# Новое аналитическое доказательство параллелограмма силъ.

В. Г. Имшенецкаго.

1. Аналитическихъ доказательствъ основной теоремы статики предложено немного, сравнительно съ обиліемъ доказательствъ синтетическихъ или геометрическихъ.

Лучшія аналитическія доказательства принадлежатъ *Даламберу* [1]), *Лапласу* [2]) и *Пуассону* [3]).

Наше доказательство, сходное по основнымъ допущеніямъ съ двумя первыми изъ только что упомянутыхъ, приводитъ къ цѣли проще, съ помощію однихъ лишь элементарныхъ средствъ анализа, между тѣмъ какъ для доказательствъ Даламбера и Лапласа потребовались средства анализа безконечномалыхъ.

2. Если $p$ и $q$ означаютъ величину двухъ силъ, которыхъ направленія въ общей точкѣ ихъ приложенія $O$ составляютъ прямой уголъ, а $r$ и $\alpha$ представляютъ соотвѣтственно величину равнодѣйствующей и уголъ, не больше прямого, между направленіями силъ $p$ и $r$; то легко заключить, какъ извѣстно, что между этими четырьмя величинами должны существовать два уравненія общаго вида

$$r = pf\left(\frac{q}{p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и

$$\frac{q}{p} = \varphi(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

вслѣдствіе необходимаго требованія однородности отъ этихъ уравненій.

[1]) Opuscules mathématiques, t. VI, p. 368.

[2]) Mécanique céleste, t. I, p. 1.

[3]) Traité de Mécanique, t. I, p. 45 (2-e éd).

Наша задача состоитъ поэтому въ отысканіи вида неизвѣстныхъ функцій $f$ и $\varphi$, а изъ ея сущности легко непосредственно сдѣлать слѣдующія заключенія объ ихъ свойствахъ.

Перемѣнивъ $q$ на $p$ и обратно мы неизмѣнимъ величины $r$, но вслѣдствіе этого уголъ $\alpha$ перемѣнится въ дополнительный уголъ $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Слѣдовательно, вмѣстѣ съ (1) и (2) имѣемъ уравненія:

$$r = qf\left(\frac{p}{q}\right) \dots \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{p}{q} = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \dots \dots \dots \dots (4)$$

изъ которыхъ первое показываетъ, что $r$ есть функція отъ $p$ и $q$ не только однородная первой степени, но и симметричная.

Изъ совокупности предыдущихъ четырехъ уравненій обнаруживаются свойства функцій, выраженныя въ слѣдующихъ уравненіяхъ:

$$\varphi(\alpha)\,\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 \dots \dots \dots \dots (5)$$

и

$$f\left(\frac{q}{p}\right) : f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q}{p}, \quad \text{или} \quad f(\varphi(\alpha)) : f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \varphi(\alpha) \dots (6)$$

Кромѣ того ясно, что, допуская только положительныя или равныя нулю значенія $p$ и $q$ и значенія $\alpha$, не выходящія изъ границъ $0$ и $\frac{\pi}{2}$, мы всегда будемъ имѣть:

$$pf\left(\frac{q}{p}\right) \geqq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha) \geqq 0.$$

При томъ нетрудно видѣть, что функція $pf\left(\frac{q}{p}\right)$, или $qf\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ только для $p = 0$ и $q = 0$, а функція $\varphi(\alpha) = 0$, только для $\alpha = 0$.

Первое утвержденіе не есть самостоятельное допущеніе, но только слѣдствіе другого необходимаго допущенія, что силы приложенныя къ точкѣ должны имѣть единственную равнодѣйствующую. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что двѣ неравныя нулю силы $p$ и $q$, приложенныя къ точкѣ подъ какимъ-нибудь угломъ, различнымъ отъ двухъ прямыхъ, находятся въ равновѣсіи, и прилагая къ той-же точкѣ третью силу $s$, равную по величинѣ и противуположную $p$, мы для трехъ силъ $p$, $q$ и $s$ могли-бы получить двѣ различныхъ равнодѣйствующихъ $s$ и $q$: такъ какъ сами по себѣ уравновѣшиваются $p$ и $q$, по предположенію, а $p$ и $s$—какъ равныя и противуположныя [1]).

Второе утвержденіе означаетъ только, что $\varphi(\alpha)$ т. е. отношеніе $\frac{q}{p}$, при конечной величинѣ $p$, можетъ быть равно нулю лишь для $q=0$, вслѣдствіе чего $\alpha=0$, потому что тогда направленія силъ $p$ и $r$ совпадаютъ.

Замѣтимъ еще, что для $\alpha=\frac{\pi}{4}$ изъ (5) имѣемъ

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=1$$

и такъ какъ $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$, то

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

3. Перейдемъ теперь къ опредѣленію вида функцій $\varphi$ и $f$.

Изъ (1) и (2) уравненій слѣдуетъ, что

$$p=\frac{r}{f(\varphi(\alpha))} \quad \text{и} \quad q=\frac{r\varphi(\alpha)}{f(\varphi(\alpha))} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Послѣднія формулы могутъ служить для разложенія силы на двѣ прямоугольныя слагающія, когда дано направленіе одной изъ нихъ.

Чтобы воспользоваться формулами (8), проведемъ черезъ $O$, точку приложенія силъ $p$, $q$ и $r$, двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя $xx'$ и $yy'$ такъ, чтобы направленіе силы $r$ составляло съ $Ox$ и $Oy$ соотвѣтственно углы $\alpha+\beta\leqq\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$.

