Communications de la Société mathématique de Kharkow.

2-e série, Tome III, № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ III.

№ 1.

ХАРЬКОВЪ. 1893

92 Типографія М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.

~~1891~~ 1891-92-93 г.г.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.

2-e série, Tome III.

СООБЩЕНІЯ

ХАРЬКОВСКАГО

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ III.

(Съ портретомъ В. Г. Имшенецкаго).

ХАРЬКОВЪ.

Типографія и Литографія Зильберберга, Рыбная улица, № 25-й.

1893.

На основанiи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *К. Андреевъ.*

СОДЕРЖАНІЕ

III-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Января 1892 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель, К. А. Андреевъ.
2. Товарищи предсѣдателя: В. Л. Кирпичевъ и А. М. Ляпуновъ.
3. Секретарь, В. А. Стекловъ.

В. Почетные члены.

1. Бредихинъ Ѳедоръ Александровичъ } академики.
2. Чебышевъ Пафнутій Львовичъ. }

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. ун.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. технол. института.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. универ.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, почетн. членъ Харьк. унив.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, препод. Старобѣльской гим.
6. Влезковъ Сергѣй Ѳедоровичъ, стипендіатъ Харьк. унив.
7. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, директоръ С. П. Б. техн. инст.
8. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. технол. инст.
9. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директоръ Сумск. реальн. учил.
10. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
11. Делярю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьк. универ.
12. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, стипенд. Харьк. унив.
13. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
14. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директоръ Харьк. техн. инст.
15. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронеж. военной гимназ.
16. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, помощн. библіот. Харьк. ун.
17. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, препод. Харьк. техн. инст.
18. Ковальскій Матвѣй Ѳедоровичъ, проф. Харьк. универс.

19. Косенко Михаилъ Семеновичъ, препод. Харьк. прогимназiи.
20. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. уч. Курск. губ.
21. Латышевъ Григорiй Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
22. Левицкiй Григорiй Васильевичъ, проф. Харьк. универ.
23. Линицкiй Иванъ Дмитрiевичъ, преп. Харьк. инст. благор. дѣв.
24. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьк. унив.
25. Маевскiй Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимназ.
26. Михайловскiй Болеславъ Григорьевичъ, препод. Харьк. реальн. уч.
27. Морозовъ Юрiй Ивановичъ, проф. Харьк. универ.
28. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
29. Пильчиковъ Николай Дмитрiевичъ, проф. Харьк. унив.
30. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. техн. инст.
31. Предтеченскiй Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. техн. инст.
32. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. реал. учил.
33. Раевскiй Сергѣй Александровичъ, инспек. Харьк. учебн. окр.
34. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
35. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
36. Самецкiй Рафаилъ Николаевичъ, препод. Курск. гимназ.
37. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, препод. 2-й Харьк. гимназ.
38. Стекловъ Владимiръ Андреевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
39. Тихомандрицкiй Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
40. Флавицкiй Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьк. унив.
41. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Тамбовск. реальн. учил.
42. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
43. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьк. унив.
44. Шиховъ Василiй Васильевичъ, директ. Харьк. реальн. учил.
45. Штукаревъ Иванъ Дмитрiевичъ, препод. 2-й Харьк. гимназ.
46. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. техн. инст.

D. Члены-корреспонденты.

1. Бобылевъ Дмитрiй Константиновичъ, проф. С. П. Б. унив.
2. Ермаковъ Василiй Петровичъ, проф. унив. Св. Влад.
3. Жуковскiй Николай Егоровичъ, проф. Моск. унив.
4. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. С. П. Б. унив.
5. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. С. П. Б. унив., академ.
6. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. С. П. Б. унив.
7. Пташицкiй Иванъ Львовичъ, проф. С. П. Б. унив.
8. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варш. унив.
9. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермской гимн.
10. Weyr Emil, проф. унив. въ Вѣнѣ, членъ Вѣнск. акад. наукъ.

Одна задача изъ теоріи упругости.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Въ Journal de Mathématiques pures et appliquées за 1884 г. *) помѣщена статья Maurice Lévy, въ которой онъ указываетъ на новый случай рѣшенія одной задачи теоріи упругости, именно опредѣляетъ форму равновѣсія безконечно-тонкаго стержня подъ условіемъ, что на линію центровъ тяжести сѣченій дѣйствуетъ постоянное давленіе нормально къ этой линіи, причемъ разсматривается только плоская форма равновѣсія. Кривыя равновѣсія, получающіяся въ этомъ случаѣ, подробнѣе изучены Halphen'омъ въ Journal de l'Ecole Polytechnique за 1884 г. **) Мнѣ кажется не безъинтереснымъ разсмотрѣть нѣкоторые случаи, когда кривая не плоская, а двоякой кривизны, причемъ придется, конечно, ограничить форму сѣченія прута. Вопросъ о равновѣсіи стержня съ круговымъ сѣченіемъ, находящагося подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ только къ концамъ его, рѣшенъ Кирхгофомъ, причемъ указанъ и разобранъ имъ случай, когда стержень представляетъ форму винтовой линіи. ***) Въ настоящей замѣткѣ я постараюсь показать, что для стержня съ сѣченіемъ, два момента инерціи котораго для двухъ главныхъ осей равны между собою (кругъ, правильный многоугольникъ), вопросъ о равновѣсіи вполнѣ рѣшается и въ предположеніи, что кромѣ силъ данныхъ, дѣйствующихъ на концахъ стержня, на линію центровъ тяжести сѣченій дѣйствуетъ еще постоянное

*) Maurice Lévy. „Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications". Journal de Mathématiques pures et appliquées. Tome dixième, 1884.

**) Halphen. „Sur une courbe élastique". Journal de l'Ecole Polytechnique. 1884, p. 54.

***) Kirchhoff. „Vorlesungen über Mathematische Physik".

давленіе, направленное по главной нормали къ этой кривой. Случай, подобный случаю Maurice Lévy, только не для плоской формы равновѣсія, а для какой угодно. Мы увидимъ при этомъ, что рѣшеніе вопроса приводитъ къ эллиптическимъ интеграламъ всѣхъ трехъ родовъ, т. е. къ эллиптическимъ трансцендентнымъ. При томъ не трудно будетъ замѣтить, что винтовая линія также будетъ представлять возможную форму равновѣсія, какъ и для случая равновѣсія безъ дѣйствія силы давленія.

§ 2.

И такъ, предположимъ, что стержень изотропенъ, моменты инерціи относительно двухъ главныхъ осей сѣченія равны между собою и на линію центровъ тяжести сѣченій дѣйствуетъ постоянное давленіе D по главной нормали къ этой линіи. Называя черезъ ξ, η, ζ оси неподвижныхъ въ пространствѣ координатъ, а черезъ x, y, z оси, начало координатъ которыхъ лежитъ въ центрѣ тяжести сѣченія, направимъ ось z'овъ по касательной къ кривой центровъ тяжести, ось x'овъ по касательной къ кривой, въ которую обращается одна изъ главныхъ осей инерціи послѣ деформаціи, ось y'овъ перпендикулярно къ послѣдней. Назовемъ черезъ A, B, C проекціи на оси x, y, z силы, дѣйствующей въ каждой точкѣ тѣла, черезъ A', B', C' проекціи момента этихъ силъ на тѣже оси. Пусть оси x, y, z составляютъ

$$\left.\begin{array}{l} \text{съ осью } \xi\text{, углы, косинусы которыхъ } \alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3 \\ \text{съ осью } \eta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \beta_1\,,\ \beta_2\,.\ \beta_3 \\ \text{съ} \ldots\ \zeta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \gamma_1\,,\ \gamma_2\,,\ \gamma_3 \end{array}\right\} \ldots (1)$$

Положимъ, далѣе, по Клебшу

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \alpha_2\frac{d\alpha_3}{ds}+\beta_2\frac{d\beta_3}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma_3}{ds} = -\alpha_3\frac{d\alpha_2}{ds}-\beta_3\frac{d\beta_2}{ds}-\gamma_3\frac{d\gamma_2}{ds}, \\ r_2 &= \alpha_3\frac{d\alpha_1}{ds}+\beta_3\frac{d\beta_1}{ds}+\gamma_3\frac{d\gamma_1}{ds} = -\alpha_1\frac{d\alpha_3}{ds}-\beta_1\frac{d\beta_3}{ds}-\gamma_1\frac{d\gamma_3}{ds}, \\ r_3 &= \alpha_1\frac{d\alpha_2}{ds}+\beta_1\frac{d\beta_2}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma_2}{ds} = -\alpha_2\frac{d\alpha_1}{ds}-\beta_2\frac{d\beta_1}{ds}-\gamma_2\frac{d\gamma_1}{ds}, \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

причемъ для изотропнаго тѣла, при сдѣланномъ выше условіи относительно моментовъ инерціи, имѣемъ

$$r_1 = -\frac{A'}{\lambda^2}\,,\quad r_2 = -\frac{B'}{\lambda^2}\,,\quad r_3 = -\frac{C'}{\mu^2}\,,\ \ldots\ldots (3)$$

и

$$\lambda^2 = Eq\lambda_1{}^2, \qquad \mu^2 = Eq\mu_1{}^2,$$

гдѣ E модуль упругости, q площадь сѣченія, λ_1, μ_1 главные радіусы инерціи сѣченія.

Называя черезъ $X'ds$, $Y'ds$, $Z'ds$ проекціи на неподвижныя въ пространствѣ оси внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на элементъ ds (s обозначаетъ дугу), имѣемъ

$$X' = D\cos(R\xi), \quad Y' = D\cos(R\eta), \quad Z' = D\cos(R\zeta),$$

гдѣ R означаетъ направленіе (перваго) радіуса кривизны кривой центровъ тяжести.

Какъ извѣстно

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha_3, \quad \frac{d\eta}{ds} = \beta_3, \quad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_3,$$

и

$$\cos(R\xi) = R\frac{d^2\xi}{ds^2}, \quad \cos(R\eta) = R\frac{d^2\eta}{ds^2}, \quad \cos(R\zeta) = R\frac{d^2\zeta}{ds^2},$$

или

$$\cos(R\xi) = R\frac{d\alpha_3}{ds}, \quad \cos(R\eta) = R\frac{d\beta_3}{ds}, \quad \cos(R\zeta) = R\frac{d\gamma_3}{ds},$$

и

$$\left.\begin{array}{l|l|l|}
\dfrac{d\alpha_1}{ds} = r_2\alpha_3 - r_3\alpha_2 & \dfrac{d\beta_1}{ds} = r_2\beta_3 - r_3\beta_2 & \dfrac{d\gamma_1}{ds} = r_2\gamma_3 - r_3\gamma_2 \\
\dfrac{d\alpha_2}{ds} = r_3\alpha_1 - r_1\alpha_3 \ (m), & \dfrac{d\beta_2}{ds} = r_3\beta_1 - r_1\beta_3 \ (n), & \dfrac{d\gamma_2}{ds} = r_3\gamma_1 - r_1\gamma_3 \ (p) \\
\dfrac{d\alpha_3}{ds} = r_1\alpha_2 - r_2\alpha_1 & \dfrac{d\beta_3}{ds} = r_1\beta_2 - r_2\beta_1 & \dfrac{d\gamma_3}{ds} = r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1
\end{array}\right\} . \quad (4)$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{ds}\right)^2},$$

изъ послѣднихъ уравненій (4) (m), (n), (p), возвысивъ ихъ въ квадратъ и сложивъ, имѣемъ

$$\frac{1}{R} = \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2},$$

и положивъ $\varrho = \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2}$, находимъ $R = \dfrac{1}{\varrho}$ . . . . (5)

*

Такимъ образомъ

$$X' = \frac{D}{\varrho}\frac{d\alpha_3}{ds}, \quad Y' = \frac{D}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds}, \quad Z' = \frac{D}{\varrho}\frac{d\gamma_3}{ds}.$$

Если положимъ

$$U = \iint X'dxdy, \quad V = \iint Y'dxdy, \quad W = \iint Z'dxdy,$$

$$U_1 = \iint X'xdxdy, \quad U_2 = \iint X'ydxdy,$$

$$V_1 = \iint Y'xdxdy, \quad V_2 = \iint Y'ydxdy,$$

$$W_1 = \iint Z'xdxdy, \quad W_2 = \iint Z'ydxdy,$$

то, какъ извѣстно, шесть условій равновѣсія представятся въ видѣ *)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3) + U = 0, \\ &\frac{d}{ds}(A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3) + V = 0, \\ &\frac{d}{ds}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3) + W = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(A'\alpha_1 + B'\alpha_2 + C'\alpha_3) + A\alpha_2 - B\alpha_1 + \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2 - \gamma_1 V_1 - \gamma_2 V_2 = 0, \\ &\frac{d}{ds}(A'\beta_1 + B'\beta_2 + C'\beta_3) + A\beta_2 - B\beta_1 + \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 - \alpha_1 W_1 - \alpha_2 W_2 = 0, \\ &\frac{d}{ds}(A'\gamma_1 + B'\gamma_2 + C'\gamma_3) + A\gamma_2 - B\gamma_1 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 - \beta_1 U_1 - \beta_2 U_2 = 0, \end{aligned}\right\} . (7)$$

или, по отношенію къ координатнымъ осямъ x, y, z, въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA}{ds} + (r_3 B - r_2 C) + \alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W = 0, \\ &\frac{dB}{ds} + (r_1 C - r_3 A) + \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 W = 0, \\ &\frac{dC}{ds} + (r_2 A - r_1 B) + \alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3 W = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (6_1)$$

---

*) Clebsch. „Theorie der Elasticität fester Körper". Leipzig 1862. S. 207.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dA'}{ds}+B'r_3-C'r_2-B+\alpha_3U_2+\beta_3V_2+\gamma_3W_2=0,\\
&\frac{dB'}{ds}+C'r_1-A'r_3+A-\alpha_3U_2-\beta_3V_2-\gamma_3W_1=0,\\
&\frac{dC'}{ds}+A'r_2-B'r_1+\begin{Bmatrix}\alpha_2U_1+\beta_2V_1+\gamma_2W_1\\-\alpha_1U_2-\beta_1V_2-\gamma_1W_2\end{Bmatrix}=0.
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ (7_1)$$

Не трудно убѣдиться, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$U=\frac{D}{\varrho}\frac{d\alpha_3}{ds},\quad V=\frac{D}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds},\quad W=\frac{D}{\varrho}\frac{d\gamma_3}{ds},\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

