Розысканіе особенныхъ точекъ плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ.

М. А. Тихомандрицкаго.

Въ курсахъ Дифференціальнаго исчисленія дается понятіе о разнаго рода особенныхъ точкахъ, которыя могутъ имѣть плоскія кривыя; но ни въ одномъ изъ нихъ я не встрѣчалъ изложенія общаго метода для нахожденія по данному уравненію кривой ея особенныхъ точекъ; восполнить этотъ пробѣлъ по отношенію къ плоскимъ алгебраическимъ кривымъ—цѣль настоящей замѣтки.

Здѣсь мы именно покажемъ, въ общихъ чертахъ, какимъ образомъ при помощи *раціональныхъ дѣйствій*, именно алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя, можно изъ даннаго уравненія плоской алгебраической кривой:

$$F(x, y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

вывести рядъ паръ уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = 0\,, \\ \psi(x, y) = 0\,, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

изъ которыхъ каждая пара будетъ опредѣлять координаты особенныхъ точекъ одной опредѣленной категоріи, одна, напримѣръ, координаты всѣхъ двойныхъ точекъ съ различными касательными, другая двойныхъ съ совпадающими касательными, третья координаты всѣхъ тройныхъ точекъ съ различными касательными, четвертая тройныхъ съ двумя совпадающими касательными и т. д. Съ помощію этихъ паръ уравненій, *не рѣшая* ихъ, можно опредѣлить *родъ* кривой (Geschlecht Клебша, Defect Кэли, Rang Вейерштрасса), а также найти при помощи *раціональныхъ дѣйствій* уравненія *присоединенныхъ кривыхъ* [adjungirte Curven Нётера (Nöther)], что имѣетъ фундаментальное значеніе въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, зависящихъ отъ ирраціональности, опредѣляемой алгебраическимъ уравненіемъ (1).

Предлагаемая замѣтка была мною набросана въ общихъ чертахъ еще въ бытность мою въ Берлинѣ въ 1884 г. и предназначалась тогда-же для сообщенія нашему Математическому Обществу; но другія изслѣдованія отвлекли меня отъ окончательной разработки этого вопроса. Черезъ пять лѣтъ вернувшись къ своимъ наброскамъ, исправивъ и дополнивъ ихъ, я рѣшился представить ихъ на судъ Математическаго Общества, такъ какъ до сихъ поръ нигдѣ излагаемый способъ опредѣленія особенныхъ точекъ не былъ опубликованъ, сколько мнѣ извѣстно.

---

1. Координаты k-кратной точки кривой (1), какъ извѣстно, должны удовлетворять такимъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{c}
F(x,y)=0\,,\\[4pt]
\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\,,\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\,,\\[4pt]
\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0\,,\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0\,,\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0\,,\\[4pt]
\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^3}=0\,,\quad \dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}=0\,,\quad \dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}=0\,,\quad \dfrac{\partial^3 F}{\partial y^3}=0\,,\\[4pt]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[4pt]
\dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial x^{k-1}}=0\,,\quad \dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial x^{k-2}\partial y}=0\,,\quad \dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial x^{k-3}\partial y^2}=0\,,\ldots\ldots \dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial y^{k-1}}=0\,,
\end{array}\right\}\ldots(3)$$

при чемъ угловые коэффиціенты касательныхъ къ вѣтвямъ кривой, проходящимъ чрезъ эту кратную точку, въ этой самой точкѣ, опредѣлятся изъ уравненія:

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k}+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-1}\partial y}y'+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-2}\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-3}\partial y^3}y'^3+\ldots+\frac{\partial^k F}{\partial y^k}y'^k=0\,. \quad (4)$$

Если это уравненіе для y' должно имѣть кратные корни, то изъ этого требованія получатся новыя условія въ формѣ уравненій, которымъ должны удовлетворять координаты такой k-кратной точки. Отсюда слѣдуетъ, что для опредѣленія особенныхъ точекъ данной кривой надо имѣть способъ находить общія рѣшенія нѣсколькихъ совмѣстныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными, который и будетъ показанъ въ слѣдующемъ §.

