этихъ четырехъ корней, взятыхъ попарно, приводятся къ четыремъ:

$$p_2 - p_1, \quad p_1 + p_2, \quad 2p_1, \quad 2p_2.$$

Предположеніе, что одна изъ этихъ величинъ есть число цѣлое, влечетъ за собою вслѣдствіе (110) одно изъ шести слѣдующихъ равенствъ:

$$p_2 - p_1 = 0,$$

$$p_2 - p_1 = 1,$$

$$p_1 + p_2 = 1,$$

$$2p_1 = 0,$$

$$2p_1 = 1,$$

$$2p_2 = 2.$$

Первое изъ этихъ равенствъ даетъ  $\tau = \frac{1}{4}$ . Изъ второго выводимъ:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1$ , и слѣд.  $\tau = 0$ . Третье требуетъ совмѣстнаго существованія двухъ равенствъ

$$p_2^4 - p_2^2 + \tau = 0,$$

$$(1 - p_2)^4 - (1 - p_2)^2 + \tau = 0,$$

изъ которыхъ въ силу (110) слѣдуетъ:  $p_2 = 1$ ,  $\tau = 0$ . Четвертое приводитъ къ тому-же результату. Пятое даетъ  $\tau = \frac{3}{16}$ , и шестое:  $\tau = 0$ .

Такимъ образомъ получаемъ три слѣдующихъ случая:

$$\text{I. } \tau = \frac{1}{4}; \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{II. } \tau = \frac{3}{16}; \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{III. } \tau = 0; \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 1.$$

Это суть единственно возможные случаи, въ которыхъ для  $\varepsilon = 0$  нѣкоторыя изъ условій (52) обращаются въ равенства, а остальные остаются удовлетворенными.

Равенства эти суть слѣдующія:

$$\text{I. } A^2 = 2(B - 1).$$

$$\text{II. } A^2 = \left(\frac{B+1}{2}\right)^2.$$

$$\text{III. } B = 3, \quad 2(B - 1) = A^2 = \left(\frac{B+1}{2}\right)^2.$$

Случай III возможенъ только при одномъ изъ трехъ предположеній:  $k^2 = 4$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ , изъ которыхъ два послѣднихъ не различаются существенно между собою.

Перваго предположенія разсматривать не будемъ, потому что случай, когда  $k^2 = 4$  вслѣдствіе выбора опредѣленнаго значенія  $\sigma$ , не представляетъ особаго интереса. Если-же  $k^2 = 4$  для всякаго  $\sigma$ , то притяженіе пропорціонально первой степени разстоянія, а въ этомъ случаѣ а priori извѣстно, что всѣ Лапласовы движенія устойчивы.

Въ предположеніи  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$  результатъ извѣстенъ заранее.

Поэтому случая III нѣтъ надобности разсматривать, и вмѣсто этого случая мы разсмотримъ тотъ, когда, при  $k^2$  отличномъ отъ 4,  $\lambda$  есть величина безконечно-малая, ибо здѣсь представляется слѣдующій вопросъ:

Когда  $\lambda$ , не будучи равнымъ нулю, достаточно-мало, неравенства (52), очевидно, удовлетворяются для  $\varepsilon = 0$ . Поэтому періодическія движенія, достаточно близкія къ постояннымъ, въ этомъ случаѣ устойчивы. Пусть  $E_1$  есть высшій предѣлъ, котораго при данныхъ  $\lambda$  и  $\sigma$  не должно превосходить  $\varepsilon$  для сохраненія устойчивости. Величина  $E_1$  будетъ нѣкоторою функціей  $\lambda$  и  $\sigma$ . Когда, при постоянномъ  $\sigma$ ,  $\lambda$  стремится къ нулю, фундація эта приближается къ нѣкоторому предѣлу, который въ иныхъ случаяхъ можетъ быть нулемъ, въ другихъ — отличнымъ отъ нуля. Вопросъ о томъ, когда имѣетъ мѣсто тотъ или другой изъ этихъ двухъ случаевъ, мы и предложимъ себѣ для рѣшенія.

Важность рѣшенія этого вопроса обусловливается тѣмъ, что только въ случаяхъ второго рода существуютъ такія отличныя отъ нуля положительныя числа  $\varepsilon'$  и  $\lambda'$ , что всѣ періодическія движенія, соотвѣтствующія одной и той-же величинѣ  $\sigma$ , для которыхъ  $\varepsilon < \varepsilon'$ , устойчивы, когда  $\lambda$ , будучи отличнымъ отъ нуля, не превосходитъ  $\lambda'$ .

Начнемъ съ разсмотрѣнія случая I.

17. Въ случаѣ I

$$\tau = \lambda(1 - \lambda) \left( \frac{4 - k^2}{k^2} \right)^2 = \frac{1}{4} \dots \dots \dots (111)$$

Такъ-какъ  $\lambda(1 - \lambda)$  не можетъ выходить изъ предѣловъ 0 и  $\frac{1}{4}$ , то  $\tau$  не можетъ превосходить величины  $\frac{1}{4} \left( \frac{4 - k^2}{k^2} \right)^2$ . Поэтому разсматриваемый случай можетъ имѣть мѣсто только при условіи

$$\left( \frac{4 - k^2}{k^2} \right)^2 \geq 1,$$

приводящемся къ

$$k^2 \leq 2.$$

Условіе это и будемъ здѣсь предполагать удовлетвореннымъ.

Мы будемъ разсматривать случай I, какъ предѣльный общаго, когда  $\lambda$  при постоянномъ  $\sigma$  приближается къ нѣкоторому значенію  $\lambda_0$ , удовлетворяющему уравненію (111). Законность такой точки зрѣнія слѣдуетъ изъ того, что согласно теоремѣ параграфа 9 величины  $A$  и  $B$  могутъ быть представлены подъ видомъ абсолютно сходящихся рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ  $\lambda - \lambda'$ , гдѣ  $\lambda'$  произвольное число.

Чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, будемъ считать  $\lambda_0$  не превосходящимъ  $\frac{1}{2}$ .

Положимъ

$$A = \sum_0^{\infty} A_n \varepsilon^{2n}, \quad B = \sum_0^{\infty} B_n \varepsilon^{2n},$$

и начнемъ съ составленія общихъ формулъ для вычисленія четырехъ величинъ:  $A_0, A_1, B_0$  и  $B_1$ .

Формулы (90), (93) и (96), если примемъ въ расчетъ, что  $\Phi_1 = \frac{1-k^2}{2}$ , даютъ слѣдующія выраженія функций  $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ , входящихъ въ разложенія (97):

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{11}t, & v_1 &= v_{11}t, & w_1 &= w_{10}, \\ u_2 &= u_{20} + u_{22}t^2, & v_2 &= v_{20} + v_{22}t^2, & w_2 &= w_{21}t, \end{aligned}$$

гдѣ

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= 3(k^2 - 2\Phi_2) - 2 \frac{4-k^2}{k^2} \Phi_2, \\ v_{11} &= -\frac{1}{k^2} \Phi_2, \\ w_{10} &= \Phi_2, \\ u_{20} &= \frac{4-k^2}{k^2} (2\Phi_3 - \Phi_2), \\ u_{22} &= 2 \frac{4+5k^2}{k^2} \Phi_3 + \frac{3}{k^2} (k^2 - 2\Phi_2)^2 + 15\Phi_2 + \frac{4(4-k^2)}{k^4} \Phi_2^2, \\ v_{20} &= \frac{1}{k^2} \Phi_3 + \frac{k^2-1}{2k^2} \Phi_2, \\ v_{22} &= \frac{1}{k^2} \Phi_3 + \frac{3}{2k^4} \Phi_2^2. \end{aligned} \right\} (112)$$

Постоянная  $w_{21}$  намъ не понадобится.