а

$$U_1=V_1=W_1=U_2=V_2=W_2=0,$$

вслѣдствіе чего уравненія (6), (7), (6_1) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}(A\alpha_1+B\alpha_2+C\alpha_3)+\frac{D}{\varrho}\frac{d\alpha_3}{ds}=0,\\
&\frac{d}{ds}(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3)+\frac{D}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds}=0,\\
&\frac{d}{ds}(A\gamma_1+B\gamma_2+C\gamma_3)+\frac{D}{\varrho}\frac{d\gamma_3}{ds}=0,
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}(A'\alpha_1+B'\alpha_2+C'\alpha_3)+A\alpha_2-B\alpha_1=0,\\
&\frac{d}{ds}(A'\beta_1+B'\beta_2+C'\beta_3)+A\beta_2-B\beta_1=0,\\
&\frac{d}{ds}(A'\gamma_1+B'\gamma_2+C'\gamma_3)+A\gamma_2-B\gamma_1=0,
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (10)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dA}{ds}+r_3B-r_2C-\frac{D}{\varrho}r_2=0,\\
&\frac{dB}{ds}+r_1C-r_3A+\frac{D}{\varrho}r_1=0,\\
&\frac{dC}{ds}+r_2A-r_1B\qquad\quad=0,
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (11)$$

ибо

$$\alpha_1U+\beta_1V+\gamma_1W=\frac{D}{\varrho}\left[\alpha_1\frac{d\alpha_3}{ds}+\beta_1\frac{d\beta_3}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma_3}{ds}\right]=-\frac{Dr_2}{\varrho}$$

$$\alpha_2U+\beta_2V+\gamma_2W=\frac{D}{\varrho}\left[\alpha_2\frac{d\alpha_3}{ds}+\beta_2\frac{d\beta_3}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma_3}{ds}\right]=\frac{Dr_1}{\varrho}$$

въ силу перваго и втораго изъ выраженій (2), и очевидно, что

$$\alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3 W = \frac{D}{\varrho}\left[\alpha_3 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_3 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{ds}\right] = 0 .$$

Уравненія же (7_1) дадутъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA'}{ds} + B'r_3 - C'r_2 - B = 0 ,\\ &\frac{dB'}{ds} + C'r_1 - A'r_3 + A = 0 ,\\ &\frac{dC'}{ds} + A'r_2 - B'r_1 \qquad = 0 . \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (12)$$

Воспользовавшись выраженіями (3), получимъ окончательно

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr_1}{ds} = a_1 r_2 r_3 - \frac{B}{\lambda^2} ,\\ &\frac{dr_2}{ds} = - a_1 r_1 r_3 + \frac{A}{\lambda^2} ,\\ &\frac{dr_3}{ds} = 0 , \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (13)$$

причемъ для сокращенія положено $a_1 = \dfrac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2}$,

и кромѣ того

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA}{ds} = r_2 C - r_3 B + \frac{D}{\varrho} r_2 ,\\ &\frac{dB}{ds} = r_3 A - r_1 C - \frac{D}{\varrho} r_1 ,\\ &\frac{dC}{ds} = r_1 B - r_2 A . \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (11_1)$$

Интегрируя эту систему шести уравненій, найдемъ A, B, C, r_1, r_2, r_3 въ функціи s. Затѣмъ по уравненіямъ (4) опредѣлимъ α_i, β_i, γ_i ($i = 1$, 2, 3), и наконецъ найдемъ уравненіе кривой равновѣсія въ видѣ

$$\xi = \int \alpha_3 ds , \quad \eta = \int \beta_3 ds , \quad \zeta = \int \gamma_3 ds .$$

§ 3.

Интегрированіе системъ (13) и (11_1) выполняемъ слѣдующимъ образомъ.

Третье изъ уравненій (13) даетъ непосредственно

$$r_3 = \text{const} = c\,,$$

т. е. крученіе для всѣхъ точекъ стержня одно и то-же.

Помножая первыя два изъ уравненій (13) соотвѣтственно на r_1 и r_2 и складывая, имѣемъ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(r^2{}_1 + r^2{}_2) = \frac{1}{\lambda^2}(Ar_2 - Br_1),$$

а въ силу третьяго изъ уравненій (11_1), замѣтивъ, что $\varrho^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2$, находимъ

$$\frac{1}{2}\frac{d\varrho^2}{ds} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{dC}{ds}\,.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$\varrho^2 + \frac{2}{\lambda^2}C = L_1\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{14}$$

гдѣ L_1 произвольная постоянная.

Помноживъ затѣмъ первыя два изъ уравненій (13) соотвѣтственно на A, B, а первыя два (11_1) на r_1 и r_2 и сложивъ, получимъ

$$A\frac{dr_1}{ds} + B\frac{dr_2}{ds} + r_1\frac{dA}{ds} + r_2\frac{dB}{ds} = a_1 r_3(Ar_2 - Br_1) - r_3(Br_1 - Ar_2)\,,$$

или

$$\frac{d}{ds}(Ar_1 + Br_2) = -(a_1+1)r_3\frac{dC}{ds}\,.$$

Отсюда, интегрируя, получаемъ

$$Ar_1 + Br_2 = -(a_1+1)r_3 C + L_2\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{15}$$

гдѣ L_2 произвольная постоянная.

Выраженіе (15) при помощи интеграла (14) можно также представить въ видѣ

$$Ar_1 + Br_2 = (a_1+1)\frac{r_3\lambda^2}{2}\varrho^2 - \frac{(a_1+1)\lambda^2 r_3}{2}L_1 + L_2\,,$$

а положивъ

$$\frac{(a_1+1)r_3\lambda^2}{2} = b_1\,, \qquad L_2 - \frac{(a_1+1)\lambda^2 r_3 L_1}{2} = b_2\,,$$

будемъ имѣть

$$Ar_1 + Br_2 = b_1\varrho^2 + b_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15_1)$$

Помножая уравненія (11_1) послѣдовательно на A, B, C и сложивъ, найдемъ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(A^2 + B^2 + C^2) = \frac{D}{\varrho}(Ar_2 - Br_1).$$

или, при помощи третьяго изъ уравненій (11_1),

$$\frac{d}{ds}(A^2 + B^2 + C^2) = -\frac{2D}{\varrho}\frac{dC}{ds}.$$

Но уравненіе (14) даетъ

$$2\varrho\frac{d\varrho}{ds} + \frac{2}{\lambda^2}\frac{dC}{ds} = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{ds}(A^2 + B^2 + C^2) = 2D\lambda^2\frac{d\varrho}{ds}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2D\lambda^2\varrho + L_3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

гдѣ L_3 новая произвольная постоянная.

Это-же уравненіе, въ силу (14), можетъ быть приведено къ виду

$$A^2 + B^2 = -\frac{\lambda^4}{4}\varrho^4 + \frac{\lambda^4 L_1}{2}\varrho^2 + 2D\lambda^2\varrho + L_3 - \frac{\lambda^4 L_1{}^2}{4},$$

а положивъ

$$-\frac{\lambda^4}{4} = c_1, \quad \frac{\lambda^4 L_1}{2} = c_2, \quad 2D\lambda^2 = c_3 \quad L_3 - \frac{\lambda^4 L_1{}^2}{4} = c_4,$$

будемъ имѣть

$$A^2 + B^2 = c_1\varrho^4 + c_2\varrho^2 + c_3\varrho + c_4 \quad \ldots\ldots \quad (16_1)$$

Итакъ, имѣемъ между прочимъ,

$$\left.\begin{aligned} Ar_1 + Br_2 &= b_1\varrho^2 + b_2, \\ \text{и} \qquad A^2 + B^2 &= c_1\varrho^4 + c_2\varrho^2 + c_3\varrho + c_4. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Изъ этихъ уравненій получимъ

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{R_1(\varrho)B - r_2 R(\varrho)}{r_1 B - r_2 A}, \\ B &= \frac{r_1 R(\varrho) - A R_1(\varrho)}{r_1 B - r_2 A}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

гдѣ положено для краткости

$$R_1(\varrho)=b_1\varrho^2+b_2\,,\quad R(\varrho)=c_1\varrho^4+c_2\varrho^2+c_3\varrho+c_4\,.$$

Помноживъ второе изъ уравненій (18) на r_1, первое на r_2 и вычтя одно изъ другого, находимъ

$$Br_1-Ar_2=\frac{\varrho^2R(\varrho)-R_1(\varrho)(Ar_1+Br_2)}{r_1B-r_2A}\,,$$

откуда

$$\left(\frac{dC}{ds}\right)^2=\varrho^2R(\varrho)-R_1(\varrho)(Ar_1+Br_2)\,,$$

и замѣтивъ, что

$$\frac{dC}{ds}=-\lambda^2\varrho\,\frac{d\varrho}{as}\,,$$

въ силу уравненій (15_1) находимъ

$$\lambda^4\varrho^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2=\varrho^2R(\varrho)-R_1{}^2(\varrho)=\varrho^2(c\;\varrho^4+c_2\varrho^2+c_3\varrho+c_4)-(b_1\varrho^2+b_2)^2\,.$$

Допустивъ-же, что $b_2=0$, получимъ

$$\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2=\frac{c_1}{\lambda^4}\varrho^4+\frac{c_2}{\lambda^4}\varrho^2+\frac{c_3}{\lambda^4}\varrho+\frac{c_4}{\lambda^4}-\frac{b_1{}^2}{\lambda^4}\varrho^2,$$

а положивъ для краткости

$$\frac{c_1}{\lambda^4}=h_1\,,\quad \frac{c_2}{\lambda^4}-\frac{b_1{}^2}{\lambda^4}=h_2\,,\quad \frac{c_3}{\lambda^4}=h_3\,,\quad \frac{c_4}{\lambda^4}=h_4,$$

имѣемъ

$$\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2=h_1\varrho^4+h_2\varrho^2+h_3\varrho+h_4\,,$$

откуда

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{h_4+h_3\varrho+h_2\varrho^2+h_1\varrho^4}}=ds\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(19)$$

Интегрированіе этого выраженія опредѣляетъ ϱ въ эллиптическихъ функціяхъ отъ s.

Положимъ, такимъ образомъ,

$$\varrho=F(s)$$

и, не останавливаясь пока подробно на опредѣленіи вида этой функціи, покажемъ въ общемъ видѣ окончательное рѣшеніе вопроса. Прежде всего опредѣлимъ r_1 и r_2.

Помножая первое изъ уравненій (13) на r_2, второе на r_1 и вычитая одно изъ другого, получаемъ уравненіе

$$r_2\frac{dr_1}{ds}-r_1\frac{dr_2}{as}=a_1r_3\varrho^2-\frac{1}{\lambda^2}(Ar_1+Br_2),$$

которое при помощи уравненія (15_1), при условіи $b_2=0$, *) представится въ видѣ

$$r_2{}^2\frac{d}{ds}\frac{r_1}{r_2}=k\varrho^2, \quad \dots\dots\dots\dots (20)$$

гдѣ положено $k=(a_1r_3-\frac{1}{\lambda^2}b_1)$.

Изъ уравненія (20) слѣдуетъ

$$\frac{du}{ds}=k(1+u^2), \quad \dots\dots\dots\dots (20_1)$$

гдѣ $u=\frac{r_1}{r_2}$.

Интегрируя уравненіе (20_1), находимъ

$$u=\mathrm{tg}(ks+\mathrm{arctg}\,u_0),$$

гдѣ u_0 начальное значеніе u при $s=0$.

Отсюда безъ труда находимъ

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\mathrm{tg}ks+u_0}{1-\mathrm{tg}ks\cdot u_0},$$

и такъ какъ

$$r_1{}^2+r_2{}^2=\varrho^2=F^2(s),$$

то

$$r_2{}^2\left[1+\left(\frac{\mathrm{tg}ks+u_0}{1-\mathrm{tg}ks\cdot u_0}\right)^2\right]=\varrho^2=F^2(s).$$

и

$$\left.\begin{aligned} r_2&=\frac{\cos ks(1-\mathrm{tg}ks\cdot u_0)}{\sqrt{1+u_0{}^2}}\varrho, \\ r_1&=\frac{\cos ks(u_0+\mathrm{tg}ks)}{\sqrt{1+u_0{}^2}}\varrho \; **). \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

---

*) При дальнѣйшемъ сужденіи всегда будемъ считать $b_2=0$.

**) Если $u_0=0$, то выраженіе r_1 и r_2, замѣтимъ между прочимъ, принимаютъ слѣдующій весьма простой видъ

$$r_1=\sin ks\cdot\varrho,\quad r_2=\cos ks\cdot\varrho.$$

Шесть интеграловъ системъ (13) и (11_1), такимъ образомъ, найдены. Выпишемъ ихъ для ясности.

1) $r_3 = \text{const} = c$

2) $C = (L_1 - \varrho^2)\dfrac{\lambda^2}{2}$

3) $Ar_1 + Br_2 = b_1\varrho^2 + b_2$, ($b_2 = 0$ въ нашемъ допущеніи)

4) $A^2 + B^2 = c_1\varrho^4 + c_2\varrho^2 + c_3\varrho + c_4$,

5) $\varrho = F(s)$,

6) $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\operatorname{tg}ks + u_0}{1 - \operatorname{tg}ks \cdot u_0}$.

Эти уравненія и опредѣлятъ r_1, r_2 $r_3 \ldots C$ въ функціи дуги и шести произвольныхъ постоянныхъ, между которыми мы установили соотношеніе

$$b_2 = 0,$$

такъ что останется только пять произвольныхъ постоянныхъ.