2. Пусть дана система m уравненій:

$$f(x, y) = 0, \; f_1(x, y) = 0, \; f_2(x, y) = 0, \dots f_{m-1}(x, y) = 0; \; . \; . \quad (5)$$

чтобы найти рѣшенія общія первымъ двумъ, станемъ (расположивъ ихъ по нисходящимъ степенямъ y) искать общаго наибольшаго дѣлителя первыхъ частей первыхъ двухъ изъ этихъ уравненій: операція эта остановится, когда придемъ къ остатку, несодержащему y; пусть онъ будетъ $\varphi(x)$; предпослѣдній же остатокъ пусть будетъ $\psi(x, y)$; тогда для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$\varphi(x) = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$\psi(x, y)$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцій $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$, [что мы будемъ такъ обозначать:

$$\psi(x, y) = D(f(x, y), \; f_1(x, y)),] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

и слѣдовательно общія рѣшенія первыхъ двухъ изъ уравненій (1) найдутся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = 0, \\ \psi(x, y) = 0. \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Станемъ теперь искать общаго наибольшаго дѣлителя функцій $\psi(x, y)$ и $f_2(x, y)$; операція остановится, когда придемъ къ остатку $\theta(x)$, несодержащему y; предпослѣдній остатокъ обозначимъ чрезъ $\psi_1(x, y)$: тогда, для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію:

$$\theta(x) = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

будетъ

$$\psi_1(x, y) = D(\psi(x, y), \; f_2(x, y)), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

и общія рѣшенія уравненій $\psi(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ найдутся изъ системы уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \theta(x) = 0, \\ \psi_1(x, y) = 0. \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Ищемъ теперь $D(\psi(x), \; \theta(x))$; если онъ будетъ равенъ постоянной, то ни одно изъ рѣшеній системы (7) не будетъ совпадать ни съ однимъ изъ рѣшеній системы (4), и три первыя уравненія не будутъ имѣть общихъ рѣшеній, будутъ несовмѣстны; если же онъ будетъ функція x, пусть $\varphi_1(x)$, такъ что слѣд.

$$\varphi_1(x) = D(\varphi(x), \; \theta(x)), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

то для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$\varphi_1(x) = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

$\psi_1(x, y)$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ первыхъ частей первыхъ трехъ уравненій, и потому общія рѣшенія этихъ трехъ уравненій найдутся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) = 0\,, \\ \psi_1(x, y) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Послѣ этого приступаемъ къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя функцій $\psi_1(x, y)$ и $f_3(x, y)$; дойдя до остатка $\theta_1(x)$, несодержащаго x, и обозначая предпослѣдній чрезъ $\psi_2(x, y)$, будемъ имѣть для значеній x удовлетворяющихъ уравненію

$$\theta_1(x) = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\psi_2(x, y) = D(\psi_1(x, y),\ f_3(x, y))\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

слѣдовательно рѣшенія общія уравненіямъ $\psi_2(x, y) = 0$ и $f_3(x, y) = 0$ найдутся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(x) = 0\,, \\ \psi_2(x, y) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Ищемъ теперь $D(\varphi_1(x),\ \theta_1(x))$; если онъ равенъ постоянной, то наши первыя четыре изъ уравненій (1), а слѣдовательно и всѣ несовмѣстны; если же онъ функція x:

$$D(\varphi_1(x),\ \theta(x)) = \varphi_2(x)\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

то общія рѣшенія первыхъ четырехъ уравненій найдутся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x) = 0\,, \\ \psi_2(x, y) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Продолжая это, мы получимъ что нибудь изъ двухъ: или что для $k \leqq m - 1$

$$D(\varphi_{k-2}(x),\ \theta_{k-2}(x)) = \text{постоянному:} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

тогда первыя k уравненій, а слѣдовательно и всѣ несовмѣстны; или же дойдемъ до пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{m-2}(x) = 0\,, \\ \psi_{m-2}(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

изъ которой найдемъ общія рѣшенія всѣхъ уравненій предложенной системы.