Вслѣдствіе этого формулы (100) даютъ:

$$\begin{aligned} S_1 &= (1-\lambda)u_{11}t P_0 + w_{10} \sin\psi P_0' + 2k v_{11}t Q_0', \\ T_1 &= \lambda u_{11}t Q_0 + w_{10} \sin\psi Q_0' - 2k v_{11}t P_0', \\ S_2 &= (1-\lambda)[(u_{20} + u_{22}t^2) P_0 + u_{11}t P_1] + \sin\psi (w_{21}t P_0' + w_{10} P_1') + \\ &\quad + 2k [(v_{20} + v_{22}t^2) Q_0' + v_{11}t Q_1'], \\ T_2 &= \lambda [(u_{20} + u_{22}t^2) Q_0 + u_{11}t Q_1] + \sin\psi (w_{21}t Q_0' + w_{10} Q_1') - \\ &\quad - 2k [(v_{20} + v_{22}t^2) P_0' + v_{11}t P_1']. \end{aligned}$$

Будемъ разумѣть въ этихъ формулахъ подъ  $P_n$  и  $Q_n$  какія-либо изъ функций  $P_{j,n}, Q_{j,n}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).

Поэтому положимъ:

$$P_0 = e^{p\psi i}, \quad Q_0 = \eta i e^{p\psi i},$$

гдѣ  $p$  есть одинъ изъ корней уравненія (104), и

$$\eta = \frac{p^2 k^2 + (1-\lambda)(4-k^2)}{2kp}.$$

Тогда для  $S_1$  и  $T_1$  получимъ выраженія вида:

$$S_1 = K e^{(p+1)\psi i} + K' e^{(p-1)\psi i},$$

$$T_1 = L e^{(p+1)\psi i} + L' e^{(p-1)\psi i},$$

гдѣ

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1-\lambda}{2} u_{11} + \frac{p}{2} w_{10} - kp\eta v_{11}, \\ L &= \frac{\lambda}{2} \eta i u_{11} + \frac{p\eta i}{2} w_{10} - kpi v_{11}, \\ K' &= \frac{1-\lambda}{2} u_{11} - \frac{p}{2} w_{10} - kp\eta v_{11}, \\ L' &= \frac{\lambda}{2} \eta i u_{11} - \frac{p\eta i}{2} w_{10} - kpi v_{11}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (113)$$

Вслѣдствіе этого, если будемъ стараться удовлетворить уравненіямъ (99) для  $n = 1$  величинами

$$P_1 = a e^{(p+1)\psi i} + a' e^{(p-1)\psi i},$$

$$Q_1 = b e^{(p+1)\psi i} + b' e^{(p-1)\psi i},$$

то для опредѣленія постоянныхъ  $a, b, a', b'$  получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left. \begin{aligned} [k^2(p+1)^2 + (1-\lambda)(4-k^2)] a + 2k(p+1) i b &= -K, \\ -2k(p+1) i a + [k^2(p+1)^2 + \lambda(4-k^2)] b &= -L, \\ [k^2(p-1)^2 + (1-\lambda)(4-k^2)] a' + 2k(p-1) i b' &= -K', \\ -2k(p-1) i a' + [k^2(p-1)^2 + \lambda(4-k^2)] b' &= -L'. \end{aligned} \right\} \dots \dots (114)$$



Полезно замѣтить, что при замѣнѣ  $p$  черезъ  $-p$  и  $k$  черезъ  $-k$  коэффициенты двухъ первыхъ уравненій переходятъ въ соотвѣтственные коэффициенты двухъ послѣднихъ. То-же происходитъ и при одновременной замѣнѣ  $p$  черезъ  $-p$  и  $i$  черезъ  $-i$ , ибо при этомъ  $\eta$  переходитъ въ  $-\eta$ .

Для  $S_2$  и  $T_2$  получаемъ затѣмъ слѣдующія выраженія:

$$S_2 = (M + M' \cos 2\psi + M'' \sin 2\psi) e^{p\psi i},$$

$$T_2 = (N + N' \cos 2\psi + N'' \sin 2\psi) e^{p\psi i},$$

гдѣ  $M, N, M', N', M'', N''$  суть нѣкоторыя постоянныя. Для вычисления первыхъ двухъ находимъ формулы:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1-\lambda}{2} (2u_{20} + u_{22}) - kp\eta(2v_{20} + v_{22}) + \frac{1-\lambda}{2} (a + a') u_{11} + \\ &+ ki \left( (p+1)b + (p-1)b' \right) v_{11} - \left( (p+1)a - (p-1)a' \right) \frac{w_{10}}{2}, \\ N &= \frac{\lambda}{2} \eta i (2u_{20} + u_{22}) - kpi(2v_{20} + v_{22}) + \frac{\lambda}{2} (b + b') u_{11} - \\ &- ki \left( (p+1)a + (p-1)a' \right) v_{11} - \left( (p+1)b - (p-1)b' \right) \frac{w_{10}}{2}. \end{aligned} \right\} (115)$$

Отсюда видно, что для  $P_2$  и  $Q_2$  можно принять выраженія:

$$P_2 = (\alpha i \psi + \beta + \beta' \cos 2\psi + \beta'' \sin 2\psi) e^{p\psi i},$$

$$Q_2 = (-\eta \alpha \psi + \gamma' \cos 2\psi + \gamma'' \sin 2\psi) e^{p\psi i},$$

при чемъ для опредѣленія постоянныхъ  $\alpha$  и  $\beta$  получаются уравненія:

$$2k(\eta - kp)\alpha - [k^2 p^2 + (1-\lambda)(4-k^2)]\beta = M,$$

$$2k(1-kp\eta)i\alpha + 2kpi\beta = N.$$

Изъ послѣднихъ, припоминая значеніе  $\eta$ , найдемъ:

$$\alpha = \frac{M - N\eta i}{2k(2\eta - kp - kp\eta^2)},$$

или, вслѣдствіе (104)

$$\alpha = \frac{M - N\eta i}{k^3(1-2p^2)\eta} \dots \dots \dots (116)$$

Изъ предыдущихъ выражений функций  $P_n$  и  $Q_n$  слѣдуетъ:

$$P_0(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_0,$$

$$P_1(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_1,$$

$$P_2(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_2 + 2\pi i \alpha e^{2\pi p i} P_0.$$

Поэтому, если величину  $\alpha$ , соответствующую корню  $p_j$ , назовемъ черезъ  $\alpha_j$ , то уравненія (105) дадутъ:

$$(jj)_0 = e^{2\pi p_j i},$$

$$(jj)_1 = 0,$$

$$(jj)_2 = 2\pi i \alpha_j e^{2\pi p_j i}.$$

Замѣтимъ здѣсь, что если по прежнему  $p_3 = -p_1$  и  $p_4 = -p_2$ , то

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_4 = 0,$$

какъ это слѣдуетъ изъ того, что выраженія

$$q_j = (jj)_0 + (jj)_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

$$(j = 1, 2, 3, 4)$$

представляютъ корни характеристичнаго уравненія, и слѣдовательно  $q_1 q_3 = 1$ ,  $q_2 q_4 = 1$ .