§ 4.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію косинусовъ α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$). Величины γ_1, γ_2, γ_3, какъ извѣстно, удовлетворяютъ уравненіямъ (4) (p)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{ds} &= r_2\gamma_3 - r_3\gamma_2, \\ \frac{d\gamma_2}{ds} &= r_3\gamma_1 - r_1\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_3}{ds} &= r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)\,(p)$$

По предыдущему имѣемъ

$$\frac{dC}{ds} = -\lambda^2\varrho\frac{d\varrho}{ds} = Br_1 - Ar_2,$$

откуда

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{-Br_1 + Ar_2}{\varrho},$$

и слѣдовательно

$$\frac{d\varrho}{ds}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) = \frac{1}{\lambda^2\varrho}\left[Ar_2r_1\gamma_1 - Br_1{}^2\gamma_1 + Ar_2{}^2\gamma_2 - Br_1r_2\gamma_2\right].$$

Замѣняя затѣмъ въ правой части предыдущаго уравненія $r_1{}^2$ черезъ $\varrho^2 - r_2{}^2$ и $r_2{}^2$ черезъ $\varrho^2 - r_1{}^2$, получимъ

$$Ar_2r_1\gamma_1 - Br_1{}^2\gamma_1 + Ar_2{}^2\gamma_2 - Br_1r_2\gamma_2 = (Ar_1 + Br_2)(r_2\gamma_1 - r_1\gamma_2) + \varrho^2(A\gamma_2 - B\gamma_1),$$

но

$$Ar_1 + Br_2 = b_1\varrho^2,$$

а потому

$$Ar_2r_1\gamma_1 - Br_1{}^2\gamma_1 + Ar_2{}^2\gamma_2 - Br_1r_2\gamma_2 = -b_1\varrho^2\frac{d\gamma_3}{ds} + \varrho^2(A\gamma_2 - B\gamma_1),$$

и наконецъ

$$(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2)\frac{d\varrho}{ds} = \frac{\varrho}{\lambda^2}\left[(A\gamma_2 - B\gamma_1) - b_1\frac{d\gamma_3}{ds}\right] \quad \ldots . (22)$$

Помножая, далѣе, первыя два изъ уравненій (13) на γ_1 и γ_2, имѣемъ

$$\gamma_1\frac{dr_1}{ds} + \gamma_2\frac{dr_2}{ds} = -a_1r_3(-r_2\gamma_1 + r_1\gamma_2) - \frac{1}{\lambda^2}(B\gamma_1 - A\gamma_2),$$

а помноживъ первыя два изъ уравненій $(4)(p)$ на r_1 и r_2 и сложивъ, находимъ

$$r_1\frac{d\gamma_1}{ds} + r_2\frac{d\gamma_2}{ds} = -r_3(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1).$$

Сложивъ это уравненіе съ предыдущимъ, получимъ

$$\frac{d}{ds}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) = -(a_1 + 1)r_3(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1) + \frac{1}{\lambda^2}(A\gamma_2 - B\gamma_1),$$

Помноживъ это равенство на ϱ и вычтя изъ него уравненіе (22), находимъ

$$\varrho\frac{d}{ds}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) - \frac{d\varrho}{ds}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) = \left[-(a_1 + 1)r_3 + \frac{b_1}{\lambda^2}\right]\varrho\frac{d\gamma_3}{ds},$$

откуда, положивъ для сокращенія

$$m = \frac{b_1}{\lambda^2} - (a_1 + 1)r_3,$$

получимъ

$$\varrho^2\frac{d}{ds}\left(\frac{r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2}{\varrho}\right) = m\varrho\frac{d\gamma_3}{ds}.$$

Но такъ какъ (третье изъ уравненій (9))

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\gamma_3}{ds}=-\frac{1}{D}\frac{d}{ds}(A\gamma_1+B\gamma_2+C\gamma_3),$$

то предыдущее уравненіе представится въ видѣ

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{r_1\gamma_1+r_2\gamma_2}{\varrho}+\frac{m}{D}(A\gamma_1+B\gamma_2+C\gamma_3)\right]=0,$$

и слѣдовательно

$$\frac{r_1\gamma_1+r_2\gamma_2}{\varrho}+\frac{m}{D}(A\gamma_1+B\gamma_2+C\gamma_3)=M_3\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

гдѣ M_3 произвольная постоянная.

Замѣняя въ этомъ уравненіи γ_i послѣдовательно черезъ α_i, β_i $(i=1\,,\,2\,,\,3)$, получимъ еще

$$\left.\begin{aligned}&\frac{r_1\alpha_1+r_2\alpha_2}{\varrho}+\frac{m}{D}(A\alpha_1+B\alpha_2+C\alpha_3)=M_1\,,\\&\frac{r_1\beta_1+r_2\beta_2}{\varrho}+\frac{m}{D}(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3)=M_2\,,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

гдѣ M_1 и M_2 новыя произвольныя постоянныя.

Величины r_1, r_2, r_3, A, B и C извѣстны въ функціи дуги s (см. предыдущій §), а потому уравненія (23) и (24) въ связи съ извѣстными соотношеніями между косинусами α_i, β_i, γ_i вида

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0\,, &&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\,,\\&\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0\,, &&\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1\,,\\&\gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2+\gamma_3\beta_3=0\,, &&\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\,,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (25)$$

и опредѣлятъ ихъ въ функціи этой перемѣнной.

§ 5.

Положивъ для сокращенія

$$\frac{r_1}{\varrho}+\frac{m}{D}A=d_1\,,\quad \frac{r_2}{\varrho}+\frac{m}{D}B=d_2\,,\quad \frac{m}{D}C=d_3\,, \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

приведемъ уравненія (23) и (24) къ виду

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2+\alpha_3 d_3&=M_1\,,\\ \beta_1 d_1+\beta_2 d_2+\beta_3 d_3&=M_2\,,\\ \gamma_1 d_1+\gamma_2 d_2+\gamma_3 d_3&=M_3\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(27)$$

Разсматривая d_1, d_2, d_3 какъ проекціи на оси x, y, z нѣкотораго вектора d, заключаемъ, на основаніи уравненій (27), что этотъ векторъ сохраняетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ (и величину).

Такъ какъ положеніе координатной системы ξ, η, ζ вполнѣ произвольно, то нисколько не уменьшая общности вопроса, можемъ положить

$$M_1=0\,,\quad M_2=0\,,\quad M_3=M\,,$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2+\alpha_3 d_3&=0\,,\\ \beta_1 d_1+\beta_2 d_2+\beta_3 d_3&=0\,,\\ \gamma_1 d_1+\gamma_2 d_2+\gamma_3 d_3&=M\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(28)$$

Помножая эти уравненія соотвѣтственно на

$$\alpha_1\,,\ \beta_1\,,\ \gamma_1\,;\quad \alpha_2\,,\ \beta_2\,,\ \gamma_2\,;\quad \alpha_3\,,\ \beta_3\,,\ \gamma_3\,,$$

и складывая каждый разъ, получаемъ

$$\gamma_1=\frac{1}{M}d_1\,,\quad \gamma_2=\frac{1}{M}d_2\,,\quad \gamma_3=\frac{1}{M}d_3\,.\ \ldots\ldots(28_1)$$

Вводя углы ϑ, φ и f *) и замѣчая, что

$$\gamma_1=\cos f\sin\vartheta\,,\quad \gamma_2=\sin f\sin\vartheta\,,\quad \gamma_3=\cos\vartheta\,,\ \ldots\ldots(28_2)$$

опредѣлимъ при помощи уравненій (28_1) f и ϑ въ функціи s, а уголъ φ найдемъ интегрированіемъ уравненія

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\gamma_1 r_1+\gamma_2 r_2}{1-\gamma_3{}^2}\,,$$

которое въ силу выраженій (26) и (28) приметъ видъ

$$\frac{d\varphi}{ds}=M\varrho\,\frac{1+\dfrac{m}{D}b_1\varrho}{1-\dfrac{m^2C^2}{M^2D^2}}\,.$$

---

*) См. Kirchhoff. „Vorlesungen über Mathemat. Physik.“ S. 44.

Зная ϱ и C въ функціи s, опредѣлимъ и φ.

Косинусы α_3 и β_3 опредѣлятся затѣмъ по формуламъ

$$\alpha_3 = \cos\varphi\sin\vartheta\,, \quad \beta_3 = \sin\varphi\sin\vartheta\,,$$

а уравненіе кривой равновѣсія при помощи авадратуръ

$$\xi = \int\alpha_3 ds\,, \quad \eta = \int\beta_3 ds\,, \quad \zeta = \int\gamma_3 ds\,, \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

какъ указано и раньше.

§ 6.

Показавъ въ общихъ чертахъ рѣшеніе вопроса, прежде чѣмъ приступить къ дальнѣйшимъ изслѣдованіямъ, замѣтимъ, что винтовая линія, какъ и въ случаѣ Кирхгофа, есть также одна изъ возможныхъ формъ равновѣсія стержня при разсматриваемыхъ условіяхъ. Допуская, что давленіе, направленное по главной нормали къ кривой линіи центровъ тяжести, обратно пропорціонально радіусу кривизны этой кривой, т. е. равно $\frac{D}{R}$, гдѣ R радіусъ кривизны, приводимъ уравненія (9) къ виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3) + D\frac{d\alpha_3}{ds} = 0\,, \\ &\frac{d}{ds}(A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3) + D\frac{d\beta_3}{ds} = 0\,, \\ &\frac{d}{ds}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3) + D\frac{d\gamma_3}{ds} = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

непосредственная интеграція которыхъ даетъ

$$\left.\begin{aligned} &A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 + D\alpha_3 = L_1\,, \\ &A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3 + D\beta_3 = L_2\,, \\ &A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\beta_3 + D\gamma_3 = L_3\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

гдѣ L_1, L_2, L_3 произвольныя постоянныя.

Не нарушая общности вопроса, можемъ, подобно предыдущему, положить $L_1 = L_2 = 0$, и тогда

$$\left.\begin{aligned} &A\alpha_1 + B\alpha_2 + (C+D)\alpha_3 = 0\,, \\ &A\beta_1 + B\beta_2 + (C+D)\beta_3 = 0\,, \\ &A\gamma_1 + B\gamma_2 + (C+D)\gamma_3 = L_3\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31_1)$$

откуда

$$A = L_3\gamma_1\,,\quad B = L_3\gamma_2\,,\quad C = L_3\gamma_3\,.$$

Приэтомъ уравненія (7_1) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA'}{ds} + B'r_3 - C'r_2 - L_3\gamma_2 = 0\,,\\ &\frac{dB'}{ds} + C'r_1 - A'r_3 + L_3\gamma_1 = 0\,,\\ &\frac{dC'}{ds} + A'r_2 - B'r_1 \qquad\quad = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

Уравненія тѣ же самыя, что и въ случаѣ Кирхгофа и, очевидно, допускаютъ рѣшеніе, дающее для кривой равновѣсія стержня винтовую линію. Но для винтовой линіи $R = \text{const.}$, а потому давленіе въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ постояннымъ и, слѣдовательно, стержень подъ дѣйствіемъ постояннаго давленія, направленнаго по главной нормали къ линіи центровъ тяжести сѣченій, можетъ принимать форму винтовой линіи, какъ и въ случаѣ, когда онъ находится подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ только къ концамъ его.

§ 7.

Что касается координатъ кривой равновѣсія ξ, η, ζ, то для полученія ихъ въ функціи s придется выполнить три квадратуры $\int\alpha_3 ds$, $\int\beta_3 ds$, $\int\gamma_3 ds$, какъ указано въ концѣ § 5.

Можно показать однако, что, вмѣсто непосредственнаго интегрированія выраженій $\int\alpha_3 ds$ и $\int\beta_3 ds$, легко найти ξ и η прямо въ функціи величинъ A, $B \ldots r_i$, α_i, $(i = 1\,,\ 2\,,\ 3)$.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\,,$$

но, въ силу уравненій (28_1), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} M\gamma_1 &= \frac{m}{D}A + \frac{r_1}{\varrho}\,,\\ M\gamma_2 &= \frac{m}{D}B + \frac{r_2}{\varrho}\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26_1)$$

и слѣдовательно

$$M(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = M\alpha_3 = \frac{m}{D}(\beta_1 B - \beta_2 A) + \frac{r_2\beta_1 - r_1\beta_2}{\varrho} \quad \ldots (33)$$

Правая часть этого уравненія, при помощи третьяго изъ уравненій (4)(n) и второго изъ уравненій (10), можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{m}{D}\frac{d}{ds}(A'\beta_1+B'\beta_2+C'\beta_3)-\frac{1}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds}\,.$$

Но такъ какъ (уравненія (9))

$$\frac{D}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds}=-\frac{d}{ds}(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3)\,,$$

то

$$DM\alpha_3=\frac{d}{ds}\Big[m(A'\beta_1+B'\beta_2+C'\beta_3)+(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3)\Big]=DM\frac{d\xi}{ds}\,,$$

откуда, непосредственно интегрируя, получаемъ

$$\xi-\xi_0=\frac{m}{DM}(A'\beta_1+B'\beta_2+C'\beta_3)+\frac{1}{DM}(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3),$$

а такъ какъ начало координатъ (ξ, η, ζ) вполнѣ произвольно, то, не нарушая общности вопроса, можемъ положить $\xi_0=0$ (а также и $\eta_0=0$).

Замѣнивъ далѣе A', B', C' ихъ выраженіями черезъ r_i ($i=1, 2, 3$) по формуламъ (3) и замѣтивъ, что (на основаніи уравненій (28))

$$A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3=-\frac{D}{m}\frac{(r_1\beta_1+r_2\beta_2)}{\varrho}$$

получимъ

$$\xi=-k(r_1\beta_1+r_2\beta_2)-k_1\beta_3\,,$$

и точно такимъ же образомъ найдемъ, что . . . . (34)

$$\eta=k(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2)+k_1\alpha_3\,,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$k=\frac{1}{mM\varrho}+\frac{m\lambda^2}{MD}\,,\quad k_1=\frac{m\mu^2 r_3}{MD}\,.\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (34_1)$$

Зная r_i, β_i, α_i ($i=1, 2, 3$) и ϱ въ функціи s, по формуламъ (34) получимъ выраженія координатъ ξ и η въ функціи той же перемѣнной, а ζ найдемъ квадратурой.

Формулы (34) дадутъ возможность опредѣлить проекцію кривой равновѣсія на плоскость $\xi o\eta$ и по ней, конечно, составить болѣе опредѣленное понятіе о самой кривой.

Можно выразить радіусъ векторъ r и полярный уголъ ω этой проекціи въ функціи ϱ,—первый непосредственно черезъ ϱ, второй въ эллиптическихъ интегралахъ отъ ϱ.

Опредѣливъ затѣмъ такимъ же образомъ ζ, обращеніемъ эллиптическихъ интеграловъ, получимъ уравненіе кривой въ цилиндрическихъ координатахъ

$$r=\psi_1(s)\,,\quad \omega=\psi_2(s)\,,\quad \zeta=\psi_3(s)\,,$$

гдѣ ψ_1, ψ_2, ψ_3 нѣкоторыя функціи s. Постараемся опредѣлить въ общихъ чертахъ характеръ этихъ функцій.

§ 8.