3. Возвращаясь къ системѣ уравненій (1) § 1, по только что изложенному способу выведемъ для уравненій первыхъ двухъ строчекъ этой таблицы пару уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)=0\,,\\ \psi(x\,,y)=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

которая и опредѣлитъ координаты всѣхъ особенныхъ точекъ. Чтобы выдѣлить изъ нихъ двойныя, присоединимъ уравненія третьей строчки нашей таблицы къ уравненію $\psi(x\,,y)=0$, и выведемъ для этой системы по тому же способу пару уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\theta(x)=0\,,\\ \psi_1(x\,,y)=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

опредѣляющую ихъ общія рѣшенія. Затѣмъ ищемъ $D(\varphi(x)\,,\theta(x))$; если онъ будетъ равенъ постоянной, то это будетъ значить, что пары (1) и (2), а слѣдовательно и система уравненій первыхъ трехъ строчекъ нашей таблицы не имѣютъ общихъ рѣшеній, и слѣдовательно всѣ особенныя точки нашей кривой суть двойныя; если же онъ будетъ функція x, именно будетъ

$$D(\varphi(x)\,,\theta(x))=\varphi_1(x)\,,\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

то полагая

$$\varphi(x):\varphi_1(x)=\chi(x)\,,\quad\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

координаты двойныхъ точекъ мы получимъ изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\chi(x)=0\,,\\ \psi(x\,,y)=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(5)$$

тогда какъ изъ пары уравненій

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x)=0\,,\\ \psi_1(x\,,y)=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

опредѣлятся координаты особенныхъ точекъ кратности выше двойной. Чтобы выдѣлить изъ нихъ тройныя, присоединимъ къ $\psi_1(x\,,y)=0$ уравненія четвертой строчки нашей таблицы и найдемъ по тому же способу § 2 пару уравненій, опредѣляющихъ ихъ общія рѣшенія:

$$\left.\begin{aligned}\theta_1(x)=0\,,\\ \psi_2(x\,,y)=0\,;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(7)$$

затѣмъ ищемъ $D(\varphi_1(x)\,,\theta_1(x))$; если онъ будетъ равенъ постоянной, то системы (6) и (7) не будутъ имѣть общихъ рѣшеній; слѣдовательно кратныхъ точекъ выше тройныхъ не будетъ, и эти послѣднія опредѣлятся изъ пары уравненій (6); въ противномъ же случаѣ, т. е. когда будетъ

$$D(\varphi_1(x)\,,\,\theta_1(x)) = \varphi_2(x)\,, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

мы получимъ, полагая

$$\varphi_1(x) : \varphi_2(x) = \chi_1(x)\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

изъ пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} \chi_1(x) &= 0\,, \\ \psi_1(x\,,y) &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

координаты всѣхъ тройныхъ точекъ, а изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x) &= 0\,, \\ \psi_2(x\,,y) &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

координаты всѣхъ точекъ высшей кратности. Продолжая это мы наконецъ придемъ къ парѣ уравненій

$$\left.\begin{aligned} \chi_{k-2}(x) &= 0\,, \\ \psi_{k-2}(x\,,y) &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

изъ которыхъ опредѣлятся координаты всѣхъ k-кратныхъ точекъ, тогда какъ изъ пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{k-1}(x) &= 0\,, \\ \psi_{k-1}(x\,,y) &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

координаты всѣхъ точекъ высшей кратности. Здѣсь

$$\varphi_{k-1}(x) = D(\varphi_{k-2}(x)\,,\,\theta_{k-2}(x))\,,$$

а

$$\left.\begin{aligned} \theta_{k-2}(x) &= 0\,, \\ \psi_{k-1}(x\,,y) &= 0\,, \end{aligned}\right\}$$

— система уравненій, опредѣляющихъ общія рѣшенія той системы уравненій, которая получится, когда къ уравненію $\psi_{k-1}(x\,,y) = 0$ присоединимъ уравненія $k+1$-ой строки нашей таблицы.

Операція эта остановится, когда дойдемъ до такой пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{m-2}(x) &= 0\,, \\ \psi_{m-2}(x\,,y) &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

что, присоединяя къ $\psi_{m-2}(x\,,y) = 0$ уравненія слѣдующей строчки и найдя пару уравненій, опредѣляющихъ ихъ общія рѣшенія:

$$\left.\begin{aligned}\theta_{m-2}(x) = 0\,,\\ \psi_{m-1}(x\,,y) = 0\,,\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (15)$$

мы будемъ затѣмъ имѣть

$$D(\varphi_{m-2}(x)\,,\theta_{m-2}(x)) = C\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

гдѣ $C =$ постоянному: тогда точекъ кратности высшей m-ой наша кривая не будетъ имѣть, и полагая $\varphi_{m-2}(x\,,y) : C = \chi_{m-2}(x)$, координаты m-кратныхъ точекъ опредѣлятся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\chi_{m-2}(x) = 0\,,\\ \psi_{m-2}(x\,,y) = 0\,.\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (17)$$

