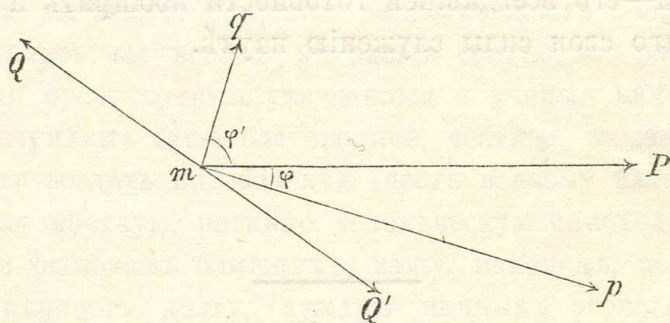


## По вопросу о сложении силъ.

Х. С. Головина.

1. Положимъ, что на данную точку  $m$  дѣйствуетъ сила  $2p'$ , по направленію данной прямой  $mP$ , (фиг. 1-я) и еще двѣ силы  $p'$ , направленные по другой данной прямой  $QQ'$  въ противоположныя стороны.



Фиг. 1-я.

Такъ какъ двѣ послѣднія силы взаимно уравновѣшиваются, то общая равнодѣйствующая всей системы силъ приводится къ силѣ  $2p'$ , направленной по прямой  $mP$ . Но та же система силъ можетъ быть замѣнена двумя взаимно перпендикулярными силами  $p$  и  $q$ , причемъ  $p$  будетъ равнодѣйствующей двухъ равныхъ силъ  $p'$ , направленныхъ по прямымъ  $mP$  и  $mQ$ , а  $q$  равнодѣйствующей двухъ такихъ же силъ  $p'$ , направленныхъ по  $mP$  и  $mQ'$ .

Обозначая углы, составляемые прямою  $mP$  съ направленіями силъ  $p$  и  $q$ , черезъ  $\varphi$  и  $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , можемъ написать

$$p = 2p'f(\varphi) \quad \text{и} \quad q = 2p'f(\varphi').$$

Сила  $2p'$ , очевидно, будетъ равнодѣйствующей двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ  $p$  и  $q$ ; обозначимъ ея величину черезъ  $r$ , т. е. положимъ

$$2p' = r.$$

Тогда будетъ

$$p = rf(\varphi) \quad \text{и} \quad q = rf(\varphi').$$

Положимъ, что къ точкѣ  $m$  приложена вторая система такихъ-же силъ  $p$  и  $q$ , но расположенная симметрически съ первой относительно направленія  $mP$  равнодѣйствующей силы  $r$ ; тогда общая равнодѣйствующая четырехъ силъ будетъ  $2r$  и направится также по прямой  $mP$ .

Такъ какъ послѣднія силы попарно равны и направлены подъ равными углами ( $\varphi$  и  $\varphi'$ ) къ своей равнодѣйствующей, то можно написать

$$r = pf(\varphi) + qf(\varphi') = r\{[f(\varphi)]^2 + [f(\varphi')]^2\}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$[f(\varphi)]^2 + [f(\varphi')]^2 = 1$$

и

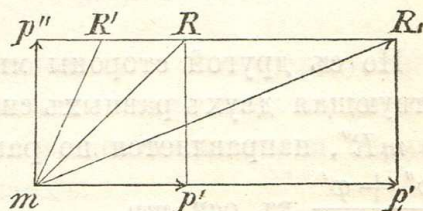
$$p^2 + q^2 = r^2.$$

Уголъ  $\varphi$  можетъ имѣть произвольную величину, а, слѣдовательно, и величины силъ  $p$  и  $q$  могутъ быть какія угодно.

Такимъ образомъ найдено, что величина равнодѣйствующей  $r$  двухъ взаимно-перпендикулярныхъ, но имѣющихъ какую угодно величину, силъ  $p$  и  $q$  опредѣляется длиною діагонали параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ, изображающихъ эти силы.

Конечно, пока нельзя утверждать, что и направленіе равнодѣйствующей опредѣляется тою же діагональю; но не трудно указать частный случай, въ которомъ это будетъ имѣть мѣсто. Въ самомъ дѣлѣ, если величины двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ будутъ равны между собою ( $q = p$ ), то ихъ равнодѣйствующая направится по равнодѣлящей прямого угла и, слѣдовательно, совпадетъ съ діагональю сказаннаго параллелограмма, который обращается тогда въ квадратъ.