Помножая выраженія (26_1) соотвѣтственно на r_1 и r_2 и складывая, получаемъ при помощи равенства (15_1) (при $b_2=0$)

$$\frac{m}{D}\,b_1\varrho^2=M(r_1\gamma_1+r_2\gamma_2)-\varrho\,.\quad\ldots\ldots\ldots(35)$$

Обозначивъ выраженіе $r_1\gamma_1+r_2\gamma_2$ черезъ ϱ_1, имѣемъ

$$M\varrho_1=\varrho+\frac{mb_1}{D}\,\varrho^2.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(35_1)$$

Возводя затѣмъ выраженія (34) въ квадратъ и складывая, получаемъ

$$r^2=k^2[r_1{}^2(1-\gamma_1{}^2)+r_2{}^2(1-\gamma_2{}^2)-2r_1r_2\gamma_1\gamma_2]+$$
$$+k_1{}^2(1-\gamma_3{}^2)-2kk_1\gamma_3(r_1\gamma_1+r_2\gamma_2)\,,$$

откуда, принимая во вниманіе предыдущее обозначеніе, находимъ

$$r^2-k_1{}^2=[k\varrho-k\varrho_1-k_1\gamma_3]\,[k\varrho+k\varrho_1+k_1\gamma_3].\quad\ldots\ldots(36)$$

На основаніи обозначеній (34_1) и уравненій (28), (26) и (14) имѣемъ равенство

$$(k\varrho-k\varrho_1-k_1\gamma_3)=\frac{1}{mM}+\frac{m\lambda^2}{MD}\varrho-\frac{m\lambda^2}{MD}\varrho_1-\frac{m^2\mu^2\lambda^2r_3}{2M^2D^2}(L_1-\varrho^2)-\frac{1}{mM}\frac{\varrho_1}{\varrho}\,,$$

которое при помощи выраженія (35_1) приведется къ виду

$$(k\varrho-k\varrho_1-k_1\gamma_3)=\frac{1}{mM}-\frac{1}{mM^2}-\frac{m^2\mu^2r_3\lambda^2}{2M^2D^2}L_1+\frac{m\lambda^2}{MD}\varrho-\frac{m\lambda^2}{MD}\varrho_1+\frac{m^2\mu^2r_3\lambda^2}{2M^2D^2}\varrho^2-\frac{b_1}{DM^2}\varrho\,.$$

Въ силу предыдущихъ обозначеній

$$a_1=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\lambda^2}\,,\quad b_1=\frac{(a_1+1)r_3\lambda^2}{2}\,,\quad m=-\frac{(a_1+1)r_3}{2}\,,$$

и слѣдовательно

$$b_1 = \frac{\mu^2 r_3}{2} \text{ и } b_1 = -m\lambda^2,$$

а потому, на основаніи выраженія (35_1), замѣчаемъ, что

$$\frac{m^2\mu^2 r_3 \lambda^2}{2M^2D^2}\varrho^2 - \frac{b_1}{DM^2}\varrho - \frac{m\lambda^2}{MD}\varrho_1 = 0.$$

Положивъ

$$\frac{1}{mM} - \frac{1}{mM^2} + \frac{b_1{}^2 m}{M^2D^2}L_1 = l,$$

получимъ окончательно

$$(k\varrho - k\varrho_1 - k_1\gamma_3) = (l - \frac{b_1}{DM}\varrho).$$

Точно также легко убѣдиться, что

$$(k\varrho + k\varrho_1 + k_1\gamma_3) = (l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho),$$

гдѣ

$$l_1 = \frac{1}{mM} + \frac{1}{mM^2} - \frac{b_1{}^2 m}{M^2D^2}L_1.$$

Такимъ образомъ

$$r^2 = k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho) \text{ *)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (37)$$

Это уравненіе и выражаетъ r въ эллиптическихъ функціяхъ s, ибо ϱ опредѣляется изъ уравненія $\int \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}} = s - s_0$, гдѣ $R(\varrho)$ имѣетъ прежнее обозначеніе (см. § 3).

---

*) Замѣтимъ, что этой формулой можно воспользоваться для опредѣленія r и ω въ функціи дуги. Найдя ϱ въ функціи радіуса кривизны проекціи кривой равновѣсія на плоскость $\xi o \eta$, получимъ $r = \varphi(\varrho')$, гдѣ ϱ' упомянутый радіусъ кривизны или $\varrho' = \varphi_1(r)$. Если p уголъ между r и нормалью къ кривой, а s_1 дуга, то

$$\sin p = \frac{dr}{ds_1}, \quad \cos p = \frac{r d\omega}{ds_1}, \quad \varrho' = \frac{d(r\cos p)}{r dr}$$

и

$$r\cos p = \int \varphi_1(r) r dr = F(r), \quad r\sin p = \sqrt{r^2 - F^2(r)}, \quad d\omega = \frac{F(r)}{r^2}ds_1 \text{ и } ds_1 = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - F^2(r)}}$$

Послѣдними формулами и опредѣляются r и ω въ функціи дуги s_1.

*

§ 9.

Покажемъ теперь, что уголъ ω можетъ быть выраженъ въ эллиптическихъ интегралахъ отъ ϱ, а черезъ нихъ и въ функціи s.

По предыдущему

$$\left.\begin{aligned} r\cos(r,\,\xi) &= -k(r_1\beta_1 + r_2\beta_2) - k_1\beta_3\,,\\ r\cos(r,\,\eta) &= k(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2) + k_1\alpha_3\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (38)$$

Называя черезъ N направленіе нормали къ кривой (проекціи кривой равновѣсія на плоскость $\xi o \eta$) въ какой-либо ея точкѣ ξ, η и черезъ s ея дугу, имѣемъ

$$\cos(N,\,\xi) = -\frac{d\eta}{ds_1}\,,\quad \cos(N,\,\eta) = \frac{d\xi}{ds_1}\,.$$

Такъ какъ далѣе

$$ds_1 = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \sqrt{1-\gamma_3{}^2}\,ds\,,$$

то

$$\cos(N,\,\xi) = -\frac{\beta_3}{\sqrt{1-\gamma_3{}^2}}\,,\quad \cos(N,\,\eta) = \frac{\alpha_3}{\sqrt{1-\gamma_3{}^2}} \quad \ldots (39)$$

Помножая уравненія (38) соотвѣтственно на выраженія (39) и складывая результаты, имѣемъ на основаніи соотношеній (25)

$$r\cos(r,\,N) = \frac{k_1(1-\gamma_3{}^2) - k\gamma_3\varrho_1}{\sqrt{1-\gamma_3{}^2}} \quad \ldots\ldots (40)$$

гдѣ ϱ_1 имѣетъ прежнее значеніе.

Такъ какъ

$$r\cos(r,\,N) = \frac{r^2 d\omega}{ds_1} = \frac{r^2 d\omega}{\sqrt{1-\gamma_3{}^2}\,ds}\,,$$

то, принявъ во вниманіе предыдущее равенство (40), получаемъ

$$d\omega = \frac{k_1 - \gamma_3(k_1\gamma_3 + k\varrho_1)}{r^2}\,ds \quad \ldots\ldots\ldots (40_1)$$

Замѣтивъ же, что по предыдущему (см. § 8)

$$k_1\gamma_3 + k\varrho_1 = \frac{1}{mM^2} - \frac{mb_1{}^2 L_1}{M^2 D^2} = \text{const} = n\,,$$

а также принявъ во вниманіе уравненія (37), (28_1), (26) и (14) и замѣнивъ ds черезъ $\frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}$, приведемъ предыдущее уравненіе (40_1) къ виду

$$d\omega = \frac{f_1 + f_2\varrho^2}{k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)\,(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho)} \cdot \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}},$$

гдѣ

$$f_1 = k_1 + \frac{nb_1}{2MD}\,L_1\,, \quad f_2 = -\frac{nb_1}{2MD}\,.$$

Называя черезъ ϱ_1 и ϱ_2 корни уравненія

$$k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)\,(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho) = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40_2)$$

имѣемъ по теоремѣ разложенія дробей на простыя

$$\frac{f_1 + f_2\varrho^2}{k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)\,(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho)} = \frac{A_1}{\varrho - \varrho_1} + \frac{A_2}{\varrho - \varrho_2}\,,$$

гдѣ A_1 и A_2 постоянныя, и слѣдовательно

$$d\omega = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{A_k d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\,\sqrt{R(\varrho)}}\,,$$

откуда

$$\omega = \sum_{k=1}^{k=2} \int \frac{A_k d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\,\sqrt{R(\varrho)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

Уголъ ω, такимъ образомъ, выражается суммою эллиптическихъ интеграловъ черезъ ϱ. Выразивъ эти интегралы въ функціи s, найдемъ и уголъ ω въ функціи той же перемѣнной.

§ 10.

Остается опредѣлить координату ζ. По предыдущему

$$\zeta = \int \gamma_3 ds = -\frac{b_1}{2MD}\int (L_1 - \varrho^2) ds =$$

$$= -\frac{b_1}{2MD}\,L_1 s + \frac{b_1}{2MD}\int \varrho^2 ds\,,$$

откуда, замѣняя ds черезъ $\frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}$, находимъ

$$\zeta = -\frac{b_1}{2MD} L_1 s + \frac{b_1}{2MD} \int \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Выразивъ $\int \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}$ въ функціи s, по этой формулѣ опредѣлимъ и ζ.

§ 11.

И такъ, полное рѣшеніе вопроса приводится къ опредѣленію интеграловъ (эллиптическихъ)

$$\int \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}, \quad \int \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}, \quad \int \frac{d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R(\varrho)}}$$

въ функціи дуги s, послѣ чего ζ, r и ω опредѣлятся по формуламъ (37), (41) и (42).

Какъ извѣстно, при помощи линейной подстановки вида

$$\varrho = \frac{p + qy}{1 + y}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

гдѣ p и q нѣкоторыя вещественныя постоянныя, а y новая перемѣнная, $\int \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}$ можетъ быть приведенъ къ виду

$$\int \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}} = A \int \frac{dy}{\sqrt{R_1}},$$

гдѣ $R_1 = c(y^2 \pm a)(y^2 \pm b)$ и A, a, b, c нѣкоторыя другія вещественныя постоянныя.

Интегралъ же $\int \frac{dy}{\sqrt{R_1}}$ можетъ быть, какъ извѣстно, приведенъ къ виду $\frac{1}{G} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$ при помощи подстановки $y = fx$ и одной изъ слѣдующихъ семи подстановокъ

$$\left.\begin{array}{ll}
1)\ x = tg\varphi\,, & \\
2)\ x = \cos\varphi\,, & 5)\ x = \frac{1}{c\cos\varphi}\,, \\
3)\ x = \frac{1}{\cos\varphi}\,, & 6)\ x = \sin\varphi\,, \\
4)\ x = \frac{\cos\varphi}{c}\,, & 7)\ x^2 = \sin^2\varphi + \frac{1}{c^2}\cos^2\varphi\,,
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

гдѣ G, f и c нѣкоторыя постоянныя.

При помощи этихъ преобразованій и выраженія (43) и опредѣлимъ ϱ въ эллиптическихъ функціяхъ дуги s, такъ какъ вообще

$$\int\frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=\frac{1}{G}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=s\,,$$

и слѣдовательно

$$\varphi=am(Gs)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(45)$$

Воспользовавшись затѣмъ подстановкою (43), находимъ

$$\int\frac{\varrho^2d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=Aq^2\int\frac{dy}{\sqrt{R_1}}+2A(p-q)\int\frac{dy}{(1+y)\sqrt{R_1}}+A(p-q)^2\int\frac{dy}{(1+y)^2\sqrt{R_1}}\,.$$

Такъ какъ приэтомъ

$$\int\frac{dy}{(1+y)^2\sqrt{R_1}}=B_1\frac{\sqrt{R_1}}{1+y}+B_2\int\frac{ydy}{\sqrt{R_1}}+B_3\int\frac{dy}{\sqrt{R_1}}+B_4\int\frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}+B_5\int\frac{dy}{(y+1)\sqrt{R_1}}$$

и

$$\int\frac{dy}{(y+1)\sqrt{R_1}}=\int\frac{ydy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}+\int\frac{dy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}\,,$$

то

$$\int\frac{\varrho^2d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=C_1\frac{\sqrt{R_1}}{1+y}+C_2\int\frac{ydy}{\sqrt{R_1}}+C_3\int\frac{ydy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}+C_4\int\frac{dy}{\sqrt{R_1}}+C_5\int\frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}+C_6\int\frac{dy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}\,.\;(46)$$

Первый и второй изъ интеграловъ, входящихъ въ правую часть этого равенства, выражаются въ логариѳмической или круговой функціи y'а (а слѣдовательно и ϱ), остальные три легко приводятся къ нормальной формѣ эллиптическихъ интеграловъ перваго, второго и третьяго рода. Во всѣхъ этихъ формулахъ величины A, B_i, C_i суть нѣкоторыя постоянныя, на опредѣленіи которыхъ я останавливаться не буду.

Принимая во вниманіе подстановки (44) и вводя обычное сокращенное обозначеніе $\triangle\varphi$ вмѣсто $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, приводимъ $\int\frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}$ къ одному изъ слѣдующихъ пяти видовъ:

$$\left.\begin{array}{ll}1)\;K_1\int\frac{tg^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}\,, & 4)\;K_4\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}\,,\\ 2)\;K_2\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}\,, & 5)\;K_5\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}+K_6\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}\,.\\ 3)\;K_3\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\triangle\varphi}\,, & \end{array}\right\}\;(47)$$

Второму и четвертому изъ преобразованій (44) соотвѣтствуетъ второй видъ разсматриваемаго интеграла (выраж. 47), а третьему и пятому—третій интегралъ выраженій (47).

Обращаемся къ послѣднему изъ интеграловъ выраженія (46). Каждой изъ подстановокъ (44) будетъ соотвѣтствовать опредѣленный видъ этого интеграла въ перемѣнной φ. Вообще же онъ приведется къ одному изъ слѣдующихъ двухъ

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ M_1\displaystyle\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\triangle\varphi}+M_2\int\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}, \\ \text{или} \\ 2)\ N\displaystyle\int\frac{d\varphi}{(1+n_1\sin^2\varphi)\,\triangle\varphi}\,. \end{array}\right\}\quad\ldots\ldots(48)$$

Первой, третьей и пятой изъ подстановокъ (44) соотвѣтствуетъ первый изъ нихъ, остальнымъ же второй. M_1, M_2, N, n и n_1 нѣкоторыя положительныя или отрицательныя постоянныя.