Примѣчаніе. Каждое изъ уравненій каждой пары, прежде чѣмъ идти дальше, должно быть освобождено отъ кратныхъ корней, если таковые имѣются; а такіе случаи возможны. Пусть напримѣръ имѣемъ пару:

$$\left.\begin{aligned}\chi(x) = X_1 \cdot X_2{}^2 \ldots X_k^k = 0\\ \psi(x\,,y) = [f(x\,,y)]^m + X_1 \cdot X_2{}^3 \ldots X_k{}^k = 0\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (18)$$

гдѣ $X_1\,, X_2, \ldots X_k$ полиномы безъ кратныхъ множителей; первое уравненіе по раздѣленіи на $D(\chi(x)\,,\chi'(x))$ приведется къ такому:

$$X_1 \cdot X_2 \ldots X_k = 0\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (19)$$

которое имѣетъ всѣ корни перваго изъ (18), но только простыми; для этихъ значеній второе приведется къ

$$[f(x\,,y)]^m = 0\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (20)$$

и чрезъ раздѣленіе на

$$D\left\{[f(x\,,y)]^m, \frac{\partial[f(x\,,y)]^m}{\partial y}\right\} = [f(x\,,y)]^{m-1}$$

приведется къ такому:

$$f(x\,,y) = 0\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

котораго всѣ рѣшенія удовлетворяютъ и (20).

4. Такимъ образомъ съ помощію однихъ раціональныхъ дѣйствій особенныя точки разгруппируются по ихъ кратностямъ такъ, что каждая группа будетъ содержать лишь точки одинаковой кратности, координаты которыхъ будутъ опредѣляться изъ пары уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned}\chi_{k-2}(x) = 0\,,\\ \psi_{k-2}(x\,,y) = 0\,.\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Каждая такая группа можетъ быть раздѣлена на подгруппы по числу совпадающихъ касательныхъ въ ней къ вѣтвямъ кривой. Для k-кратной точки угловые коэффиціенты касательныхъ опредѣляются изъ уравненія (2) § 1: означимъ его для краткости чрезъ

$$\Phi(x\,,y\,;y') = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

предполагая расположеннымъ по убывающимъ степенямъ y'. Для того, чтобы отыскать тѣ точки, для которыхъ это уравненіе, гдѣ неизвѣстная есть y', будетъ имѣть равные корни, мы должны найти, для какихъ значеній x и y функціи Φ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y'}$ будутъ имѣть общаго наибольшаго дѣлителя:

$$D\left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right);$$

ища этого общаго наибольшаго дѣлителя, мы придемъ къ остатку $\phi(x\,,y)$, несодержащему y'; для значеній x и y, удовлетворяющихъ условію

$$\phi(x\,,y) = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , (3)$$

предпослѣдній остатокъ, — означимъ его чрезъ $\Phi_1(x\,,y\,,y')$, и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ:

$$\Phi_1(x\,,y\,,y') = D\left(\Phi\,, \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ищемъ теперь $D(\phi(x\,,y)\,,\psi_{k-2}(x\,,y))$; эта операція остановится, когда придемъ къ остатку $\Theta(x)$, несодержащему y; тогда предпослѣдній остатокъ,—означимъ его чрезъ $\phi_1(x\,,y)$, будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ этихъ функцій:

$$\phi_1(x\,,y) = D(\phi(x\,,y)\,,\psi_{k-2}(x\,,y)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$\Theta(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Вслѣдъ за этимъ ищемъ $D(\chi_{k-2}(x)\,,\Theta(x))$; если онъ окажется равнымъ постоянному, то ни въ одной изъ k-кратныхъ точекъ не будетъ совпадающихъ касательныхъ и слѣдовательно взаимнокасающихся вѣтвей; если же онъ будетъ функція x:

$$D(\chi_{k-2}(x)\,,\Theta(x)) = f(x)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

то для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$f(x) = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$\phi_1(x, y)$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ $\phi(x, y)$ и $\psi_{k-2}(x, y)$, и потому изъ пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} f(x) = 0\,, \\ \phi_1(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

опредѣлятся координаты тѣхъ изъ k-кратныхъ точекъ, въ которыхъ первая часть уравненія (2) и производная ея по y' будутъ имѣть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцію $\Phi_1(x, y, y')$, [(4)]; слѣдовательно, въ которыхъ будутъ совпадающія касательныя и, слѣдовательно, взаимнокасающіяся вѣтви, тогда какъ изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} \chi_{k-2}(x) : f(x) = 0\,, \\ \psi_{k-2}(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

а также изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} f(x) = 0\,, \\ \psi_{k-2}(x, y) : \phi_1(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

опредѣлятся координаты k-кратныхъ точекъ безъ совпадающихъ касательныхъ.