Вслѣдствіе этого формулы

$$2A_0 = (11)_0 + (22)_0 + (33)_0 + (44)_0,$$

$$2A_1 = (11)_2 + (22)_2 + (33)_2 + (44)_2,$$

$$2B_0 = (11)_0(33)_0 + (22)_0(44)_0 + [(11)_0 + (33)_0][(22)_0 + (44)_0],$$

$$2B_1 = (11)_0(33)_2 + (11)_2(33)_0 + (22)_0(44)_2 + (22)_2(44)_0 +$$

$$+ [(11)_0 + (33)_0][(22)_2 + (44)_2] + [(22)_0 + (44)_0][(11)_2 + (33)_2],$$

слѣдующія изъ уравненій (103), принимаютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \cos 2\pi p_1 + \cos 2\pi p_2, \\ A_1 &= -2\pi(\alpha_1 \sin 2\pi p_1 + \alpha_2 \sin 2\pi p_2), \\ B_0 &= 1 + 2 \cos 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2, \\ B_1 &= -4\pi(\alpha_1 \sin 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2 + \alpha_2 \sin 2\pi p_2 \cos 2\pi p_1). \end{aligned} \right\} \dots (117)$$

Такимъ образомъ задача о вычисленіи  $A_1$  и  $B_1$  приводится къ вычисленію  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Изъ изложеннаго въ предыдущемъ параграфѣ слѣдуетъ, что въ случаѣ I единственное условіе устойчивости періодическихъ движеній, достаточно близкихъ къ постоянному, выражается неравенствомъ:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \left\{ A^2 - 2(B-1) \right\} > 0,$$

которое должно быть удовлетворено для достаточно малыхъ значеній  $\varepsilon$ . А такъ-какъ

$$A^2 - 2(B-1) = A_0^2 - 2(B_0-1) + 2(A_0A_1 - B_1)\varepsilon^2 + \dots,$$

и

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \left\{ A_0^2 - 2(B_0-1) \right\} = 0,$$

то вообще оно приводится къ слѣдующему:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \left\{ A_0A_1 - B_1 \right\} > 0.$$

Но формулы (117) даютъ

$$A_0A_1 - B_1 = 4\pi \sin \pi(p_1 + p_2) \sin \pi(p_2 - p_1) \left( \alpha_2 \sin 2\pi p_2 - \alpha_1 \sin 2\pi p_1 \right).$$

При томъ имѣемъ:

$$\lim p_1 = \lim p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

а потому послѣднее неравенство можно замѣнить слѣдующимъ:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \left\{ (p_2 - p_1)(\alpha_2 \sin 2\pi p_2 - \alpha_1 \sin 2\pi p_1) \right\} < 0 \dots (118)$$

Полагая

$$\sqrt{2-k^2} = k_1,$$

изъ уравненія (111) находимъ:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} - \frac{k_1\sqrt{2}}{4-k^2} = \frac{(\sqrt{2}-k_1)^2}{2(4-k^2)}.$$

Предположимъ сначала  $k^2$  не равнымъ 2. Тогда, если положимъ

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\zeta^2}{2\sqrt{2}k_1(4-k^2)},$$

и разложимъ  $p_1$  и  $p_2$  въ ряды по восходящимъ степенямъ  $\zeta$ , то выпи-  
сывая только члены съ нулевой и первою степенями  $\zeta$ , получимъ:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\zeta}{\sqrt{2}k^2} + \dots, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}k^2} + \dots$$

Также найдемъ:

$$k^3(1 - 2p_1^2)\eta_1 = 2(\sqrt{2} + k_1)\zeta + \dots,$$

$$k^3(1 - 2p_2^2)\eta_2 = -2(\sqrt{2} + k_1)\zeta + \dots$$

При  $k^2 = 2$ , замѣчая, что  $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ , полагаемъ:

$$\lambda = \frac{1 - \zeta}{2}.$$

При этомъ для предыдущихъ величинъ получимъ разложенія, въ ко-  
торыхъ члены съ первою степенью  $\zeta$  могутъ быть выведены изъ соот-  
вѣтственныхъ членовъ предыдущихъ разложеній, если въ нихъ сдѣла-  
емъ  $k^2 = 2$ .

Поэтому во всякомъ случаѣ найдемъ:

$$p_2 - p_1 = \frac{\sqrt{2}}{k^2} \zeta + \dots,$$

а формула (116) дастъ:

$$\alpha_1 = \frac{\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0}}{2(\sqrt{2} + k_1)\zeta} + \dots,$$

$$\alpha_2 = -\frac{\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0}}{2(\sqrt{2} + k_1)\zeta} + \dots,$$

гдѣ невыписанные члены содержатъ нулевую и положительныя сте-  
пени  $\zeta$ .

Вслѣдствіе этого неравенство (118) приведетъ къ слѣдующему виду:

$$\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0} < 0. \dots \dots \dots (119)$$

При всѣхъ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ мы будемъ разсматривать только одно предѣльное значеніе  $\lambda$ . Поэтому, для сокращенія, переходовъ къ предѣлу означать не будемъ.

Полагаемъ

$$\lambda = \frac{(\sqrt{2} - k_1)^2}{2(4 - k^2)}$$

и соотвѣтственно этому

$$1 - \lambda = \frac{(\sqrt{2} + k_1)^2}{2(4 - k^2)}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\sqrt{2} + k_1}{k}.$$

Тогда вслѣдствіе (112) величины (113) получаютъ слѣдующія выраженія:

$$K = \frac{3(\sqrt{2} + k_1)^2}{4(4 - k^2)} (k^2 - 2\Phi_2) + \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{2} + k_1)k_1}{2k^2} \right) \Phi_2,$$

$$L = \frac{3(\sqrt{2} - k_1)ki}{4(4 - k^2)} (k^2 - 2\Phi_2) + \left( \frac{k_1}{2k} + \frac{\sqrt{2} + k_1}{2\sqrt{2}k} \right) i \Phi_2,$$

$$K' = \frac{3(\sqrt{2} + k_1)^2}{4(4 - k^2)} (k^2 - 2\Phi_2) - \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2} + k_1)k_1}{2k^2} \right) \Phi_2,$$

$$L' = \frac{3(\sqrt{2} - k_1)ki}{4(4 - k^2)} (k^2 - 2\Phi_2) + \left( \frac{k_1}{2k} - \frac{\sqrt{2} + k_1}{2\sqrt{2}k} \right) i \Phi_2,$$

а уравненія (114) дадутъ:

$$a = - \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{2k^2(4 - k^2)} \left( k_1 + \sqrt{2} + \frac{4 - k^2}{2} \right) (k^2 - 2\Phi_2) - \frac{\Phi_2}{2\sqrt{2}k^2},$$

$$a' = - \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2k^2(4 - k^2)} \left( k_1 + \sqrt{2} - \frac{4 - k^2}{2} \right) (k^2 - 2\Phi_2) + \frac{\Phi_2}{2\sqrt{2}k^2},$$

$$b = - \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{2k^3} \left( \frac{\sqrt{2} + k_1}{2} + \frac{k^2}{4 - k^2} \right) i (k^2 - 2\Phi_2) - \frac{(\sqrt{2} + k_1)i}{2\sqrt{2}k^3} \Phi_2,$$

$$b' = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2k^3} \left( \frac{\sqrt{2} + k_1}{2} - \frac{k^2}{4 - k^2} \right) i (k^2 - 2\Phi_2) + \frac{(\sqrt{2} + k_1)i}{2\sqrt{2}k^3} \Phi_2.$$

Отсюда:

$$a + a' = -\frac{3(k^2 + 2\sqrt{2}k_1)}{2k^2(4 - k^2)}(k^2 - 2\Phi_2),$$

$$b + b' = -\frac{3(k_1 + \sqrt{2})(k^2 - 2\sqrt{2}k_1)i}{2k^3(4 - k^2)}(k^2 - 2\Phi_2),$$

$$(\sqrt{2} + 1)a + (\sqrt{2} - 1)a' = -\frac{3(k_1 + \sqrt{2})}{k^2(4 - k^2)}(k^2 - 2\Phi_2) - \frac{\Phi_2}{\sqrt{2}k^2},$$

$$(\sqrt{2} + 1)b - (\sqrt{2} - 1)b' = -\frac{3(k_1 + \sqrt{2})i}{2k^3}(k^2 - 2\Phi_2) - \frac{(\sqrt{2} + k_1)i}{k^3}\Phi_2,$$

$$(\sqrt{2} + 1)b + (\sqrt{2} - 1)b' = -\frac{3i}{k(4 - k^2)}(k^2 - 2\Phi_2) - \frac{(\sqrt{2} + k_1)i}{\sqrt{2}k^3}\Phi_2,$$

$$(\sqrt{2} + 1)a - (\sqrt{2} - 1)a' = -\frac{3}{2k^2}(k^2 - 2\Phi_2) - \frac{\Phi_2}{k^2}.$$