Назовемъ черезъ $F_i(\varphi)$ интегралъ $\frac{1}{G}\int\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}$ и черезъ $E_i(\varphi)$ одинъ изъ интеграловъ выраженій (47), гдѣ i указываетъ на нумеръ преобразованія въ рядѣ (44), приводящаго къ этому интегралу; и пусть $\Pi_1(\varphi, n)=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\triangle\varphi}$. Введемъ, далѣе, для краткости слѣдующія обозначенія:

$$H^{(i)}=C_1\frac{\sqrt{R_1}}{1+y},\quad C_2\int\frac{ydy}{\sqrt{R_1}}+C_3\int\frac{ydy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}=J^{(i)},$$

гдѣ $J^{(i)}$, слѣдовательно, представляетъ логариѳмическую или круговую функцію y'а. На основаніи выраженій (47), (48) и сдѣланныхъ обозначеній равенство (46) приметъ видъ

$$\int\frac{\varrho^2d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=H^{(i)}+J^{(i)}+L_1^{(i)}F_i(\varphi)+L_2^{(i)}E_i(\varphi)+L_3^{(i)}\Pi_1(\varphi, n),\quad .\ (49)$$

гдѣ $L_k^{(i)}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ постоянныя; значекъ i у L_k соотвѣтствуетъ значку i у интеграловъ $F_i(\varphi)$ и $E_i(\varphi)$.

Полагая

$$u=F_i(\varphi)=Gs,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (45_1)$$

и замѣтивъ, что

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi d\varphi}{\Delta\varphi}&=\frac{\operatorname{tg}\varphi\Delta\varphi-E_1(\varphi)}{k'^2},\\
\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\Delta\varphi}&=\frac{-k'^2F_i(\varphi)+E_1(\varphi)}{k^2},\\
\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\cdot\Delta\varphi}&=\frac{\operatorname{tg}\varphi\Delta\varphi-E_1(\varphi)}{k'^2}+F_i(\varphi),\\
\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta\varphi}&=\frac{F_i(\varphi)-E_1(\varphi)}{k^2},
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .(50)$$

гдѣ k' дополнительный модуль, а $E_1(\varphi)$ эллиптическій интегралъ второго рода въ нормальной формѣ Legendre'a *), получаемъ изъ равенства (49) вообще

$$\int\frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=H_1^{(i)}+J_1^{(i)}+N_1^{(i)}u+N_2^{(i)}E_1(\varphi)+L_3^{(i)}\Pi_1(\varphi,n)\ **)\quad .\ (51)$$

Но

$$E_1(\varphi)=E(u)\ \text{и}\ \Pi_1(\varphi,n)=u+P\cdot\Pi(u,\alpha),$$

гдѣ P и α постоянныя, зависящія отъ постоянной n.

Такъ какъ далѣе

$$E(u)=Z(u)+\frac{E}{K}u,$$

гдѣ $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\varphi d\varphi$ и $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ полные эллиптическіе интегралы второго и перваго рода и

$$Z(u)=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

гдѣ $\Theta(u)$ Якобіевская трансцендентная, опредѣляемая (по Якоби) изъ уравненія

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}=\prod_1^{\infty}\frac{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2},$$

---

*) См. Durège. Theorie der elliptischen Functionen. § 18 etc.

**) H_1 и J_1 части, содержащія алгебраическія, логариѳмическія и круговыя функціи y'а и круговыя функціи φ.

а q Якобіевская величина ($q = e^{-\frac{\pi K'}{k}} < 1$) и K' полный дополнительный эллиптическій интегралъ перваго рода, то

$$E_1(\varphi) = \frac{E}{K} u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Какъ извѣстно

$$\Pi(u, \alpha) = uZ(\alpha) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - \alpha)}{\Theta(u + \alpha)},$$

и слѣдовательно

$$\Pi_1(\varphi, n) = R_1 u + P \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - \alpha)}{\Theta(u + \alpha)}.$$

Пользуясь этими формулами, приводимъ равенство (51) къ виду

$$\int \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}} = H_1^{(i)} + J_1^{(i)} + R_1^{(i)} u + R_2^{(i)} \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + R_3^{(i)} \log \frac{\Theta(u - \alpha_i)}{\Theta(u + \alpha_i)}, \quad (52)$$

гдѣ, по прежнему, значекъ i у постоянныхъ R_1, R_2, R_3 и α соотвѣтствуетъ нумеру преобразованія въ рядѣ (44).

Остается разсмотрѣть интегралъ $\int \frac{d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R(\varrho)}}$.

При помощи подстановки (43) получаемъ

$$\int \frac{d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R}} = Q_1 \int \frac{dy}{\sqrt{R_1}} + Q_2 \int \frac{y dy}{(y^2 - \lambda^2)\sqrt{R_1}} + Q_3 \int \frac{dy}{(y^2 - \lambda^2)\sqrt{R_1}}. \quad (53)$$

Второй изъ интеграловъ правой части выражается логариѳмической или круговой функціей, которую обозначимъ черезъ $S_k^{(i)}$, а первый и третій выразятся суммою интеграловъ $F_i(\varphi)$ и $\Pi_1(\varphi, n_i)$ (значекъ i имѣетъ прежнее значеніе). Принявъ во вниманіе данныя раньше выраженія $F_i(\varphi)$ и $\Pi_1(\varphi, n_i)$ въ функціи $u = Gs$, получаемъ

$$\int \frac{d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R}} = S_k^{(i)} + Q_{1k}^{(i)} u + Q_{2k}^{(i)} \log \frac{\Theta(u - \alpha_{ik})}{\Theta(u - \alpha_{ik})}, \quad \ldots (54)$$

гдѣ $Q_{1k}^{(i)}$, $Q_{2k}^{(i)}$, α_{ik} постоянныя, соотвѣтствующія i'ой изъ подстановокъ (44) и корню ϱ_k уравненія (40_2), $S_k^{(i)}$ логариѳмическая или круговая функція для той же подстановки и того же корня.

§ 12.

Принявъ теперь во вниманіе выраженія (45), (45_1), (52) и (53) предыдущаго параграфа, выразимъ ϱ, r, ω и ζ въ функціи s.

Всѣ подстановки (44) содержатся въ общей формѣ

$$x^2 = \frac{A_i + B_i \sin^2\varphi}{C_i + D_i \sin^2\varphi},$$

гдѣ A_i, B_i, C_i, D_i постоянныя, соотвѣтствующія i'той изъ подстановокъ (44), а слѣдовательно (на основаніи равенствъ (43) и (45))

$$\varrho = \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\dfrac{A_i + B_i \sin^2 \mathrm{am}\, Gs}{C_i + D_i \sin^2 \mathrm{am}\, Gs}}}{1 + f \sqrt{\dfrac{A_i + B_i \sin^2 \mathrm{am}\, Gs}{C_i + D_i \sin^2 \mathrm{am}\, Gs}}}, \qquad \mathrm{I}$$

$$r^2 = k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)\,(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho), \qquad \mathrm{II}$$

$$\omega = S^{(i)} + Q_1^{(i)} s + \sum_{k=1}^{k=2} R_k^{(i)} \log \frac{\Theta(u - \alpha_{ik})}{\Theta(u + \alpha_{ik})}, \qquad \mathrm{III}$$

$$\zeta = P_1^{(i)} s + H^{(i)} + J^{(i)} + P_2^{(i)} \frac{\Theta'(Gs)}{\Theta(Gs)} + P_3^{(i)} \log \frac{\Theta(Gs - \alpha_i)}{\Theta(Gs + \alpha_i)}\,^{*)}. \qquad \mathrm{IV}$$

Эти формулы вмѣстѣ съ интегралами § 3 и рѣшаютъ вполнѣ разсматриваемый вопросъ. Не останавливаясь на подробномъ изслѣдованіи, можемъ составить нѣкоторое понятіе объ общемъ характерѣ кривой равновѣсія.

Формулы I и II показываютъ, что разстояніе точекъ кривой (по перпендикуляру) отъ оси ζ'овъ измѣняется періодически между нѣкоторыми предѣлами r' и r'' при непрерывномъ измѣненіи дуги s, а уголъ ω, кромѣ непрерывнаго возрастанія (или убыванія) съ возрастаніемъ дуги совершаетъ еще рядъ періодическихъ колебаній, зависящихъ отъ перваго и третьяго членовъ правой части выраженія III; подобнымъ же образомъ измѣняется и ζ, разстояніе точекъ кривой отъ плоскости $\xi o \eta$. Кривая равновѣсія есть, слѣдовательно, нѣкоторая волнообразная линія, подобная спирали двоякой кривизны, то суживающаяся, то расширяющаяся, и въ частности, какъ показано раньше (§ 6), можетъ об-

---

*) Смыслъ обозначеній $J^{(i)} \ldots P_l^{(i)}$ ($l = 1, 2, 3$) понятенъ самъ собою изъ предыдущаго.

ращаться въ обыкновенную винтовую линію. Въ этомъ случаѣ $\varrho = \text{const}$, $\omega = Q_1^{(i)}\, s + \text{const}$ и $\zeta = P_1^{(i)}\, s + \text{const}$, причемъ

$$R_k^{(i)} = 0\,, \quad P_2^{(i)} = 0\,, \quad P_3^{(i)} = 0\,.$$

Проекціи кривыхъ равновѣсія на плоскость $\xi o \eta$ аналогичны кривымъ, изученнымъ Halphen'омъ въ вышеупомянутомъ мемуарѣ „Sur une courbe elastique". Сама кривая принадлежитъ къ классу кривыхъ постояннаго радіуса крученія, который мы обозначимъ черезъ T и равнаго $\pm\frac{1}{m}$. Такъ какъ

$$T = \pm\frac{\left(\frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{d^2\zeta}{ds^2} - \frac{d\zeta}{ds}\cdot\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\cdot\frac{d^2\xi}{ds^2} - \frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2}{\left(\frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{d^3\zeta}{ds^3} - \frac{d\zeta}{ds}\cdot\frac{d^3\eta}{ds^3}\right)\frac{d^2\xi}{ds^2} + \left(\frac{d\zeta}{ds}\cdot\frac{d^3\xi}{ds^3} - \frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{d^3\zeta}{ds^3}\right)\frac{d^2\eta}{ds^2} + \left(\frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{d^3\eta}{ds^3} - \frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{d^3\xi}{ds^3}\right)\frac{d^2\zeta}{ds^2}},$$

или

$$T = \pm\frac{N_1{}^2 + N_2{}^2 + N_3{}^2 \text{ *)}}{M_1 + M_2 + M_3}\,,$$

то, замѣнивъ въ этомъ выраженіи производныя по s отъ ξ, η и ζ черезъ α_3, β_3, γ_3 и пользуясь формулами (4) и (2), найдемъ

$$N_1{}^2 = (\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)^2\,, \qquad M_1 = \left[r_3\frac{d\alpha_3}{ds} - \left(\alpha_1\frac{dr_1}{ds} + \alpha_2\frac{dr_2}{ds}\right)\right]\frac{d\alpha_3}{ds}\,,$$

$$N_2{}^2 = (\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2)^2\,, \qquad M_2 = \left[r_3\frac{d\beta_3}{ds} - \left(\beta_1\frac{dr_1}{ds} + \beta_2\frac{dr_2}{ds}\right)\right]\frac{d\beta_3}{ds}\,,$$

$$N_3{}^2 = (\gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2)\,, \qquad M_3 = \left[r_3\frac{d\gamma_3}{ds} - \left(\gamma_1\frac{dr_1}{ds} + \gamma_2\frac{dr_2}{ds}\right)\right]\frac{d\gamma_3}{ds}\,.$$

Отсюда

$$N_1{}^2 + N_2{}^2 + N_3{}^2 = \varrho^2\,, \quad M_1 + M_2 + M_3 = r_3\varrho^2 + r_2\frac{dr_1}{ds} - r_1\frac{dr_2}{ds}\,.$$

По предыдущему (см. § 3)

$$r_2\frac{dr_1}{ds} - r_1\frac{dr_2}{ds} = \left(\alpha_1 r_3 - \frac{b_1}{\lambda^2}\right)\varrho^2\,,$$

и слѣдовательно

$$M_1 + M_2 + M_3 = \left[(\alpha_1 + 1)r_3 - \frac{b_1}{\lambda^2}\right]\varrho^2\,,$$

*) Обозначенія $M_1 \ldots . N_3$ очевидны.

такъ что

$$T = \pm \frac{1}{(\alpha_1 + 1)r_3 - \frac{b_1}{\lambda^2}} = \pm \frac{1}{m}.$$

§ 13.

Въ заключеніе сдѣлаю еще одно замѣчаніе относительно упругой силы, дѣйствующей въ каждой точкѣ кривой. Величина ея F опредѣлится изъ уравненія (16), именно

$$F^2 = A^2 + B^2 + C^2 = 2D\lambda^2\varrho + L_3\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

которая, такимъ образомъ, измѣняется пропорціонально кривизнѣ кривой (ибо $\frac{1}{\varrho} = R$), направленіе же ея въ каждой точкѣ кривой опредѣлится кинематически на основаніи слѣдующихъ соображеній. Проектируемъ на плоскость $\xi o \eta$ кривую равновѣсія вмѣстѣ съ геометрическими длинами, изображающими величину и направленіе силы F и проведемъ изъ точекъ этой проекціи непрерывный рядъ перпендикуляровъ къ направленію проекціи силы F. Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія послѣдовательныхъ перпендикуляровъ даетъ нѣкоторую кривую, которую назовемъ кривою центровъ упругихъ силъ на плоскости $\xi o \eta$.

Составимъ уравненіе этой кривой. Назвавъ черезъ F_1 проекцію силы F на вышеупомянутую плоскость, черезъ N направленіе перпендикуляра къ F и замѣтивъ, что

$$\cos(N, \xi) = -\cos(F_1, \eta)\,,$$
$$\cos(N, \eta) = \cos(F_1, \xi)\,,$$

имѣемъ уравненіе прямой N, проходящей черезъ точку ξ, η,

$$\frac{x - \xi}{-\cos(F_1, \eta)} = \frac{y - \eta}{\cos(F_1, \xi)}\,,$$

гдѣ x, y текущія координаты разсматриваемой прямой.