Означая слагающія силъ $r$, $p$ и $q$, направленныя по осямъ $xx'$ и $yy'$ соотвѣтственно черезъ $r'$ и $r''$, $p'$ и $p''$, $q'$ и $q''$, получимъ по формуламъ (8) слѣдующія ихъ выраженія:

---

[1]) Это разсужденіе заимствовано изъ статьи *G. Darboux*: Sur la composition des forces. Bull. des sc. math. t. VIII, p. 284. См. также *Despeyroux*. Cours de Mécanique t. I, Note I, p. 373.

$$r' = \frac{r}{f(\varphi(\alpha+\beta))}, \quad r'' = \frac{r\varphi(\alpha+\beta)}{f(\varphi(\alpha+\beta))};$$

$$p' = \frac{p}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))}, \quad p'' = \frac{p\varphi(\beta)}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r\varphi(\beta)}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))};$$

$$q' = -\frac{q\varphi(\beta)}{f(\varphi(\beta))} = -\frac{r\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))}, \quad q'' = \frac{q}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r\varphi(\alpha)}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))}.$$

Чтобы яснѣе показать соотношеніе между шестью предыдущими силами, приложимъ къ точкѣ $O$ еще силу $r_1$, равную и противуположную $r$, и означая черезъ $r_1{}'$ и $r_1{}''$ слагающія $r_1$, направленныя по $xx'$ и $yy'$, будемъ имѣть

$$r_1{}' = -r' \qquad \text{и} \qquad r_1{}'' = -r''.$$

Такъ какъ три силы $p$, $q$ и $r_1$ находятся въ равновѣсіи, то должны находиться въ равновѣсіи и шесть силъ $p'$, $q'$, $r_1{}'$ и $p''$, $q''$, $r_1{}''$, изъ которыхъ три первыя, направленныя по $xx'$, имѣютъ равнодѣйствующую

$$X = p' + q' + r_1{}' = p' + q' - r',$$

а три послѣднія, направленныя по $yy'$, можно замѣнить равнодѣйствующей

$$Y = p'' + q'' + r_1{}'' = p'' + q'' - r''.$$

И такъ, приложенныя къ точкѣ $O$ двѣ силы и $X$ и $Y$ составляютъ прямой уголъ и находятся въ равновѣсіи; слѣдовательно, какъ мы видѣли выше, необходимо

$$X = 0 \quad \text{и} \quad Y = 0;$$

т. е.

$$r' = p' + q' \qquad \text{и} \qquad r'' = p'' + q''.$$

Введя данныя выше значенія всѣхъ членовъ двухъ послѣднихъ равенствъ, получаемъ:

$$\frac{r}{f(\varphi(\alpha+\beta))} = \frac{r[1-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)]}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{r\varphi(\alpha+\beta))}{f(\varphi(\alpha+\beta))} = \frac{r[\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)]}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

и, посредствомъ дѣленія (10) на (9), находимъ

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{1-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)},$$

теорему сложенія аргументовъ для функціи $\varphi(\alpha)$ вида подобнаго формулѣ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Кромѣ того мы видѣли, что значенія $\varphi(\alpha)$ и $\operatorname{tg}\alpha$ равны для $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Отсюда, какъ извѣстно, легко заключить о существованіи равенства

$$\varphi(\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

сначала для всѣхъ значеній $\alpha=\frac{m}{2^n}\left(\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{\pi}{2}$, гдѣ $m$ и $n$ произвольныя цѣлыя, и потомъ вообще для значеній $\alpha$, не выходящихъ изъ предѣловъ $0$ и $\frac{\pi}{2}$.

4. Обращаемся къ отысканію вида функціи $f$, чего можно достичь, не зная найденнаго выше вида функціи $\varphi$, но только основываясь на ихъ свойствахъ, выраженныхъ уравненіями (1) — (6).

Дѣйствительно, полагая

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},$$

мы заключаемъ, на основаніи (5), что вторая часть равенства (9), представляющая значеніе $r'$, обращается въ нуль; поэтому $r$ равно второй части равенства (10), которая представляетъ значеніе слагающей $r''$. Отсюда легко замѣтить, что

$$f(\varphi(\alpha)).f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\varphi(\alpha)+\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Умноживъ это послѣднее уравненіе на (6) и обращая вниманіе на (5), находимъ

$$f(\varphi(\alpha))^2=\varphi(\alpha)^2+1,$$

а такъ какъ значеніе $f(\varphi(\alpha))$ можетъ быть только положительнымъ, то

$$f(\varphi(\alpha))=+\sqrt{\varphi(\alpha)^2+1}$$

Слѣдовательно видъ функціи $f$ найденъ и, въ силу уравненій (1) и (2), вмѣстѣ съ этимъ получаемъ формулу

$$r = p\sqrt{\frac{q^2}{p^2}+1} = \sqrt{p^2+q^2}$$

представляющую величину равнодѣйствующей двухъ силъ приложенныхъ къ точкѣ подъ прямымъ угломъ.

Переходъ къ случаю, когда двѣ силы въ точкѣ ихъ приложенія составляютъ не прямой уголъ, какъ извѣстно очень простъ; поэтому оставляемъ его безъ разсмотрѣнія.

---