Вследствие этого, принимая въ расчетъ (112), изъ (115) находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\sqrt{2} + k_1} &= \frac{\sqrt{2} + k_1}{4(4 - k^2)}(2u_{20} + u_{22}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(2v_{20} + v_{22}) - \\ &- \frac{9(\sqrt{2} + k_1)(k^2 + 2\sqrt{2}k_1)}{8k^2(4 - k^2)^2}(k^2 - 2\Phi_2)^2 - \frac{\sqrt{2} + k_1}{4k^4}\Phi_2^2 + \\ &+ \frac{3[\sqrt{2}k^2 + (4 + k^2)k_1]}{4k^4(4 - k^2)}\Phi_2(k^2 - 2\Phi_2), \\ -\frac{Ni}{k} &= \frac{\sqrt{2} - k_1}{4(4 - k^2)}(2u_{20} + u_{22}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(2v_{20} + v_{22}) - \\ &- \frac{9(\sqrt{2} - k_1)(k^2 - 2\sqrt{2}k_1)}{8k^2(4 - k^2)^2}(k^2 - 2\Phi_2)^2 - \frac{\sqrt{2} - k_1}{4k^4}\Phi_2^2 + \\ &+ \frac{3[\sqrt{2}k^2 - (4 + k^2)k_1]}{4k^4(4 - k^2)}\Phi_2(k^2 - 2\Phi_2), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{M - N\eta i}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + k_1)} = \frac{2u_{20} + u_{22}}{2(4 - k^2)} - (2v_{20} + v_{22}) - \frac{\Phi_2^2}{2k^4} - \frac{9(k^2 - 2\Phi_2)^2}{4k^2(4 - k^2)} + \frac{3\Phi_2(k^2 - 2\Phi_2)}{2k^2(4 - k^2)}.$$

Вслѣдствіе (112) равенство это принимаетъ окончательно слѣдующій видъ:

$$\frac{4 - k^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + k_1)} (M - N\eta i) = 6\Phi_3 + (8 + k^2)\Phi_2 - \frac{3}{4}k^2 - \frac{6}{k^2}\Phi_2^2.$$

Такимъ образомъ условіе (119) приводится къ слѣдующему:

$$\frac{6}{k^2}\Phi_2^2 + \frac{3}{4}k^2 - (8 + k^2)\Phi_2 - 6\Phi_3 > 0 \dots (120)$$

Въ случаѣ I при выполненіи этого условія для какого-либо даннаго  $\sigma$ , соотвѣтствующія послѣднему непостоянныя періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, устойчивы. При выполненіи противоположнаго условія — неустойчивы.

Когда условіе (120) обращается въ равенство, рѣшеніе вопроса объ устойчивости требуетъ дополнительнаго изслѣдованія, на которомъ останавливаться не будемъ.

Разсмотримъ періодическія движенія, соотвѣтствующія какому-либо значенію  $\sigma$ , для котораго неравенство (120) удовлетворено.

Вслѣдствіе выполненія этого условія можно найти такое отличное отъ нуля и не превосходящее  $E$  число  $E_1$ , что при  $\lambda = \lambda_0$  неравенства (52) будутъ удовлетворены, пока  $0 < \varepsilon < E_1$ .

Тогда всякому  $\varepsilon$ , лежащему между предѣлами 0 и  $E_1$  неключительно, будетъ соотвѣтствовать періодическое движеніе, устойчивое не только при  $\lambda = \lambda_0$ , но и при всякомъ  $\lambda$ , достаточно близкомъ къ  $\lambda_0$ .

Пусть  $\lambda$  имѣетъ какое-либо данное значеніе, достаточно близкое къ  $\lambda_0$ . Если это значеніе менѣе  $\lambda_0$ , всѣ періодическія движенія, для которыхъ  $\varepsilon$  достаточно мало, будутъ устойчивы. Напротивъ, если оно болѣе  $\lambda_0$ , періодическія движенія будутъ устойчивы, только пока  $\varepsilon$  заключается между нѣкоторыми предѣлами, изъ которыхъ низшій навѣрно не нуль, ибо при  $\frac{1}{2} > \lambda > \lambda_0$  періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, неустойчивы.

Такимъ образомъ, при выполненіи извѣстныхъ условій, устойчивыя періодическія движенія существуютъ только между достаточно удаленными отъ постояннаго.

Для притяженія, обратно пропорціональнаго  $N$ -ой степени разстоянія

$$k^2 = 3 - N, \quad \Phi_2 = \frac{(N-2)(N-3)}{6}, \quad \Phi_3 = \frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{24},$$

вслѣдствіе чего условіе (120) приводится къ виду:

$$(3 - N)(N^2 - 1) > 0.$$

Такъ-какъ періодическія движенія возможны только при  $N < 3$ , а рассматриваемый случай I — только при  $N \geq 1$ , то условіе это будетъ удовлетворено для всякихъ значеній  $N$ , которыя должны быть принимаемы въ расчетъ въ случаѣ I, за исключеніемъ  $N = 1$ .

Что-же касается послѣдняго значенія  $N$  (для котораго  $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ ), то для него при  $\lambda = \lambda_0$  равенство

$$A^2 - 2(B - 1) = 0$$

будетъ имѣть мѣсто для всякаго  $\epsilon$ , какъ это слѣдуетъ изъ найденныхъ въ параграфѣ 4 формулъ (33) и (35), которыми для  $N = 1$  опредѣляются функции  $X$  и  $Y$  въ предположеніи  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Изъ формулъ этихъ видно, что упомянутыя функции будутъ типа

$$\left( P_1(\vartheta) + \vartheta Q_1(\vartheta) \right) \cos \vartheta + \left( P_2(\vartheta) + \vartheta Q_2(\vartheta) \right) \sin \vartheta,$$

гдѣ  $P_j(\vartheta)$  и  $Q_j(\vartheta)$  суть періодическія функции  $\vartheta$  съ періодомъ  $\Omega$ .

Поэтому для  $N = 1$  Лапласовы движенія при  $\lambda = \lambda_0$  неустойчивы. Переходимъ къ случаю II.

18. Въ случаѣ II

$$\tau = \lambda(1 - \lambda) \left( \frac{4 - k^2}{k^2} \right)^2 = \frac{3}{16} \dots \dots \dots (121)$$

Поэтому онъ возможенъ только при условіи

$$\left( \frac{4 - k^2}{k^2} \right)^2 \geq \frac{3}{4},$$



изъ котораго слѣдуетъ или

$$k^2 \leq 8(2 - \sqrt{3}), \dots \dots \dots (122)$$

или

$$k^2 \geq 8(2 + \sqrt{3}).$$

Предполагая условіе это выполненнымъ, будемъ разсматривать случай II, подобно предыдущему, какъ предѣльный общаго, когда  $\lambda$  при постоянномъ  $\sigma$  приближается къ одному изъ корней уравненія (121). Корень этотъ назовемъ черезъ  $\lambda_1$ .