5. Въ тѣхъ k-кратныхъ точкахъ, въ которыхъ $\Phi_1(x, y, y')$ и $\frac{\partial \Phi_1(x,y,y')}{\partial y'}$ не будутъ имѣть общимъ дѣлителемъ функцію y', не будетъ совпадать касательныхъ болѣе чѣмъ по двѣ; тогда угловые коэффиціенты относящіеся къ двойнымъ касательнымъ найдутся изъ уравненія:

$$\Phi_1(x, y, y') = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

тогда какъ угловые коэффиціенты простыхъ касательныхъ изъ уравненія:

$$\Phi(x, y, y') : [\Phi_1(x, y, y')]^2 = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Далѣе, k-кратныя точки съ простыми и съ двойными касательными могутъ быть разгрупированы по числу двойныхъ касательныхъ въ нихъ: для этого надо опредѣлить наивысшую степень уравненія $\Phi_1(x, y, y') = 0$ относительно y'. Пусть это уравненіе по расположеніи его по убывающимъ степенямъ y' будетъ:

$$\pi(x, y)y'^m + \pi_1(x, y)y'^{m-1} + \cdots + \pi_{m-1}(x, y)y' + \pi_m(x, y) = 0\,; \quad (3)$$

если координаты разсматриваемой k-кратной точки съ совпадающими касательными не обращаютъ въ нуль $\pi(x, y)$, то степень этого уравненія будетъ m; если-же они обращаютъ его въ нуль, то степень будетъ $m-1$ — если они не обращаютъ въ нуль и $\pi_1(x, y)$, въ противномъ случаѣ будетъ $m-2$, и т. д.; вообще, если они обращаютъ въ нуль только l первыхъ коэффиціентовъ уравненія (3), то степень его будетъ $m-l$. Отсюда видно уже, какъ слѣдуетъ поступать для разгрупированія k-кратныхъ точекъ съ двойными только касательными по числу таковыхъ: ищемъ общія рѣшенія уравненій (9) съ однимъ, двумя, тремя и т. д. первыми изъ уравненій:

$$\pi(x, y)=0, \ \pi_1(x, y)=0; \ \pi_2(x, y)=0 \ldots \pi_{m-1}(x, y)=0,$$

и затѣмъ изъ рѣшеній общихъ первымъ двумъ выключаемъ рѣшенія общія первымъ тремъ; изъ послѣднихъ выключаемъ рѣшенія общія первымъ четыремъ и т. д. совершенно подобно тому, какъ въ предыдущихъ §§: тогда получимъ пары уравненій, опредѣляющихъ k-кратныя точки одна съ m двойными касательными, другая съ $m-1$, третья съ $m-2$ и т. д.

6. Чтобы изъ k-кратныхъ точекъ (9) § 4 съ совпадающими касательными выдѣлить имѣющія только двойныя касательныя, нужно опредѣлить по предыдущему § тѣ, для которыхъ уравненіе (1) того же § будетъ имѣть кратные корни. Слѣдовательно ищемъ $D\left(\Phi_1, \frac{\partial \Phi_1}{\partial y'}\right)$; дойдя до остатка $\phi^{(1)}(x, y)$, несодержащаго y', мы въ предпослѣднемъ остаткѣ — означимъ его чрезъ $\Phi_2(x, y, y')$, будемъ имѣть этого общаго дѣлителя для значеній x и y, удовлетворяющихъ уравненію

$$\phi^{(1)}(x, y)=0 \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

вмѣстѣ съ уравненіями (9) § 4. Чтобы найти такія значенія x и y, ищемъ

$$D(\phi_1(x, y), \ \phi^{(1)}(x, y))=\phi_2(x, y); \ \ldots \ldots (2)$$

— это будетъ предпослѣдній остатокъ — для значеній x обращающихъ въ нуль послѣдній:

$$\Theta_1(x)=0 \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Ищемъ теперь $D(f(x), \Theta_1(x))$; если это постоянная, то k-кратныхъ точекъ съ касательными, совпадающими больше чѣмъ по двѣ, не будетъ; если же будетъ

$$D(f(x), \Theta_1(x))=f_1(x), \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