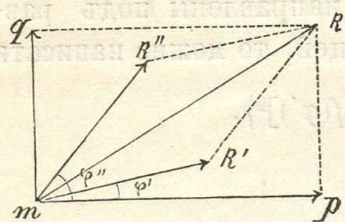
2. Положимъ теперь, что къ точкѣ  $m$  приложена кромѣ сказанныхъ силъ  $p$  и  $p$ , дѣйствующихъ по направленіямъ  $mr'$  и  $mp''$ , (фиг. 2-я) еще сила, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ одной изъ данныхъ силъ  $mr'$ , а величина  $r$  равна величинѣ равнодѣйствующей этихъ силъ. Тогда общая равнодѣйствующая направится по равнодѣлящей угла  $Rmp'$  и, слѣдовательно, отрѣжетъ на линіи  $p''R$  отрѣзокъ  $RR_1 = r$ . Поэтому и для двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ  $p$  и  $p + r$  равнодѣйствующая опредѣляется, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ силахъ. Можно сказать, что всякая сила, направленная по прямой  $mR_1$ , разлагаетъ



Фиг. 2-я.

ся на составляющія по взаимно-перпендикулярнымъ направлѣніямъ  $tr'$  и  $tr''$ , слѣдую правилу параллелограмма силъ, или, иначе, что составляющія эти будутъ представлять собою проекціи силы на соотвѣтствующія направлѣнія.

Не трудно показать, что тѣже заключенія будутъ имѣть мѣсто и для направлѣнія  $mR'$ , дѣлящаго пополамъ уголъ  $p''mR$ , а также для направлѣній равнодѣлящихъ угловъ  $p'mR_1$  и  $p''mR'$  и т. д. для безконечно большого числа направлѣній равнодѣйствующей силы.



Фиг. 3-я.

3. Пусть два направлѣнія  $mR'$  и  $mR''$  (фиг. 3-я) обладают сказаннымъ свойствомъ относительно осей  $tr$  и  $tq$ , и положимъ, что по этимъ направлѣніямъ на точку  $m$  дѣйствуютъ двѣ силы равной величины  $r'$ .

Каждая изъ этихъ послѣднихъ силъ можетъ быть замѣнена ея составляющими по направлѣніямъ осей; для силы, направленной по  $mR'$ , эти составляющія будутъ:

$$p' = r' \cos \varphi' \quad \text{и} \quad q' = r' \sin \varphi',$$

а для силы, направленной по  $mR''$ :

$$p'' = r' \cos \varphi'' \quad \text{и} \quad q'' = r' \sin \varphi''.$$

Силы, дѣйствующія вдоль одной прямой, складываются алгебраически и потому можно сказать, что двѣ данныя силы  $r'$  замѣняются двумя же взаимно-перпендикулярными силами

$$p = r'(\cos \varphi' + \cos \varphi'') \quad \text{и} \quad q = r'(\sin \varphi' + \sin \varphi'').$$

Величина равнодѣйствующей послѣднихъ силъ, какъ показано выше, будетъ

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = r' \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi'' - \varphi')} = 2r' \cos\left(\frac{\varphi'' - \varphi'}{2}\right).$$

Но съ другой стороны мы знаемъ, что та же сила  $r$ , какъ равнодѣйствующая двухъ равныхъ силъ  $r'$ , дѣйствующихъ по направлѣніямъ  $mR'$  и  $mR''$ , направляется по равнодѣлящей угла  $R'mR''$ , т. е. подъ угломъ  $\frac{\varphi'' + \varphi'}{2}$  къ оси  $tr$ .

Проекція равнодѣйствующей  $r$  на эту ось будетъ

$$r \cos \frac{\varphi'' + \varphi'}{2} = 2r' \cos \frac{\varphi'' + \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} = r'(\cos \varphi' + \cos \varphi'').$$

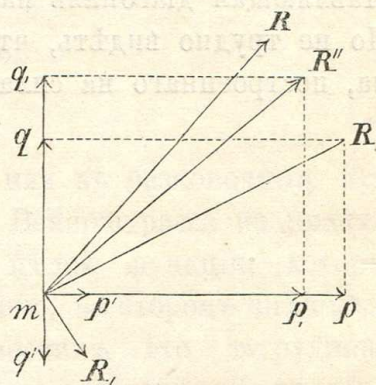
Слѣдовательно будетъ

$$r \cos \frac{\varphi'' + \varphi'}{2} = p,$$

т. е. проекція силы  $r$  на ось  $mr$  будетъ представлять въ тоже время составляющую этой силы по направленію сказанной оси.