Полагая

$$\pm \sqrt{k^4 - 32k^2 + 64} = R,$$

найдемъ:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{R}{4(4 - k^2)}.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ устойчивость періодическихъ движеній, достаточно близкихъ къ постоянному, опредѣляется знакомъ выраженія

$$\lim \left\{ \left( \frac{B+1}{2} \right)^2 - A^2 \right\}_{\lambda=\lambda_1}$$

при достаточно малыхъ значеніяхъ  $\varepsilon$ . А такъ-какъ

$$\left( \frac{B+1}{2} \right)^2 - A^2 = \left( \frac{B_0+1}{2} \right)^2 - A_0^2 + \left( \frac{B_0+1}{2} B_1 - 2A_0A_1 \right) \varepsilon^2 + \dots,$$

и

$$\lim \left\{ \left( \frac{B_0+1}{2} \right)^2 - A_0^2 \right\}_{\lambda=\lambda_1} = 0,$$

то знакъ послѣдняго для такихъ значеній  $\varepsilon$  вообще будетъ опредѣляться знакомъ выраженія

$$\lim \left\{ \frac{B_0+1}{2} B_1 - 2A_0A_1 \right\}_{\lambda=\lambda_1}.$$

Движенія эти будутъ устойчивы или неустойчивы, смотря по тому, положительно или отрицательно это выраженіе.

Вслѣдствіе формуль (117) имѣемъ:

$$\begin{aligned} & \frac{B_0 + 1}{2} B_1 - 2A_0A_1 = \\ & = 4\pi \sin 2\pi p_1 \sin 2\pi p_2 (\alpha_1 \cos 2\pi p_1 \sin 2\pi p_2 + \alpha_2 \cos 2\pi p_2 \sin 2\pi p_1) . \end{aligned}$$

Пусть  $p_2 > p_1 > 0$ . Тогда, съ приближеніемъ  $\lambda$  къ  $\lambda_1$ ,  $p_1$  будетъ приближаться къ  $\frac{1}{2}$ , а  $p_2$  — къ  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Поэтому найдемъ:

$$\lim \eta_1 = \frac{8 - k^2 - R}{4k}, \quad \lim \eta_2 = \frac{8 + k^2 - R}{4\sqrt{3}k} .$$

Отсюда видно, что знаменатель въ выраженіи (116) стремится къ отличному отъ нуля предѣлу какъ въ случаѣ  $p = p_1$ , такъ и въ случаѣ  $p = p_2$ .

Кромѣ того, изъ уравненій (114) видно, что въ случаѣ  $p = p_2$  предѣльныя величины  $a, b, a', b'$  конечны.

Отсюда заключаемъ, что предѣльное значеніе  $\alpha_2$  при  $\lambda = \lambda_1$  конечно. А потому имѣемъ:

$$\begin{aligned} & \lim \left\{ \frac{B_0 + 1}{2} B_1 - 2A_0A_1 \right\} = \\ & = \lim 4\pi \alpha_1 \sin 2\pi p_1 \cos 2\pi p_1 \sin^2 2\pi p_2 = 4\pi^2 \sin^2 \sqrt{3} \pi \lim \alpha_1 (2p_1 - 1) . \end{aligned}$$

Далѣе мы будемъ имѣть дѣло только съ величинами, относящимися къ корню  $p = p_1$ . Поэтому значка 1, указывающаго на этотъ корень, приписывать не будемъ.

Согласно (116), имѣемъ:

$$\lim \alpha (2p - 1) = \frac{2}{k^3} \lim \frac{(2p - 1)(M - N\eta i)}{\eta} .$$

Далѣе, замѣчая, что предѣльныя величины  $a$  и  $b$ , слѣдующія изъ уравненій (114), конечны, по формуламъ (115) находимъ:

$$\lim (2p - 1)M = \lim (2p - 1) \left\{ \frac{1 - \lambda}{2} a' u_{11} + (p - 1)kib' v_{11} + (p - 1)a' \frac{w_{10}}{2} \right\} ,$$

$$\lim (2p - 1)N = \lim (2p - 1) \left\{ \frac{\lambda}{2} b' u_{11} - (p - 1)kia' v_{11} + (p - 1)b' \frac{w_{10}}{2} \right\} .$$

Уравненія (114) даютъ:

$$\lim \frac{b'}{a'} = i \lim \frac{k^2(p-1)^2 + (1-\lambda)(4-k^2)}{2k(p-1)} = -i \lim \eta,$$

$$a' = \frac{2k(p-1)iL' - [k^2(p-1)^2 + \lambda(4-k^2)]K'}{k^4(p-1)^4 - k^4(p-1)^2 + \lambda(1-\lambda)(4-k^2)^2}.$$

Знаменатель послѣдняго выраженія въ силу уравненія (104) приводится къ

$$2k^4p(1-p)(2p-1).$$

Поэтому, замѣчая, что въ силу того-же уравненія

$$\eta = \frac{2kp}{k^2p^2 + \lambda(4-k^2)},$$

находимъ:

$$\lim (2p-1) a' = -\frac{2}{k^3} \lim \frac{K' + L'\eta i}{\eta}.$$

Отсюда, припоминая значенія величинъ  $K'$  и  $L'$  (формулы (113)), получаемъ:

$$\lim (2p-1)M = \lim K'(2p-1)a',$$

$$\lim (2p-1)N = -\lim L'(2p-1)a',$$

$$\lim (2p-1)(M - N\eta i) = -\frac{2}{k^3} \lim \frac{(K' + L'\eta i)^2}{\eta}.$$

Если-же будемъ разумѣть подъ  $K'$ ,  $L'$ ,  $\eta$  предѣльные значенія, то принимая въ расчетъ (112), найдемъ:

$$K' + L'\eta i = \left( \frac{1-\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} \eta^2 \right) u_{11} - \frac{1-\eta^2}{4} \Phi_2 = -\frac{3kR\eta}{16(4-k^2)} (k^2 - 2\Phi_2).$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\lim \left\{ \frac{B_0 + 1}{2} B_1 - 2A_0A_1 \right\} = -\frac{9}{16} \frac{\pi^2 \sin^2 \sqrt{3} \pi}{k^4(4-k^2)^2} R^2(k^2 - 2\Phi_2)^2.$$

Отсюда видимъ, что въ случаѣ II періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, вообще неустойчивы. Сомнительными остаются

только тѣ случаи, когда  $R^2(k^2 - 2\Phi_2)^2 = 0$ , т. е. когда имѣеть мѣсто одно изъ трехъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} k^2 - 2\Phi_2 &= 0, \\ k^2 &= 8(2 - \sqrt{3}), \\ k^2 &= 8(2 + \sqrt{3}). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (123)$$

Изъ нихъ двумя послѣдними опредѣляются предѣлы, между которыми не должно лежать  $k^2$  для возможности случая II.

Когда первое изъ этихъ трехъ равенствъ удовлетворено для всякаго  $\sigma$ , то замѣчая, что при  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  оно приводится къ

$$\rho^2 f''(\rho) + 3\rho f'(\rho) - 3f(\rho) = 0,$$

находимъ

$$f(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^3} + \beta\rho,$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\beta$  постоянныя.

Вопросъ объ устойчивости періодическихъ движеній при этомъ законѣ притяженія мы уже разсматривали въ параграфѣ 5. Изъ изложеннаго тамъ легко вывести, что въ случаѣ II при этомъ законѣ притяженія всѣ періодическія движенія устойчивы.

Когда удовлетворяется для всякаго  $\sigma$  одно изъ двухъ равенствъ (123), имѣемъ:

$$f(\rho) = \alpha \rho^{13 \mp 8\sqrt{3}},$$

( $\alpha$  — постоянная), гдѣ верхній знакъ относится къ первому, нижній — ко второму изъ этихъ двухъ равенствъ. Остановливаясь на рѣшеніи вопроса объ устойчивости при этомъ законѣ притяженія не будемъ.

Для притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія,  $k^2 = 1$ , и слѣдовательно условіе (122) удовлетворено. Случай II поэтому возможенъ для этого закона притяженія.

Обращаемся къ случаю бесконечно-малаго  $\lambda$ .