то изъ уравненій

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ \phi_2(x, y)=0, \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

опредѣлятся координаты k-кратныхъ точекъ, въ которыхъ касательныя могутъ совпадать и больше, чѣмъ по двѣ; тогда какъ изъ уравненій

$$\left.\begin{array}{l} f(x): f_1(x)=0, \\ \phi_1(x, y)=0, \end{array}\right\}$$

а также изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) = 0\,, \\ \varphi_1(x\,,y) : \varphi_2(x\,,y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

опредѣлятся k-кратныя точки, въ которыхъ имѣются только двойныя касательныя.

7. Теперь ясно какъ можно идти дальше въ этомъ направленіи, а также изъ Высшей Алгебры извѣстно, какъ отдѣлятся всѣ равные корни уравненія (2) § 4, когда будутъ имѣться они разной кратности. Когда k-кратныя точки раздѣлены на категоріи по числу совпадающихъ касательныхъ, эти категоріи можно еще подраздѣлить на другія по порядкамъ касанія вѣтвей, имѣющихъ общія касательныя. Для этого надо обратиться къ уравненію:

$$\mathbf{F}(x\,,y\,,y'\,,y'') = 0\,,$$

опредѣляющему вторую производную y, когда вмѣсто $x\,,y$ подставлены координаты разсматриваемой k-кратной точки, а вмѣсто y' угловой коэффиціентъ разсматриваемой изъ двойныхъ (или тройныхъ и т. д.) касательныхъ. Сперва нужно выдѣлить изъ разсматриваемой группы тѣ точки и касательныя, для которыхъ y'' имѣетъ разныя значенія: тогда касаніе разсматриваемыхъ вѣтвей будетъ перваго порядка; затѣмъ тѣ, для которыхъ y'' будетъ имѣть равныя значенія. Для опредѣленія такихъ точекъ и направленій совпадающихъ касательныхъ, надо обратиться къ разсмотрѣнію уравненія, дающаго y''', и т. д. и т. д. Идея о необходимыхъ для этого дѣйствіяхъ должна была достаточно выясниться изъ предъидущаго; болѣе-же подробное изложеніе дальнѣйшаго хода было-бы обременительно для начинающаго читателя и излишне для знающаго.

8. Если подъ *присоединенной* кривой (adjungirte Curve Nöther'a) данной кривой

$$F(x\,,y) = 0 \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(1)$$

будемъ разумѣть такую, которая проходитъ чрезъ всѣ особенныя точки, причемъ въ каждой изъ нихъ имѣетъ тѣ же особенности, какъ и основная кривая (1), но порядка на единицу нисшаго, слѣдовательно въ k-кратной точкѣ данной кривой $k-1$-кратную, ея двойныя касательныя простыми, ея тройныя двойными и т. д.; причемъ касаніе вѣтвей порядка $\lambda - 1$ тамъ, гдѣ вѣтви фундаментальной кривой (1) имѣютъ касаніе порядка λ, то опредѣленіе ея уравненія можетъ быть выполнено при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій, именно рѣшенія уравненій первой степени относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ этого уравненія. Пусть будетъ:

$$f(x\,,y) = 0 \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(2)$$

уравненіе присоединенной кривой порядка m, гдѣ m должно быть достаточно высоко для возможности задачи. По опредѣленію ея, координаты k-кратной точки фундаментальной кривой, опредѣляемыя парою уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \chi_{k-2}(x) = 0\,, \\ \psi_{k-2}(x,y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

должны удовлетворять всѣмъ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{c} f(x\,,y) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \\[2mm] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2mm] \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial x^{k-2}} = 0 \quad \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial x^{k-3}\partial y} = 0 \ldots \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial y^{k-2}} = 0\,, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