Поэтому, если правило параллелограмма силъ справедливо для двухъ направлений  $mR'$  и  $mR''$ , то оно будетъ справедливо и для направлення  $mR$ , раздѣляющаго пополамъ уголъ между этими двумя направленнями.

4. Подраздѣляя послѣдовательно пополамъ углы между различными направленнями, для которыхъ доказано правило сложения и разложения силъ, придемъ къ заключенію, что правило это будетъ справедливо для бесконечно большаго числа направлений, непрерывно слѣдующихъ одно за другимъ, т. е. будетъ справедливо для всякаго, произвольно выбраннаго, направлення. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что для нѣкотораго направлення  $mR$  силы  $r$  (фиг. 4-я) правило параллелограмма не имѣетъ мѣста; тогда направленіе  $mR'$  діагонали параллелограмма, построеннаго на составляющихъ  $p$  и  $q$  силы  $r = mR$ , должно отличаться отъ направлення самой силы  $mR$ , а величина этой діагонали будетъ  $mR' = r = \sqrt{p^2 + q^2}$ .



Фиг. 4-я.

По доказанному выше всегда можно выбрать такое направленіе  $mR''$ , лежащее между  $mR$  и  $mR'$ , для котораго правило параллелограмма будетъ справедливо и, слѣдовательно, составляющія силы  $r$ , дѣйствующей по  $mR''$ , будутъ проекціями этой силы на оси  $mp$  и  $mq$ ; при этомъ необходимо будетъ  $p_1 < p$  и  $q_1 > q$ . Силу  $mR$  можно разсматривать какъ равнодѣйствующую силѣ  $mR''$  и  $mR_1$ , при чемъ составляющія силы  $mR_1$  по осямъ будутъ

$$mp' = p - p_1 \quad \text{и} \quad mq' = -(q_1 - q).$$

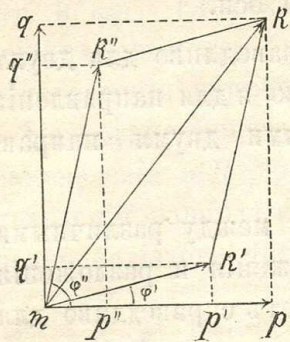
Равнодѣйствующая  $mR$  оказывается лежащею внѣ угла, образуемаго ея составляющими  $mR''$  и  $mR_1$ , что невозможно; стало быть направленіе силы  $mR$  не можетъ отличаться отъ направлення діагонали параллелограмма, построеннаго на ея составляющихъ.

Такимъ образомъ можно считать доказаннымъ, что равнодѣйствующая двухъ какихъ угодно взаимно-перпендикулярныхъ силъ опредѣляется, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, діагональю параллелограмма, построеннаго на силахъ составляющихъ.

5. Послѣдній выводъ не трудно распространить и на силы, уголъ между которыми будетъ какой угодно, отличающійся отъ прямого.

Пусть даны двѣ такія силы  $r'$  и  $r''$ , наклоненныя подъ углами  $\phi'$  и  $\phi''$  къ оси  $mr$  (фиг. 5-я).

Составляющія (или проекціи) силы  $r'$  по осямъ  $mp$  и  $mq$  будутъ



$$p' = r' \cos \varphi' \quad \text{и} \quad q' = r' \sin \varphi'.$$

Составляющія по тѣмъ же осямъ силы  $r''$  будутъ

$$p'' = r'' \cos \varphi'' \quad \text{и} \quad q'' = r'' \sin \varphi''.$$

Полагая

$$p = r' \cos \varphi' + r'' \cos \varphi'' \quad \text{и} \quad q = r' \sin \varphi' + r'' \sin \varphi'',$$

Фиг. 5-я.

можемъ, по предыдущему, сказать, что силы  $p$  и  $q$  (взаимно-перпендикулярныя) замѣняютъ собою данныя силы  $r'$  и  $r''$ ; равнодѣйствующая тѣхъ и другихъ силъ будетъ таже сила  $r$ , представляющая діагональ параллелограмма, построеннаго на силахъ  $p$  и  $q$ . Но не трудно видѣть, что она же будетъ діагональю параллелограмма, построеннаго на силахъ  $r'$  и  $r''$ .