19 Для изслѣдованія устойчивости періодическихъ движеній, достаточно близкихъ къ постоянному, въ предположеніи бесконечно-малаго  $\lambda$  можно было-бы воспользоваться, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, общими формулами параграфа 17. Но мы предпочитаемъ дать еще одинъ примѣръ вычисленія при помощи формулъ параграфовъ 10 и 11.

Возвращаясь къ обозначеніямъ этихъ параграфовъ, составимъ первый членъ разложенія по восходящимъ степенямъ  $\varepsilon$  величины  $N_2$ , опредѣляемой формулою (72).

Полагая

$$\int_0^{\Omega} \frac{v-v_0}{v'^2} d\vartheta = V,$$

$$\int_0^{\Omega} \frac{v''-v_0''}{v'^2} d\vartheta = V_1,$$

$$\int_0^{\Omega} \frac{(v-v_0)^2}{v'^2} d\vartheta = V_2,$$

изъ формуль (67) выводимъ:

$$(a', a)_0 = 4v_0'' V + v_0'' V_1,$$

$$(a', b')_0 = 2v_0'' V,$$

$$(b, b')_0 = \Omega + 4V_2,$$

$$(b, a)_0 = 2(b, b')_0 - (a', b')_0.$$

Чтобы найти величины  $(a, a')_1$ ,  $(a, b)_1$ ,  $(b', a')_1$ ,  $(b', b)_1$ , полагаемъ  $X_0 = Y_0' = 0$ . Тогда изъ (63) и (64) найдемъ:

$$P_0 = X_0' \frac{v'}{v_0''}, \quad Q_0 = Y_0 - 2X_0' \frac{v-v_0}{v_0''},$$

а замѣчая, что

$$\int_0^{\Omega} R_1 v' d\vartheta = - \int_0^{\Omega} (v-v_0) R_1' d\vartheta = - \int_0^{\Omega} u(v-v_0) Q_0 d\vartheta,$$

изъ (68) получимъ:

$$P_1(\Omega) = \frac{X_0'}{v_0''^2} \left\{ \int_0^{\Omega} u v'^2 d\vartheta - 4 \int_0^{\Omega} u(v-v_0)^2 d\vartheta \right\} + \frac{2Y_0}{v_0''} \int_0^{\Omega} u(v-v_0) d\vartheta,$$

$$Q_1(\Omega) = Y_0 \int_0^{\Omega} u d\vartheta - \frac{2X_0'}{v_0''} \int_0^{\Omega} u(v-v_0) d\vartheta - 2P_1(\Omega).$$

Отсюда

$$(a, a')_1 = \frac{1}{v_0'^2} \int_0^{\Omega} u v'^2 d\vartheta - \frac{4}{v_0''^2} \int_0^{\Omega} u (v-v_0)^2 d\vartheta,$$

$$(a, b)_1 = \frac{2}{v_0''} \int_0^{\Omega} u (v-v_0) d\vartheta,$$

$$(b', a')_1 = -(a, b)_1 - 2(a, a')_1,$$

$$(b', b)_1 = \int_0^{\Omega} u d\vartheta - 2(a, b)_1.$$

Здѣсь

$$v - v_0 = s^2 - s_1^2 = 2\sigma^2\varepsilon(1-t) - \sigma^2\varepsilon^2\sin^2\psi,$$

откуда, согласно (92),

$$v' = 2\sigma^2 l \varepsilon (1-\varepsilon t) \sin \psi \sqrt{1+T},$$

и слѣдовательно

$$\frac{d\vartheta}{v'^2} = \frac{(1-\varepsilon t)^{-2} (1+T)^{-\frac{3}{2}} d\psi}{4\sigma^4 l^3 \varepsilon^2 \sin^2 \psi}.$$

При помощи формулъ (90), ... (94) разлагаемъ все разсматриваемыя величины въ ряды по восходящимъ степенямъ  $\varepsilon$ .

Полагая

$$k^2 - \frac{5}{2} \Phi_2 + \frac{5}{2k^2} \Phi_2^2 + 2\Phi_3 = F,$$

$$k^2 - 2\Phi_2 + \frac{5}{2k^2} \Phi_2^2 + \Phi_3 = G,$$

находимъ:

$$l^3 \frac{d\vartheta}{v'^2} = \frac{d\psi}{4\sigma^4 \sin^2 \psi} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{(2k^2 - 3\Phi_2)t d\psi}{4\sigma^4 k^2 \sin^2 \psi} \frac{1}{\varepsilon} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{3F d\psi}{4\sigma^4 k^2 \sin^2 \psi} - \frac{3G d\psi}{4\sigma^4 k^2} + \dots, \\ &\dots \dots \dots (124) \end{aligned} \right\}$$

$$l = k + \dots,$$

$$\frac{(v-v_0)d\vartheta}{v'^2} = \frac{(1-t)d\psi}{2\sigma^2 k^3 \sin^2 \psi} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{(2k^2-3\Phi_2)(1-t)d\psi}{2\sigma^2 k^5 \sin^2 \psi} + \frac{3(k^2-2\Phi_2)d\psi}{4\sigma^2 k^5} + \dots,$$

$$\frac{(v-v_0)^2 d\vartheta}{v'^2} = \frac{(1-t)^2 d\psi}{k^3 \sin^2 \psi} + \dots,$$

$$d\vartheta = \frac{d\psi}{k} + \dots, \quad u = 4 - k^2 + \dots,$$

$$v' = 2\sigma^2 k \varepsilon \sin \psi + \dots, \quad v_0'' = 2\sigma^2 k^2 \varepsilon + \dots$$

Отсюда

$$V = \frac{3\pi(k^2-2\Phi_2)}{2\sigma^2 k^5} + \dots, \quad V_2 = -\frac{2\pi}{k^3} + \dots, \quad \Omega = \frac{2\pi}{k} + \dots,$$

$$\int_0^{\Omega} u d\vartheta = \frac{2\pi}{k} (4-k^2) + \dots,$$

$$\int_0^{\Omega} u(v-v_0) d\vartheta = \frac{4\pi}{k} (4-k^2) \sigma^2 \varepsilon + \dots,$$

$$\int_0^{\Omega} u v'^2 d\vartheta = 4\pi k (4-k^2) \sigma^4 \varepsilon^2 + \dots,$$

$$\int_0^{\Omega} u(v-v_0)^2 d\vartheta = 12\pi \frac{4-k^2}{k} \sigma^4 \varepsilon^2 + \dots$$

Для вычисления интеграла  $V_1$  замѣчаемъ, что при интегрированіи въ разсматриваемыхъ предѣлахъ періодическіе члены разложенія неопредѣленнаго интеграла

$$\int \frac{v''-v_0''}{v'^2} d\vartheta$$

исчезаютъ. Поэтому, принимая въ расчетъ, что интеграль

$$\int \frac{v'' d\vartheta}{v'^2} = -\frac{1}{v'} + \text{const.}$$

можетъ содержать только періодическіе члены, и что такіе-же члены даетъ интегрированіе трехъ первыхъ членовъ выраженія (124), находимъ:

$$V_1 = \frac{v_0''}{l^3} \frac{3\pi G}{2\sigma^4 k^2} + \dots = \frac{3\pi G}{\sigma^2 k^3} \varepsilon + \dots$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

$$(a', a)_0 - 2(a', b')_0 = v_0'' V_1 = \frac{6\pi}{k} G \varepsilon^2 + \dots,$$

$$(b, a)_0 - 2(b, b')_0 = -(a', b')_0 = -\frac{6\pi}{k^3} (k^2 - 2\Phi_2) \varepsilon + \dots,$$

$$(b, b')_0 = -\frac{2\pi}{k^3} (4 - k^2) + \dots,$$

$$(a, a')_1 = -\frac{\pi}{k^5} (4 - k^2)(12 - k^2) + \dots,$$

$$(a, b)_1 = \frac{4\pi}{k^3} (4 - k^2) + \dots,$$

$$(b', a')_1 = -\frac{4\pi}{k^3} (4 - k^2) + \dots - 2(a, a')_1,$$

$$(b', b)_1 = \frac{2\pi}{k} (4 - k^2) + \dots - 2(a, b)_1.$$

Отсюда

$$\left| \begin{array}{cc} (a, a')_1, (a, b)_1 \\ (b', a')_1, (b', b)_1 \end{array} \right| = -\frac{2\pi^2}{k^6} (4 - k^2)^3 + \dots,$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} (a', a)_0, (b, a)_0 \\ (a', b')_0, (b, b')_0 \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} (a', a)_0 - 2(a', b')_0, (a', b')_0 \\ (b, a)_0 - 2(b, b')_0, (b, b')_0 \end{array} \right| = \\ &= \frac{12\pi^2}{k^6} \left\{ 3(k^2 - 2\Phi_2)^2 - (4 - k^2)k^2 G \right\} \varepsilon^2 + \dots, \end{aligned}$$