ибо эти точки для присоединенной кривой $k-1$-кратныя. Слѣдовательно первая часть каждаго изъ этихъ уравненій должна дѣлиться безъ остатка на первую часть уравненія

$$\psi_{k-2}(x\,,y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$\chi_{k-2}(x) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Итакъ дѣлимъ первую часть каждаго изъ уравненій (4) на $\psi_{k-2}(x\,,y)$ (расположивъ всѣ по убывающимъ степенямъ y), и когда получимъ остатокъ степени относительно y ниже чѣмъ $\psi_{k-2}(x\,,y)$, приравниваемъ нулю коэффиціентъ при каждой степени y въ этомъ остаткѣ: получимъ рядъ уравненій вида

$$\varrho(x) = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

которыя всѣ должны обращаться тождественно въ нуль для x, равныхъ корнямъ уравненія (6); а потому первыя части ихъ должны быть дѣлимы безъ остатка на $\chi_{k-2}(x)$; слѣдовательно производя дѣленіе и получивъ остатокъ, мы должны коэффиціенты его при каждой степени x приравнять нулю: это дастъ рядъ уравненій, очевидно линейныхъ относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ уравненія $f(x\,,y) = 0$.

9. Угловые коэффиціенты въ этой точкѣ опредѣлятся изъ уравненія:

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}} + \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}\partial y} y' + \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}\partial y^2} y'^2 + \ldots + \frac{\partial^{k-1} f}{\partial y^{k-1}} y'^{k-1} = 0\,; \;.\;.\; (1)$$

если въ разсматриваемыхъ точкахъ данная кривая имѣетъ совпадающія касательныя, слѣдовательно уравненіе (2) §§ (1) и (4) для y' имѣетъ кратные корни, то эти кратные корни будутъ корнями и этого уравненія (1) кратности пониженной на единицу, какъ и для уравненія:

$$\Phi_1(x, y, y') = D\left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

[(4) § 4], а потому первая часть уравненія (1) должна дѣлиться безъ остатка на функцію $\Phi_1(x, y, y')$; выполняя дѣленіе по расположеніи по степенямъ y', мы должны, слѣдовательно, приравнять нулю въ остаткѣ коэффиціенты при каждой степени y', что дастъ рядъ уравненій вида:

$$\mathfrak{L}(x, y) = 0\,, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

которыя должны удовлетворяться всѣми значеніями x и y, удовлетворяющими уравненіямъ

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = 0\,, \\ \varphi(x, y) = 0\,, \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

опредѣляющимъ координаты разсматриваемыхъ особенныхъ точекъ данной кривой; дѣля потому $\mathfrak{L}(x, y)$ на $\varphi(x, y)$ по расположеніи обѣихъ по убывающимъ степенямъ y, мы приравниваемъ нулю коэффиціенты при каждой степени y въ имѣющемся получиться остаткѣ этого дѣленія, что дастъ рядъ уравненій вида:

$$\sigma(x) = 0\,, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

которыя всѣ должны удовлетворяться корнями уравненія $f(x) = 0$; а потому первыя части каждаго изъ нихъ должны дѣлиться безъ остатка на $f(x)$; приравнивая на этомъ основаніи нулю коэффиціенты при каждой степени x въ этихъ остаткахъ, получимъ новый рядъ уравненій, очевидно, линейныхъ относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ уравненія $f(x, y) = 0$ присоединенной кривой.

10. Если l вѣтвей данной кривой въ какой-либо k-кратной точкѣ имѣютъ общую касательную, то $l - 1$ вѣтвей присоединенной кривой будутъ къ ней касаться; кромѣ того, если для g изъ этихъ вѣтвей y'' имѣетъ одинаковое значеніе, то для присоединенной кривой $g - 1$ будутъ имѣть равныя значенія, и потому уравненіе

$$\mathfrak{L}(x, y, y', y'') = 0\,, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

опредѣляющее y'' для присоединенной кривой будетъ имѣть корнями всѣ корни уравненія

$$\mathbf{F}(x, y, y', y'') = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

опредѣляющаго y'' для фундаментальной кривой, кратности пониженной на единицу, какъ въ уравненіи:

$$G(x, y, y', y'') = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ

$$G(x, y, y', y'') = D\left(\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y''}\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