Но

$$\cos(F_1, \eta) = \frac{F_\eta}{F_1}\,, \qquad \cos(F_1, \xi) = \frac{F_\xi}{F_1}\,,$$

гдѣ F_η и F_ξ проекціи на оси x и y прямой F_1, и слѣдовательно

$$\frac{x - \xi}{-F_\eta} = \frac{y - \eta}{F_\xi}\,.$$

Отсюда

$$X = xF_\xi + yF_\eta - (\xi F_\xi + \eta F_\eta) = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (55)$$

Геометрическое мѣсто пересѣченій непрерывнаго ряда этихъ прямыхъ получится исключеніемъ перемѣнной s изъ уравненій

$$X = 0 \text{ и } \frac{dX}{ds} = 0 .$$

Замѣтивъ, что

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{km}{D}\varrho F_\eta - k_1\beta_3 , \\ \eta &= -\frac{km}{D}\varrho F_\xi + k_1\alpha_3 , \end{aligned}\right\} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (24)$$

имѣемъ, помноживъ эти равенства на F_ξ и F_η и сложивъ,

$$\xi F_\xi + \eta F_\eta = k_1(\alpha_3 F_\eta - \beta_3 F_\xi),$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} &X = xF_\xi + yF_\eta - k_1(\alpha_3 F_\eta - \beta_3 F_\xi) = 0 , \\ &\text{и} \\ &\frac{dX}{ds} = x\frac{dF_\xi}{ds} + y\frac{dF_\eta}{ds} - k_1\left(\frac{d\alpha_3}{ds}F_\eta - \frac{d\beta_3}{ds}F_\xi + \alpha_3\frac{dF_\eta}{ds} - \beta_3\frac{dF_\xi}{ds}\right) = 0 . \end{aligned}\right\} (56)$$

Но по предыдущему

$$\frac{d\alpha_3}{ds} = -\frac{\varrho}{D}\frac{dF_\xi}{ds} ,$$

$$\frac{d\beta_3}{ds} = -\frac{\varrho}{D}\frac{dF_\eta}{ds} ,$$

вслѣдствіе чего

$$\frac{d\alpha_3}{ds}F_\eta - \frac{d\beta_3}{ds}F_\xi + \alpha_3\frac{dF_\eta}{ds} - \beta_3\frac{dF_\xi}{ds} = u_1\frac{dF_\eta}{ds} - u_2\frac{dF_\xi}{ds} ,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$u_1 = \frac{F_\xi}{D}\varrho + \alpha_3 , \quad u_2 = \frac{F_\eta}{D}\varrho + \beta_3 .$$

Уравненія (56) теперь могутъ быть представлены въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} xF_\xi + yF_\eta &= k_1(\alpha_3 F_\eta - \beta_3 F_\xi) , \\ x\frac{dF_\xi}{ds} + y\frac{dF_\eta}{ds} &= k_1\left(u_1\frac{dF_\eta}{ds} - u_2\frac{dF_\xi}{ds}\right) . \end{aligned}\right\} \,.\,.\,.\,. (56_1)$$

Рѣшая ихъ относительно x и y, находимъ

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{k_1\varrho}{D}F_\eta - k_1\beta_3, \\ y &= \frac{k_1\varrho}{D}F_\xi + k_1\alpha_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (57)$$

Уравненія (57) и представляютъ уравненіе кривой центровъ проекціи упругой силы на плоскость $\xi o \eta$. Подобно предыдущему не трудно было бы выразить x и y въ функціи дуги s и составить (исключая s) уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ, но я не буду останавливаться на этомъ.

Возьмемъ непрерывный рядъ точекъ, координаты которыхъ ξ_1, η_1 связаны съ точками кривой (34) такъ, что

$$\xi_1 = 2\xi, \quad \eta_1 = 2\eta,$$

т. е. построимъ кривую, радіусы векторы которой вдвое болѣе радіусовъ векторовъ кривой (34). Получимъ кривую подобную этой кривой, причемъ

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2mk\varrho}{D}F_\eta - 2k_1\beta_3, \\ \eta_1 &= -\frac{2mk\varrho}{D}F_\xi + 2k_1\alpha_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (58)$$

Вычитая эти уравненія изъ соотвѣтствующихъ уравненій (57), имѣемъ

$$x - \xi_1 = -\frac{(k_1 + 2km)}{D}\varrho F_\eta + k_1\beta_3.$$

$$y - \eta_1 = \frac{(k_1 + 2km)}{D}\varrho F_\xi - k_1\alpha_3.$$

Но, принимая во вниманіе предыдущія обозначенія (см. § 7),

$$k_1 + 2km = \frac{2mb_1}{MD} + \frac{2}{M\varrho} - \frac{2mb_1}{MD} = \frac{2}{M\varrho},$$

а потому

$$x - \xi_1 = -\frac{2}{MD}F_\eta + k_1\beta_3,$$

$$y - \eta_1 = \frac{2}{MD}F_\xi - k_1\alpha_3.$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ непосредственно

$$\left.\begin{aligned} qF_\xi &= \frac{d\xi_1}{ds} + p(y - \eta_1), \\ qF_\eta &= \frac{d\eta_1}{ds} - p(x - \xi_1), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

гдѣ $p = \dfrac{1}{k_1}$ и $q = \dfrac{2}{MDk_1}$.

Перпендикуляръ къ прямой F_1 (проекціи силы F на плоскость $\xi o \eta$) въ нѣкоторой точкѣ M кривой (34) пересѣчетъ кривую (57) въ нѣкоторой точкѣ M_1. Условимся называть точки M и M_1 соотвѣтственными. Разсматривая перемѣнную s (дугу) какъ время, и сравнивая выраженія (59) съ выраженіями проекцій на координатныя оси скорости движенія неизмѣняемой плоской фигуры въ ея плоскости, приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Если заставимъ двигаться плоскую фигуру въ плоскости $\xi o \eta$ съ постоянною угловою скоростью p (равномѣрно вокругъ оси паралельной оси ζ'овъ), такъ чтобы точка пересѣченія мгновенной оси двигалась по кривой (58) со скоростью, проекціи которой на координатныя оси суть $\dfrac{d\xi_1}{ds} = 2\alpha_3$, $\dfrac{d\eta_1}{ds} = 2\beta_3$ то скорость точки кривой (57), соотвѣтственной (ξ_1, η_1) по величинѣ и направленію пропорціональна проекціи упругой силы на плоскость $\xi o \eta$ (величинѣ F_1). Такимъ образомъ въ каждый моментъ времени опредѣлится (кинематически) F_1, т. е. величина и направленіе F_1 въ данной точкѣ кривой равновѣсія, соотвѣтствующей дугѣ s. Отложивъ на прямой параллельной оси ζ'овъ въ этой точкѣ отрѣзокъ

$$C_1 = A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3,$$

легко выражаемый въ функціи дуги s, найдемъ и F, равную геометрической суммѣ величинъ F_1 и C_1.

Во всѣхъ предыдущихъ сужденіяхъ мы полагали $b_2 = 0$.

Вопросъ значительно усложняется, если b_2 не равно нулю. Не останавливаясь на этомъ сложномъ случаѣ, замѣчу только между прочимъ, что при этомъ ϱ уже выразится не въ эллиптическихъ функціяхъ, какъ при допущеніи $b_2 = 0$, а въ ультра-эллиптическихъ, что легко видѣть изъ выраженій (15_1) и (19).

§ 14.

Само собою понятно, что случай плоской формы равновѣсія, указанный Maurice Lévy, можетъ быть безъ труда непосредственно полученъ изъ общихъ уравненій (9) и (12). Принявъ плоскость, въ которой находится стержень, за плоскость $\xi o \zeta$, имѣемъ

$$\alpha_2=0,\ \gamma_2=0,\ \beta_1=0,\ \beta_3=0,\ \beta_2=1,\ r_3=0,\ r_1=0,\ \alpha_1=\gamma_3,\ \alpha_3=-\gamma_1,$$

а уравненія (9), если положимъ

$$F_\xi = A\alpha_1 + C\alpha_3\,, \quad F_\zeta = A\gamma_1 + C\gamma_3\,,$$

примутъ видъ

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dF_\xi}{ds} + \dfrac{D}{\varrho}\dfrac{d\alpha_3}{ds} = 0\,, \quad \dfrac{dE_\zeta}{ds} + \dfrac{D}{\varrho}\dfrac{d\gamma_3}{ds} = 0\,, \\ \dfrac{dr_2}{ds} = \dfrac{A}{\lambda^2}\,. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (60)$$

Но $\varrho = r_2$; $\dfrac{d\alpha_3}{ds} = -r_2\alpha_1 = -r_2\gamma_3$; $\dfrac{d\gamma_3}{ds} = -r_2\gamma_1 = r_2\alpha_3$,

а потому

$$\frac{dF_\xi}{ds} - D\frac{d\zeta}{ds} = 0\,, \quad \frac{dF_\zeta}{ds} + D\frac{d\xi}{ds} = 0\,,$$

откуда

$$F_\xi = D\zeta\,, \quad F_\zeta = -D\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Эти равенства и выражаютъ теорему Lévy о центрѣ упругихъ силъ. Отсюда

$$F = Dr\,,$$

гдѣ F сила, r радіусъ векторъ полярныхъ координатъ съ началомъ въ центрѣ упругихъ силъ. Изъ уравненій же (60) слѣдуетъ

$$F^2 = 2D\lambda^2\varrho + L_3\,,$$

гдѣ L_3 произвольная постоянная. Слѣдовательно

$$\frac{1}{R} = Ar^2 + B\,,$$

гдѣ R радіусъ кривизны, A и B постоянныя. Отсюда на основаніи соображеній, указанныхъ въ примѣчаніи къ § 7, опредѣляемъ радіусъ векторъ r и полярный уголъ ω. (См. также упомянутый мемуаръ Halphen'а).

§ 15.

Изъ уравненій (32) § 6 слѣдуетъ далѣе, что вопросъ о равновѣсіи можетъ быть вполнѣ рѣшенъ для стержня съ круговымъ сѣченіемъ и въ случаѣ, когда давленіе, направленное по главной нормали къ кривой, обратно пропорціонально радіусу ея кривизны. Формы равновѣсія будутъ вполнѣ схожи съ формами равновѣсія стержня подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ только къ концамъ его. Точно также вопросъ о равновѣсіи можетъ быть рѣшенъ въ предположеніи D равнымъ цѣлой функціи второй степени отъ кривизны и при нѣкоторыхъ болѣе сложныхъ допущеніяхъ, но, въ виду искуственности допущеній относительно силы давленія, я не буду останавливаться на рѣшеніи этихъ вопросовъ.

Гомоциклическое изображенiе сферы на плоскость.

К. А. Андреева.

1. Гомоциклическимъ изображенiемъ мы будемъ называть такое, при которомъ всякiй кругъ изображаемой фигуры имѣетъ своимъ изображенiемъ также кругъ.

Въ послѣднее время вниманiе нѣкоторыхъ изъ нашихъ ученыхъ было обращено на доказательства предложенiя, что *всякое гомоциклическое изображенiе сферы на плоскость есть стереографическая проекцiя*. Такъ въ I-мъ томѣ настоящаго изданiя (въ 1889 г.) помѣщена статья акад. А. А. Маркова: „Къ вопросу о черченiи картъ", содержащая примѣненiе къ доказательству этого предложенiя высшихъ теорiй математическаго анализа. Въ началѣ этой статьи авторъ утверждаетъ, что къ заключенiю о справедливости предложенiя онъ пришелъ еще въ 1876 году, присовокупляя, однако, что въ печати имъ было заявлено объ этомъ въ 1884 году.

На послѣднемъ съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей бывшемъ въ С.-Петербургѣ въ концѣ 1889 г. профессоръ А. Н. Коркинъ предложилъ свое доказательство того же предложенiя, основанное на началахъ анализа безконечно-малыхъ *), причемъ самое предложенiе, выраженное въ вопросительной формѣ, названо имъ задачею Золотарева **). Вскорѣ послѣ того (въ февралѣ 1890 г.) профессоръ Б. К. Млодзѣевскiй далъ геометрическое доказательство того же предложенiя, опи-

*) См. „VIII съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ". С.П.Б. 1890, отд. I, стр. 6—8.

**) Профессоръ С.-Петербургскаго университета, адъюнктъ Императорской академiи наукъ, Егоръ Ивановичъ Золотаревъ скончался въ молодыхъ годахъ въ С.-Петербургѣ въ 1878 году, обогативши науку весьма цѣнными вкладами, напечатанными частiю въ Россiи, частiю же въ иностранныхъ изданiяхъ.

рающееся на замѣчаніе, что всякое гомоциклическое изображеніе сферы на плоскость и ея стереографическая проекція суть двѣ системы точекъ, связанныя биквадратичнымъ соотвѣтствіемъ. Доказательство это представляетъ крайній предѣлъ сжатости и краткости *).

2. Насколько вопросъ о доказательствѣ названнаго предложенія, поставленный самостоятельно, т. е. не въ связи съ болѣе общими геометрическими задачами, къ которымъ онъ относится по существу, новъ вообще, и кѣмъ и по какому поводу онъ возбужденъ между нашими учеными, намъ въ точности не извѣстно. Что же касается сочиненій, посвященныхъ геометрическимъ теоріямъ, не только соприкасающимся съ этимъ вопросомъ, но и включающимъ его въ себѣ какъ частность, то указаній на таковыя можно сдѣлать достаточно, чтобы не считать этотъ вопросъ такимъ, котораго до 1876 года не каснулись размышленія геометровъ.

Какъ примѣръ можно взять сочиненіе Möbius'a „Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung", изданное въ 1855 году **). Въ этомъ сочиненіи подробно изслѣдуются такія однозначныя соотвѣтствія между точками фигуръ, что всякому кругу соотвѣтствуетъ также кругъ, т. е. соотвѣтствія гомоциклическія. Въ концѣ первой главы, посвященной гомоциклическому соотвѣтствію *плоскихъ* фигуръ, доказывается, что всякія двѣ плоскія фигуры, связанныя такимъ соотвѣтствіемъ, могутъ быть разсматриваемы, какъ двѣ стереографическія проекціи одной и той же сферической фигуры. Это предложеніе и ближайшія его слѣдствія даютъ автору достаточно основанія, чтобы съ самаго начала слѣдующей главы, посвященной гомоциклическому соотвѣтствію *сферическихъ* фигуръ, смотрѣть на какія либо двѣ связанныя такимъ соотвѣтствіемъ фигуры, изъ которыхъ одна сферическая а другая плоская (или обѣ сферическія), какъ на такія, соотвѣтствіе между которыми устанавливается построеніемъ стереографической проекціи.