и слѣдовательно

$$N_2 = \frac{24\pi^4}{k^{12}} (4 - k^2)^3 \left\{ (4 - k^2)k^2 G - 3(k^2 - 2\Phi_2)^2 \right\} \varepsilon^2 + \dots$$

Внося сюда вмѣсто  $G$  его выраженіе, находимъ:

$$N_2 = \frac{24\pi^4}{k^{12}} (4 - k^2)^3 J \varepsilon^2 + \dots,$$

гдѣ

$$J = (4 - k^2) \left( k^2 \Phi_3 - \frac{3}{2} \Phi_2^2 + 2k^2 \Phi_2 \right) + (1 - k^2)(k^2 - 2\Phi_2)^2.$$



Слѣдующіе члены содержатъ степени  $\varepsilon$  выше второй.

Составимъ еще первые члены разложеній по восходящимъ степенямъ  $\varepsilon$  величинъ  $K_1$  и  $N_3$ . Члены эти вообще будутъ значеніями этихъ величинъ при  $\varepsilon = 0$ .

Въ самомъ дѣлѣ, для  $\varepsilon = 0$  имѣемъ:

$$A = \cos 2\pi p_1 + \cos 2\pi p_2,$$

$$B = 1 + 2 \cos 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2,$$

откуда

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = \sin^2 2\pi p_1 \sin^2 2\pi p_2.$$

Съ другой стороны, формулы (73) даютъ:

$$A = 2 + \frac{1}{2} K_1 \lambda + \dots,$$

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = N_2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{4} K_1 N_2 + N_3\right) \lambda^3 + \dots$$

Послѣдняя формула для  $\varepsilon = 0$  обращается въ слѣдующую:

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = N_3 \lambda^3 + \dots$$

Отсюда, принимая въ расчетъ, что уравненіе (104) даетъ слѣдующія разложенія по восходящимъ степенямъ  $\lambda$ :

$$p_1^2 = \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \lambda + \dots,$$

$$1 - p_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \lambda + \dots,$$

находимъ:

$$K_1 = -4 \pi^2 \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 + \dots,$$

$$N_3 = 4 \pi^4 \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^6 + \dots,$$

гдѣ слѣдующіе члены содержатъ положительныя степени  $\varepsilon$ .

Изъ найденныхъ формулъ видно, что если для какого-либо даннаго  $\sigma$  удовлетворено неравенство

$$(4-k^2)J > 0, \dots \dots \dots (125)$$

то при томъ-же  $\sigma$  для достаточно малыхъ значений  $\varepsilon$  удовлетворятся условія:

$$K_1 < 0, \quad N_2 \geq 0, \quad \frac{1}{4} K_1^2 - N_2 > 0, \quad N_3 > 0,$$

а при этомъ могутъ быть найдены такія отличныя отъ нуля положительныя числа  $\varepsilon'$  и  $\lambda'$ , что для всякихъ  $\varepsilon$  и  $\lambda$ , удовлетворяющихъ условіямъ

$$0 \leq \varepsilon < \varepsilon', \quad 0 < \lambda < \lambda',$$

неравенства (74) будутъ удовлетворены.

Поэтому при выполнении условія (125) для какого-либо  $\sigma$ , всякое періодическое Лапласово движеніе, соответствующее этому  $\sigma$  и достаточно близкое къ постоянному, при достаточно малыхъ значеніяхъ  $\lambda$  (исключая  $\lambda = 0$ ) устойчиво.

При выполнении противоположнаго условія,  $N_2$  для достаточно малыхъ значений  $\varepsilon$  отрицательно, и слѣдовательно въ этомъ случаѣ всякое періодическое движеніе, достаточно близкое къ постоянному, при достаточно малыхъ значеніяхъ  $\lambda$  становится неустойчивымъ.

Въ предѣльномъ случаѣ неравенства (125) необходимо дополнительное изслѣдованіе, на которомъ останавливаться не будемъ.

Въ случаѣ

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^N}$$

имѣемъ:

$$k^2 = 3 - N, \quad \Phi_2 = \frac{(N-2)(N-3)}{6}, \quad \Phi_3 = \frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{24},$$

вслѣдствіе чего

$$4 - k^2 = N + 1, \quad J = \frac{(N-2)(3-N)^2(N+1)^2}{36}.$$

Условіе (125) въ этомъ случаѣ приводится поэтому къ виду:

$$(N+1)(N-2) > 0,$$

откуда слѣдуетъ или

$$N > 2,$$

или

$$N < -1.$$

Такимъ образомъ въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго  $N$ -ой степени разстоянія, если  $N$  лежитъ между предѣлами  $-1$  и  $2$  невключительно, періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, при достаточно малыхъ значеніяхъ  $\lambda$  становятся неустойчивыми. Для всѣхъ-же другихъ значеній  $N$  они при этомъ не теряютъ устойчивости.

Въ заключеніе сопоставляемъ всѣ найденные результаты.

Имѣемъ три матеріальныя точки, массы которыхъ суть  $M$ ,  $m$  и  $m'$ , и которыя взаимно притягиваются пропорціонально произведеніямъ изъ массъ и пропорціонально нѣкоторой функціи  $f(r)$  ихъ взаимныхъ разстояній  $r$ .

Разсматриваемъ одно изъ періодическихъ Лапласовыхъ движеній, въ которомъ точки остаются въ вершинахъ равносторонняго треугольника, стороны котораго съ теченіемъ времени измѣняются періодически между нѣкоторыми предѣлами  $\varrho_0$  и  $\varrho_1$ , изъ которыхъ низшіи  $\varrho_0$  не нуль и высшіи  $\varrho_1$  не безконеченъ.

Полагаемъ:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_0} + \frac{1}{\varrho_1} \right) = \sigma, \quad \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1 + \varrho_0} = \varepsilon,$$

$$\int f\left(\frac{1}{\sigma}\right) d\frac{1}{\sigma} = \varphi(\sigma) = \varphi,$$

$$1 - \frac{\sigma\varphi''}{\varphi'} = k^2, \quad \frac{1}{1.2.3\dots(n+1)} \frac{\sigma^n \varphi^{(n+1)}}{\varphi'} = \Phi_n,$$

предполагая, что  $\varphi'$  не нуль, и что

$$1 - \frac{\sigma\varphi''}{\varphi'} > 0.$$

Вслѣдствіе послѣдняго предположенія возможны періодическія движенія, для которыхъ  $\varepsilon$  на сколько угодно мало.

Кромѣ того, предполагаемъ, что рядъ

$$\varphi + \varphi' \frac{\zeta}{1} + \varphi'' \frac{\zeta^2}{1.2} + \varphi''' \frac{\zeta^3}{1.2.3} + \dots$$

для достаточно малых значений  $\text{mod } \zeta$  есть абсолютно сходящейся и представляет функцию  $\varphi(\sigma + \zeta)$ .