при условіи $H(x, y, y') = 0$; а потому первая часть (1) должна дѣлиться безъ остатка на $G(x, y, y', y'')$, откуда подобно предыдущему получимъ рядъ новыхъ уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ $f(x, y) = 0$. Дѣйствительно, коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y'' остатка отъ этого дѣленія, всѣ вида

$$H(x, y, y'),$$

должны дѣлиться безъ остатка на первую часть уравненія, опредѣляющаго разсматриваемыя значенія y'; слѣдовательно должны быть равны нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y' въ остаткѣ дѣленія. которые вида

$$K(x, y);$$

слѣдовательно они должны дѣлиться безъ остатка на первую часть уравненія того же вида той пары, которая опредѣляетъ координаты особенной точки разсматриваемой категоріи; а потому коэффиціенты при степеняхъ y въ остаткѣ этого дѣленія должны обращаться въ нуль для всѣхъ значеній x, равныхъ корнямъ перваго уравненія пары, опредѣляющаго абсциссы, слѣдовательно должны дѣлиться безъ остатка на первую часть этого уравненія; приравнивая на этомъ основаніи коэффиціенты остатка отъ этого дѣленія нулю, получимъ опять линейныя уравненія для опредѣленія коэффиціентовъ $f(x, y)$. Такъ можно идти и далѣе. Итакъ для опредѣленія коэффиціентовъ $f(x, y)$ мы будемъ имѣть рядъ линейныхъ уравненій.

11. Присоединенныя кривыя будутъ пересѣкать данную кривую (фундаментальную) еще въ другихъ точкахъ, изъ которыхъ только часть можетъ быть задана произвольно; нѣкоторое же опредѣленное число. постоянное для всѣхъ присоединенныхъ кривыхъ, независящее отъ ихъ степени, зависящее только отъ вида фундаментальной кривой, будетъ по нимъ опредѣляться. Поэтому это число Клебшъ и назвалъ *родомъ* кривой (Geschlecht, Rang Weierstrass'a, Defect Cayly, Genre Жордана). Для кривыхъ n-го порядка, имѣющихъ только кратныя точки съ различны-

ми касательными въ нихъ, это число, по Риману означаемое чрезъ p, опредѣляется формулою:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{k=1}^{k=m} \alpha_k \frac{k.(k-1)}{1.2},$$

гдѣ α_k число k-кратныхъ точекъ. Это же число равно $\mu_k.\nu_k$, если μ_k есть степень относительно x уравненія $\chi_{k-2}(x)=0$, а ν_k степень относительно y уравненія $\psi_{k-2}(x,y)=0$, опредѣляющихъ координаты k-кратныхъ точекъ. Итакъ для разсматриваемаго случая p находится при помощи раціональныхъ дѣйствій. Для кривыхъ съ двойными точками и точками возврата Клебшъ даетъ формулу:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - d - r,$$

гдѣ d число двойныхъ, а r число точекъ возврата, т. е. двойныхъ съ совпадающими касательными; числа эти точно также найдутся какъ и въ предыдущемъ случаѣ, т. е. помножая степень уравненія $\chi(x)=0$ относительно x на степень уравненія $\psi(x,y)=0$ относительно y, если эта пара даетъ двойныя точки съ различными касательными, и тоже дѣлая для другой пары уравненій, опредѣляющихъ двойныя точки съ совпадающими касательными. Формулы для p въ общемъ случаѣ мы нигдѣ не встрѣчали.

Опечатки въ статьѣ М. А. Тихомандрицкаго: „Розысканіе особенныхъ точекъ плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ“.

Стр. 115 строка 22, вмѣсто

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k}+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-1}\partial y}y'+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-2}\partial x^2}y'^2+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-3}\partial y^3}y'^3+\ldots+\frac{\partial^k F}{\partial y^k}y'^k=0$$

должно быть

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k}+C_1^k\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-1}\partial y}y'+C_2^k\frac{\partial^k F}{\partial y^{k-2}\partial y^2}y'^2+C_3^k\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-3}\partial y^3}y'^3+\ldots+\frac{\partial^k F}{\partial y^k}y'^k=0$$

Стр. 119 строка 26, вмѣсто

$$\psi_{k-1}(x\,,y)=0$$

должно быть

$$\psi_{k-2}(x\,,y)=0$$

Стр. 126 строка 1, вмѣсто

$$\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-1}}+\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-2}\partial y}y'+\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-3}\partial y^2}y'^2+\ldots+\frac{\partial^{k-1}f}{\partial y^{k-1}}y'^{k-1}=0$$

должно быть

$$\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-1}}+C_1^{k-1}\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-2}\partial y}y'+C_2^{k-1}\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-3}\partial y^2}y'^2+\ldots+\frac{\partial^{k-1}f}{\partial y^{k-1}}y'^{k-1}=0$$