Такимъ образомъ, если признать, что въ самомъ понятіи о изображеніи включается требованіе, чтобы между точками изображаемой фигуры и ея изображенія существовала однозначность и непрерывность соотвѣтствія, а это повидимому признается всѣми авторами, трактующими о изображеніяхъ, то нельзя сомнѣваться, что справедливость предложенія, отвѣчающаго на задачу Золотарева, была хорошо извѣстна Möbius'y.

3. Мы указали на „Theorie der Kreisverwandtschat" Möbius'a только потому, что это наиболѣе старое изъ извѣстныхъ намъ сочиненій, са-

---

*) „Труды отдѣленія физическихъ наукъ Общества любителей естествознанія". Т. III, вып. 1-й, Москва, 1890, стр. 83—84.

**) См. Möbius (A. F.) „Gesammelte Werke", II-ter Baud, Leipzig, 1886 p. 243—314.

мое заглавіе котораго показываетъ, что въ немъ можно искать указаній на гомоциклическое изображеніе сферы на плоскость и на тождественность этого изображенія съ стереографическою проекціей. Но въ позднѣйшее время съ установленіемъ и развитіемъ въ Геометріи теоріи раціональныхъ или Кремоновыхъ преобразованій (какъ на плоскости, такъ и въ пространствѣ) явилась для геометровъ точка зрѣнія, откуда гомоциклическое соотвѣтствіе Möbius'a, стереографическая проекція Гипарха, преобразованіе обратныхъ радіусовъ и многія другія геометрическія зависимости представляются въ обобщенномъ видѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ справедливость предложенія, отвѣчающаго на задачу Золотарева, выступаетъ съ полною ясностью.

Этимъ объясняется между прочимъ краткость послѣдняго изъ перечисленныхъ выше доказательствъ. Достаточно было его автору сослаться на квадратичное соотвѣтствіе, чтобы изложить все доказательство въ нѣсколькихъ строчкахъ.

Въ виду всего вышесказаннаго главный интересъ въ задачѣ Золотарева приходится перенести отъ самаго предложенія къ особенностямъ его доказательствъ. Мы постараемся дать въ слѣдующемъ доказательство, наиболѣе соотвѣтствующее, по нашему мнѣнію, самымъ даннымъ вопроса, а именно доказательство, основывающееся на началахъ Геометріи.

4. Замѣтимъ предварительно, что стереографическая проекція, первое описаніе которой находится у Птоломея (хотя, по мнѣнію Деламбра, изобрѣтеніе ея должно быть приписано Гипарху), *) обладаетъ слѣдующими двумя основными свойствами. Во-первыхъ она есть изображеніе *гомоциклическое* и во-вторыхъ она есть изображеніе *изогональное*, т. е. такое, что углы между касательными въ точкахъ пересѣченія изображаемыхъ линій и ихъ изображеній равны между собою.

Можно полагать, основываясь на свидѣтельствѣ Прокла, что первое изъ этихъ свойствъ было извѣстно еще Птоломею, хотя первое вполнѣ общее его доказательство встрѣчается лишь у Іордана Немораріуса, писателя XIII-го столѣтія. Что же касается второго свойства, то, по утвержденію Деламбра, оно было доказано въ первый разъ въ сочиненіи Робертсона по навигаціи въ 1754 году. Названіе свое (кстати сказать весьма неудачное) стереографическая проекція получила отъ іезуита Агвилона въ 1613 году **).

Названныя свойства стереографической проекціи имѣютъ существенное различіе между собою по своему значенію. Въ то время какъ гомоцикличность вполнѣ характеризуетъ это изображеніе, какъ это видно

---

*) См. *Chasles (M)* „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie", 2 éd., Paris, 1875, p. 27—28.

**) См. *Chasles (M)* „Ap. hist. etc.", Note XII, p. 516—517.

изъ занимающаго насъ предложенія, изогональность представляетъ зависимость между изображаемой фигурой и ея изображеніемъ только вблизи отдѣльныхъ соотвѣтственныхъ точекъ. Иначе говоря, оно есть свойство безконечно малыхъ элементовъ этихъ фигуръ.

Изображенія, въ которыхъ сохраняется подобіе безконечно малыхъ частей, принято, по примѣру Гаусса, называть *конформенными* (conforme Abbildungen). Понятно, что всякое конформенное изображеніе есть изогональное и обратно.

Теорія построенія географическихъ картъ представляетъ намъ много различныхъ примѣровъ изогональнаго изображенія сферы или эллипсоида на плоскость.

5. Необходимо обратить вниманіе еще на то обстоятельство, что гомоцикличность изображенія сферы на плоскость представляется полнымъ опредѣленіемъ стереографической проекціи не только тогда, когда оно есть свойство всей поверхности сферы, но и тогда, когда принадлежитъ только какой-нибудь конечной части этой поверхности. Другими словами, для того чтобы убѣдиться, что разсматриваемое изображеніе есть стереографическая проекція, достаточно допустить только, что всѣ дуги круговъ, какія можно начертить на сферѣ внутри контура, ограничивающаго конечную ея часть, изображаются также дугами круговъ. Обстоятельство это имѣетъ большую важность въ вопросѣ о построеніи картъ, гдѣ всегда рѣчь идетъ объ изображеніи только части сферы. Въ такомъ ограниченіи мы и будемъ принимать гомоцикличность за условіе задачи Золотарева нъ предлагаемомъ ея рѣшеніи.

6. Прежде всего постараемся доказать, что изогональность есть необходимое слѣдствіе гомоцикличности всякаго изображенія сферы на плоскости, и будемъ основывать это доказательство на слѣдующихъ весьма простыхъ леммахъ, относящихся къ системамъ круговъ какъ на плоскости, такъ и въ пространствѣ.

1-я лемма. Два пересѣкающіеся въ двухъ точкахъ круга образуютъ равные углы при обѣихъ точкахъ пересѣченія.

2-я лемма. Если три круга проходятъ черезъ одну точку, то въ треугольникѣ, сторонами котораго служатъ дуги этихъ круговъ, а вершинами три остальныя точки ихъ пересѣченія, сумма внутреннихъ угловъ равна двумъ прямымъ *). Это очевидное слѣдствіе предыдущей леммы.

3-я лемма. Четыре круга, проходящіе черезъ каждыя три изъ четырехъ точекъ, произвольно взятыхъ въ пространствѣ или на плоскости,

---

*) Треугольникъ, стороны котораго суть дуги круговъ, представляетъ замкнутый контуръ, которымъ вся поверхность сферы или плоскости раздѣляется на двѣ части. Изъ нихъ внутреннею мы называемъ ту часть, на которой нѣтъ другихъ точекъ пересѣченія круговъ.

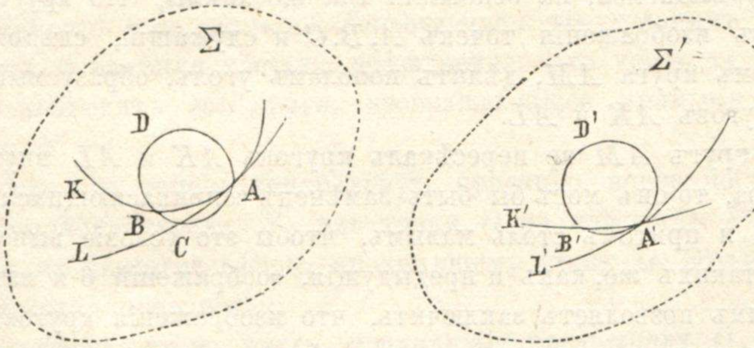
всегда таковы, что углы, образуемые двумя изъ нихъ, равны угламъ, образуемымъ двумя остальными. Также слѣдствіе предыдущихъ леммъ.

4-я лемма. Если сумма внутреннихъ угловъ треугольника, образуемаго на сферѣ или плоскости дугами трехъ круговъ, равна двумъ прямымъ, то круги эти имѣютъ общую точку. Справедливость этого предложенія, обратнаго 2-й леммѣ, легко доказывается на основаніи предыдущихъ леммъ способомъ допущенія противнаго.

5-я лемма. Если два пересѣкающіеся круга соприкасаются съ третьимъ, то кругъ, проходящій чрезъ точку ихъ пересѣченія и обѣ точки соприкосновенія, составляетъ съ этими кругами равные углы (дѣлитъ уголъ между ними пополамъ). Слѣдствіе первой леммы.

6-я лемма. Если три круга соприкасаются между собою по два, то кругъ, проходящій чрезъ три точки ихъ соприкосновенія, пересѣкается съ каждымъ изъ нихъ подъ прямымъ угломъ. Прямое слѣдствіе предыдущей.

7. Положимъ теперь, что часть сферы или плоскости, заключающаяся внутри нѣкотораго контура Σ (фиг. 1-я), изображается гомоциклически на части другой сферы или плоскости, ограниченной контуромъ Σ'. Не трудно убѣдиться, что въ такомъ случаѣ дуги круговъ,



Фиг. 1-я.

соприкасающіяся между собою, изображаются также соприкасающимися дугами круговъ.

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что круги AK и AL, соприкасающіеся въ точкѣ A, изображаются кругами $A'K'$ и $A'L'$, пересѣкающимися въ точкѣ A', мы можемъ взять кругъ $A'D'$, соприкасающійся съ кругомъ $A'L'$ въ точкѣ A', и притомъ столь малаго радіуса, чтобы кругъ AD, которому онъ служитъ изображеніемъ, имѣлъ точки общія съ кругами AK и AL внутри контура Σ.

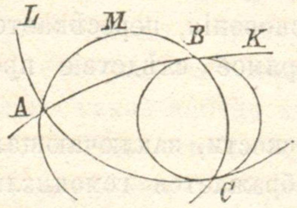
Кругъ AD будетъ, очевидно, или пересѣкать круги AK и AL въ точкахъ B и C отличныхъ отъ A, или соприкасаться съ ними въ той же точкѣ A. Въ первомъ изъ этихъ случаевъ двѣ точки A и C будутъ имѣть одно и то-же изображеніе A'; во второмъ одна и та-же точка A

будетъ имѣть два различныя изображенія A' и B'. Ни то, ни другое не согласно съ самымъ понятіемъ объ изображеніи *).

Къ подобному же недопустимому слѣдствію приводитъ предположеніе, что пересѣкающіеся круги изображаются соприкасающимися.

Итакъ, при всякомъ гомоциклическомъ изображеніи сферы или плоскости на сферу или плоскость соприкасающіеся круги изображаются соприкасающимися и пересѣкающіеся пересѣкающимися.

8. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что если при гомоциклическомъ изображеніи одинъ изъ трехъ изображаемыхъ круговъ, проходящихъ чрезъ одну точку, составляетъ равные углы съ двумя другими, то то-же самое должно имѣть мѣсто и для изображеній этихъ трехъ круговъ. Дѣйствительно, полагая, что кругъ AM (фуг. 2-я) дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый кругами AK и AL и пересѣкаетъ эти круги еще въ точкахъ B и C, мы можемъ построить кругъ, проходящій чрезъ точки B и C и соприкасающійся съ кругомъ AK въ точкѣ B. Въ силу 5-й изъ предыдущихъ леммъ этотъ кругъ долженъ быть соприкасающимся съ кругомъ AL въ точкѣ C. Имѣя же въ виду, что изображенія соприкасающихся круговъ суть также круги соприкасающіеся, мы убѣждаемся, на основаніи той же леммы, что кругъ, проходящій чрезъ изображенія точекъ A, B, C и служащій, слѣдовательно, изображеніемъ круга AM, дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый изображеніями круговъ AK и AL.



Фиг. 2-я.

Если бы кругъ AM не пересѣкалъ круговъ AK и AL внутри даннаго контура, то онъ могъ бы быть замѣненъ соприкасающимся съ нимъ въ точкѣ A и притомъ столь малымъ, чтобы это условіе выполнялось.

Въ силу такихъ же, какъ и предыдущія, соображеній 6-я изъ предыдущихъ леммъ позволяетъ заключить, что изображенія круговъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, пересѣкаются также подъ прямымъ угломъ.

9. Сказанное приводитъ къ заключенію, что всякіе два круга, уголъ между которыми равняется $\frac{m}{2^n} D$, гдѣ D означаетъ прямой уголъ, а m и n какія угодно цѣлыя числа, изображаются кругами, образующими такой же точно уголъ.

---

*) Понятію о изображеніи не противорѣчитъ возможность неопредѣленнаго положенія изображенія данной точки или точки, имѣющей данное изображеніе. Но это допустимо только для особыхъ точекъ, которыя нельзя разсматривать, какъ произвольно взятыя. Притомъ въ вопросахъ практическаго свойства, какъ построеніе картъ, такія точки не должны имѣть мѣста внутри изображаемой части поверхности.

Въ виду произвольности чиселъ m и n этимъ, очевидно, доказывается изогональность всякаго гомоциклическаго изображенія, ибо допущеніе несправедливости этого свойства для какихъ-нибудь двухъ круговъ и ихъ изображеній легко опровергается тѣмъ же самымъ пріемомъ Лежандра, который употребляется въ начальной Геометріи для распространенія доказанной пропорціональности соизмѣримыхъ геометрическихъ величинъ на величины несоизмѣримыя.

Изъ предыдущаго убѣждаемся между прочимъ, что если гомоциклическое изображеніе плоскости на плоскость таково, что всякая прямая изображается прямою же, то всякая изображаемая фигура подобна съ своимъ изображеніемъ.

10. Положимъ теперь, что часть нѣкоторой сферы S, заключающаяся внутри контура Σ, изображается гомоциклически на плоскости P въ видѣ площади, ограниченной контуромъ Σ'. Возьмемъ внутри послѣдняго три точки A', B', C'. Прямыя, соединяющія ихъ, какъ частные виды круговъ, проходящихъ чрезъ тѣ же точки, должны быть изображеніями нѣкоторыхъ трехъ круговъ, проходящихъ чрезъ соотвѣтственныя точки A, B, C. Вслѣдствіе изогональности изображенія внутренніе углы треугольника, образуемаго этими кругами должны имѣть сумму, равную двумъ прямымъ, а это показываетъ, въ силу 4-й изъ предыдущихъ леммъ, что круги эти проходятъ чрезъ одну точку O.