Наконецъ, полагаемъ

$$3 \frac{Mm + Mm' + mm'}{(M + m + m')^2} = \mu.$$

Величина  $\mu$  будетъ положительною правильною дробью, достигающею своего высшаго предѣла 1 только при  $M = m = m'$ . Значеніе  $\mu = 0$ , соответствующее случаю  $M = \infty$  или  $m = m' = 0$ , будемъ исключать.

Условимся періодическое Лапласово движеніе считать устойчивымъ, если послѣ бесконечно-малыхъ возмущеній треугольникъ, въ вершинахъ котораго находятся матерьяльныя точки, во всякій моментъ возмущеннаго движенія бесконечно-мало отличается отъ равносторонняго, а предѣлы измѣняемости сторонъ его бесконечно-мало отличаются отъ соответственныхъ предѣловъ въ невозмущенномъ движеніи.

При этомъ будутъ имѣть мѣсто слѣдующія теоремы:

I. Если

$$\mu > \frac{3}{4} \left( \frac{k^2}{4 - k^2} \right)^2 \quad \text{и} \quad \mu < \left( \frac{k^2}{4 - k^2} \right)^2,$$

то всѣ періодическія движенія, для которыхъ  $\varepsilon$  менѣе нѣкотораго предѣла, устойчивы. Напротивъ, если

$$\mu > \left( \frac{k^2}{4 - k^2} \right)^2,$$

что возможно только при условіи  $k^2 < 2$ , то всѣ періодическія движенія, для которыхъ  $\varepsilon$  менѣе нѣкотораго предѣла, неустойчивы.

II. Если

$$(4 - k^2) \left\{ (4 - k^2) \left( k^2 \Phi_3 - \frac{3}{2} \Phi_2^2 + 2k^2 \Phi_2 \right) + (1 - k^2)(k^2 - 2\Phi_2)^2 \right\} > 0,$$

то всякое періодическое движеніе, для котораго  $\varepsilon$  менѣе нѣкотораго предѣла, остается устойчивымъ для всякихъ достаточно малыхъ значений  $\mu$ . Если-же имѣетъ мѣсто противоположное неравенство, то всякое періодическое движеніе, для котораго  $\varepsilon$  менѣе нѣкотораго предѣла, для достаточно малыхъ значений  $\mu$  становится неустойчивымъ.

III. Когда выполнено одно изъ двухъ неравенствъ:

$$k^2 < 8(2 - \sqrt{3}) \quad \text{или} \quad k^2 > 8(2 + \sqrt{3}),$$

для  $\mu$  возможно значеніе  $\frac{3}{4} \left( \frac{k^2}{4-k^2} \right)^2$ . Если при этомъ  $k^2 - 2\Phi_2$  не равно нулю, то всякое періодическое движеніе, для котораго  $\varepsilon$  не превосходитъ нѣкотораго предѣла, при значеніяхъ  $\mu$ , достаточно близкихъ къ  $\frac{3}{4} \left( \frac{k^2}{4-k^2} \right)^2$ , становится неустойчивымъ.

IV. Если  $k^2 \leq 2$ , то для  $\mu$  возможно значеніе  $\left( \frac{k^2}{4-k^2} \right)^2$ . Если при этомъ

$$6\Phi_2^2 + \frac{3}{4}k^4 - k^2(8+k^2)\Phi_2 - 6k^2\Phi_3 > 0,$$

то всякое періодическое движеніе, для котораго  $\varepsilon$ , не будучи равнымъ нулю, менѣе нѣкотораго предѣла, при значеніяхъ  $\mu$ , достаточно близкихъ къ  $\left( \frac{k^2}{4-k^2} \right)^2$ , остается устойчивымъ. Напротивъ, если выполнено противоположное неравенство, то всякое періодическое движеніе, для котораго  $\varepsilon$  не превосходитъ нѣкотораго предѣла, при такихъ значеніяхъ  $\mu$  становится неустойчивымъ.

Изъ этихъ теоремъ, какъ слѣдствіе, можетъ быть выведена слѣдующая:

Если при  $k^2 < 2$

$$6\Phi_2^2 + \frac{3}{4}k^4 - k^2(8+k^2)\Phi_2 - 6k^2\Phi_3 > 0,$$

то для  $\mu - \left( \frac{k^2}{4-k^2} \right)^2$  достаточно малаго и при томъ положительнаго могутъ быть найдены такія положительныя числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , что всѣ періодическія движенія, для которыхъ  $\varepsilon < \varepsilon_1$ , неустойчивы, а тѣ, для которыхъ  $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ , устойчивы.

Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго  $N$ -ой степени разстоянія, непостоянныя періодическія Лапласовы движенія возможны только при  $N < 3$ .

Предполагая такой законъ притяженія, рассмотримъ періодическія движенія, для которыхъ  $\varepsilon$  не превосходитъ нѣкотораго предѣла  $\varepsilon'$ .

Разумѣя подъ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  вообще нѣкоторыя положительныя функции  $\varepsilon$ , обращающіяся въ нуль при  $\varepsilon = 0$ , и предполагая  $\varepsilon'$  достаточно малымъ, будемъ имѣть слѣдующую теорему:

V. Когда  $3 > N \geq 2$ , рассматриваемыя періодическія движенія устойчивы при выполнении одного изъ двухъ слѣдующихъ условий:

$$\mu < \frac{3}{4} \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 - \alpha \quad \text{или} \quad \frac{3}{4} \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 + \beta < \mu < \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 + \gamma$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда  $2 > N > 1$ , движенія эти устойчивы при выполнении одного изъ двухъ слѣдующихъ условий:

$$\alpha < \mu < \frac{3}{4} \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 - \beta$$

или

$$\frac{3}{4} \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 + \gamma < \mu < \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 + \delta$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда  $1 > N > 8\sqrt{3} - 13$ , эти движенія устойчивы при одномъ изъ двухъ слѣдующихъ условий:

$$\alpha < \mu < \frac{3}{4} \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 - \beta \quad \text{или} \quad \mu > \frac{3}{4} \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 + \gamma$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда  $8\sqrt{3} - 13 > N > -1$ , движенія эти устойчивы при  $\mu > \alpha$  и неустойчивы при  $\mu < \alpha$ .

Когда  $-1 \geq N > -(13 + 8\sqrt{3})$ , эти движенія всегда устойчивы.

Когда  $N < -(13 + 8\sqrt{3})$ , движенія эти устойчивы при выполнении одного изъ двухъ слѣдующихъ условий:

$$\mu < \frac{3}{4} \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 - \alpha \quad \text{или} \quad \mu > \frac{3}{4} \left( \frac{3-N}{1+N} \right)^2 + \beta$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Кромѣ того, имѣемъ слѣдующую теорему:

VI. Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, всякое періодическое Лапласово движеніе при достаточно маломъ  $\mu$  устойчиво.

## ОПЕЧАТКИ

въ статьѣ А. М. Ляпунова.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
25	10 сверху	$Y = Q(\vartheta) q^{\frac{\theta}{\Omega}}$ ,	$Y = Q(\vartheta) q^{\frac{\vartheta}{\Omega}}$ ,
65	5 —	$s = \sqrt{\alpha g}^{\frac{1}{3-N}} \zeta$ .	$s = (\alpha g)^{\frac{1}{3-N}} \zeta$ ,
—	11 —	въ числѣ Лапласовыхъ	въ числѣ непостоян- ныхъ Лапласовыхъ
67	14 —	$= \underset{0}{3\lambda}$	$= 3\lambda$

~~~~~  
 На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества  
 печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Общества *К. Андреевъ.*

~~~~~