Оставляя двѣ изъ прямыхъ, образующихъ треугольникъ $A'B'C'$ неизмѣнными и измѣняя третью, убѣждаемся, что чрезъ ту же точку O сферы S проходятъ всѣ круги, изображающіеся прямыми линіями на плоскости P.

11. Построимъ теперь центральную проекцію поверхности сферы S, ограниченной контуромъ Σ, изъ точки O на плоскость P', перпендикулярную къ діаметру сферы, проходящему чрезъ O. Это и будетъ стереографическая проекція.

Такъ какъ при этомъ круги, проходящіе чрезъ точку O, изобразятся на плоскости P' прямыми линіями, а всѣ остальные кругами же, то данное гомоциклическое изображеніе на плоскости P и построенная стереографическая проекція суть такія два изображенія одной и той же фигуры, въ которыхъ прямыя соотвѣтствуютъ прямымъ и круги кругамъ. Слѣдовательно, это суть фигуры подобныя, все различіе которыхъ заключается въ масштабѣ.

Такимъ образомъ тождественность всякаго гомоциклическаго изображенія сферы на плоскость и стереографической проекціи являетсл вполнѣ доказанной.

О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Такъ называемая задача С. Венана, какъ извѣстно, состоитъ въ слѣдующемъ: опредѣлить состояніе равновѣсія цилиндрическаго (изотропнаго) тѣла, предполагая, что на боковую поверхность его и внутреннія массы не дѣйствуетъ никакихъ силъ, а къ одному изъ крайнихъ сѣченій приложены (сплошнымъ образомъ) силы, проекціи вектора и момента которыхъ на координатныя оси суть A, B, C, и A', B', C' (заданныя величины). Строгое рѣшеніе этой задачи предложено впервые С. Венаномъ (отъ имени котораго она и получила свое названіе) въ двухъ мемуарахъ: „De la torsion des prismes“ и „Memoire sur la flexion des prismes etc“ *). Оба сочиненія носятъ чисто геометрическій характеръ. Аналитическое изложеніе задачи находимъ у Clebsch'а и отчасти Kirchhoff'а **), полагающихъ въ основаніе гипотезу о распредѣленіи давленій внутри призмы, предложенную С. Венаномъ. Относя тѣло къ прямоугольной системѣ координатъ, начало которыхъ находится въ какой-либо точкѣ основанія цилиндра, а ось z-овъ параллельна его оси, назовемъ, по обыкновенію, черезъ u, v и w проекціи на эти оси перемѣщенія какой-либо точки тѣла, координаты которой въ естественномъ состояніи суть x, y и z, и черезъ X_x, Y_y, Z_z, $X_y = Y_x$, $Z_x = X_z$, $Y_z = Z_y$ проекціи на оси координатъ напряженій, дѣйствующихъ въ какой-либо точкѣ разсматриваемаго тѣла. Полагая затѣмъ

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

---

*) См. Mémoires des savants étrangers, 1855, и Journal de Mathématiques pures et appliquées, Série II, Tome I, 1856.

**) См. Clebsch, „Theorie des Elasticität fester Körper“, Leipsig, 1862, S. 70 etc.—Kirchhoff, „Vorles. ü. Math. Physik“, Leipzig, 1883, S. 369 etc.

и вводя обозначеніе

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

приводимъ рѣшеніе задачи къ интегрированію слѣдующей системы дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ

$$\left.\begin{aligned} (2k+1)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \Delta_2 u = 0\,, \\ (2k+1)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \Delta_2 v = 0\,, \\ (2k+1)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \Delta_2 w = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ k постоянная, зависящая отъ физическихъ свойствъ матеріи, при поверхностныхъ условіяхъ

$$\left.\begin{aligned} X_x\cos\alpha + X_y\sin\alpha = 0\,, \\ Y_x\cos\alpha + Y_y\sin\alpha = 0\,, \\ Z_x\cos\alpha + Z_y\sin\alpha = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ α уголъ, составляемый нормалью къ боковой поверхности цилиндра съ осью x'овъ, а $X_x \ldots Z_z$ выражаются черезъ частныя производныя по координатамъ отъ u, v, w слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} X_x = 2K\left(k\Theta + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad Z_y = Y_z = K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ Y_y = 2K\left(k\Theta + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad X_z = Z_x = K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ Z_z = 2K\left(k\Theta + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad X_y = Y_x = K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^{*)} \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

*) Здѣсь K вторая постоянная, входящая въ выраженіе f, потенціала упругихъ силъ для изотропнаго тѣла. Для такого тѣла, какъ извѣстно,

$$f = K[x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + k(x_x + y_y + z_z)^2],$$

гдѣ

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_z = z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

См. Kirchhoff. „Vorles. ü. Math. Physik“. S. 390 etc.

При настоящихъ средствахъ анализа нельзя рѣшить этихъ уравненій, не дѣлая никакихъ гипотезъ относительно величинъ X_x, $Y_y \dots Z_z$, т. е. относительно распредѣленій напряженій внутри призмы. С. Венанъ разбиваетъ призму на безконечно тонкіе стержни съ прямоугольнымъ основаніемъ и допускаетъ, что боковыя поверхности этихъ элементарныхъ призмъ не оказываютъ давленій другъ на друга, или, выражая это аналитически, полагаетъ $X_x = 0$, $Y_y = 0$ и $X_y = Y_x = 0$. Въ этомъ предположеніи Clebsch (и Kirchhoff) рѣшаетъ уравненія (3) при условіи

$$Z_x \cos\alpha + Z_y \sin\alpha = 0, \quad \dots\dots\dots\dots (4_1)$$

къ которому приводятся равенства (4); и, присоединивъ къ нимъ необходимыя условія опредѣленности задачи, состоящія въ томъ, что при

$$x = y = z = 0$$

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

получаетъ для u, v и w выраженія

$$\left.\begin{aligned} u &= U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + U_3 z^3, \\ v &= V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + V_3 z^3, \\ w &= W_0 + W_1 z + W_2 z^2. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

U_i, V_i $(i = 1, 2, 3)$ и W_i $(i = 1, 2)$ суть вполнѣ опредѣленныя функціи координатъ и шести произвольныхъ постоянныхъ, которыя опредѣляются при помощи уравненій, выражающихъ, что на крайнемъ сѣченіи векторъ и моментъ напряженій равенъ вектору и моменту дѣйствующихъ силъ, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\int X_z dq = A, & &\int (yZ_z - lY_z) dq = A', \\ &\int Y_z dq = B, & &\int (lX_z - xZ_z) dq = B', \\ &\int Z_z dq = C, & &\int (xY_z - yX_z) dq = C', \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (7)$$

гдѣ dq элементъ площади сѣченія, l — высота цилиндра.

Обозначимъ черезъ ξ, η, ζ координаты точки x, y, z послѣ деформаціи, а черезъ u', v' значенія u и v по занесеніи въ нихъ ζ вмѣсто z; уравненіе изогнутаго волокна, параллельнаго до деформаціи оси цилиндра, какъ извѣстно, будетъ

$$\xi = x + u',$$

$$\eta = y + v'.$$

Принимая во вниманіе выраженія u и v черезъ z (фор. (6)), можемъ сказать, что при деформаціяхъ, соотвѣтствующихъ рѣшенію С. Венана, всякая прямая, параллельная оси цилиндра до деформаціи, преобразуется въ алгебраическую кривую третьяго порядка. Весьма естественно возникаетъ вопросъ, возможно-ли при условіи, что на боковую поверхность и массу цилиндрическаго тѣла не дѣйствуетъ никакихъ силъ, преобразованіе вышеупомянутыхъ прямыхъ въ алгебраическія кривыя какой либо другой степени подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ только къ крайнему сѣченію, и, если возможно, то какова эта степень (или степени) и каково рѣшеніе, соотвѣтствующее этому допущенію; каковы при этомъ величины напряженій? Такимъ образомъ приходимъ къ обратной постановкѣ вопроса: вмѣсто гипотезы о распредѣленіи давленій внутри призмы, задаемъ характеръ деформацій и, найдя соотвѣтствующее имъ рѣшеніе, опредѣлимъ и напряженіе внутри призмы. Подобнымъ путемъ рѣшаетъ Clebsch нѣкоторые вопросы о движеніи твердаго тѣла въ жидкости и, еще ближе, Maurice Lévy изслѣдуетъ вопросъ о равновѣсіи упругихъ пластинокъ *).

§ 2.

Итакъ, предположимъ, что u, v, w выражаются цѣлыми раціональными функціями z-а, и, не ограничивая сначала величину степени, полагаемъ

$$u=\sum U_i \frac{z^i}{i!}\,,\quad v=\sum V_i \frac{z^i}{i!}\,,\quad w=\sum W_i \frac{z^i}{i!}\,,\quad \Theta=\sum \Theta_i \frac{z^i}{i!}\,, \quad .\,(8)$$

гдѣ U_i, V_i, W_i, Θ_i $(i=1\,,\ 2\ldots\infty)$ четыре, пока неопредѣленныя, функціи x и y **).

Внося эти выраженія u, v и w въ уравненія (1) и (3) и замѣчая, что они должны быть удовлетворены при всякомъ z, получаемъ слѣдующій рядъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad (2k+1)\frac{\partial \Theta_i}{\partial x}+\Delta_2 U_i+U_{i+2}=0\,,\\
&\text{b)}\quad (2k+1)\frac{\partial \Theta_i}{\partial y}+\Delta_2 V_i+V_{i+2}=0\,,\\
&\text{c)}\quad (2k+1)\,\Theta_{i+1}+\Delta_2 W_i+W_{i+2}=0\,,\\
&\text{d)}\quad \Theta_i=\frac{\partial U_i}{\partial x}+\frac{\partial V_i}{\partial y}+W_{i+1}.
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\,.\,(9)$$

*) Maurice Lévy, „Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes", Journal de Mathématiques pures et appliquées, Série III, Tome III (1877).

**) См. вышеупомянутый мемуаръ M. Lévy.

При помощи первыхъ трехъ изъ уравненій (9) получаемъ

$$\Delta_2 \Theta_i + \Theta_{i+2} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Обозначивъ черезъ $\Delta_2^i F$ повторенную i разъ операцію $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ надъ функціей F и примѣняя послѣдовательно уравненіе (10) къ Θ_2, Θ_3... и т. д., найдемъ слѣдующія выраженія функціи Θ четнаго и нечетнаго значка черезъ функціи Θ_0 и Θ_1

$$\Theta_{2j} = (-1)^j \Delta_2^j \Theta_0 , \quad \Theta_{2j+1} = (-1)^j \Delta_2^j \Theta_1 . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Подобнымъ же образомъ первыя два изъ уравненій (9) и только что полученныя выраженія Θ_{2j}, Θ_{2j+1} дадутъ

$$\left.\begin{aligned}
U_{2j} &= (-1)^j \left[\Delta_2^j U_0 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_0}{\partial x} \right], \\
U_{2j+1} &= (-1)^j \left[\Delta_2^j U_1 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial x} \right], \\
V_{2j} &= (-1)^j \left[\Delta_2^j V_0 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_0}{\partial y} \right], \\
V_{2j+1} &= (-1)^j \left[\Delta_2^j V_1 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial y} \right].
\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (12)$$

Наконецъ, при помощи послѣдняго изъ уравненій (9), получимъ

$$\left.\begin{aligned}
W_{2j-1} &= (-1)^j \left[\Delta_2^{j-1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) + [j(2k+1) - 2(k+1)] \Delta_2^{j-1} \Theta_0 \right], \\
W_{2j} &= (-1)^j \left[\Delta_2^{j-1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) + [j(2k+1) - 2(k+1)] \Delta_2^{j-1} \Theta_1 \right].
\end{aligned}\right\} (13)$$

Въ этихъ выраженіяхъ j должно давать всѣ значенія отъ 1 и т. д., исключая $j = 0$. Для этого же послѣдняго значенія j, т. е. для W_0, будемъ имѣть

$$\Delta_2 W_0 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - 2(k+1)\Theta_1 . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Функціи U_0, V_0, U_1, V_1, Θ_0, Θ_1 и W_0 можемъ разсматривать какъ неизвѣстныя искомыя функціи, изъ которыхъ первыя шесть вполнѣ произвольны по отношенію къ уравненіямъ (9), а W_0 удовлетворяетъ дифференціальному уравненію въ частныхъ производныхъ (14). Найдя какимъ-бы то ни было способомъ эти шесть функцій, удовлетворяющихъ данной задачѣ упругости, найдемъ затѣмъ по формуламъ (12) и (13) всѣ U_i, V_i $(i=2, 3\ldots)$, W_i $(i=1, 2, 3\ldots)$ и W_0 по уравненію (14). Характеръ этихъ функцій U_0, V_0, U_1, V_1, Θ_0 и Θ_1, при всякихъ значеніяхъ которыхъ удовлетворяются уравненія упругости, зависитъ существеннымъ образомъ отъ предѣльныхъ условій задачи.

Положивъ далѣе по Maurice Lévy

$$X_x = \sum X_x^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \quad Y_y = \sum Y_y^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \quad Z_z = \sum Z_z^{(i)} \frac{z^i}{i!};$$

$$Z_y = Y_z = \sum Y_z^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \quad X_z = Z_x = \sum Z_x^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \quad X_y = Y_x = \sum Y_x^{(i)} \frac{z^i}{i!},$$

и воспользовавшись выраженіями (5), получимъ

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)} & \left\{\begin{array}{l}
X_x^{2j} = (-1)^j 2K\left[k\Delta_2^j\Theta_0 + (2k+1)j\dfrac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x^2} + \Delta_2^j\dfrac{\partial U_0}{\partial x}\right], \\[2ex]
X_x^{2j+1} = (-1)^j 2K\left[k\Delta_2^j\Theta_1 + (2k+1)j\dfrac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial x^2} + \Delta_2^j\dfrac{\partial U_1}{\partial x}\right],
\end{array}\right. \\[5ex]
\text{b)} & \left\{\begin{array}{l}
Y_y^{2j} = (-1)^j 2K\left[k\Delta_2^j\Theta_0 + (2k+1)j\dfrac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y^2} + \Delta_2^j\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right], \\[2ex]
Y_y^{2j+1} = (-1)^j 2K\left[k\Delta_2^j\Theta_1 + (2k+1)j\dfrac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial y^2} + \Delta_2^j\dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right],
\end{array}\right. \\[5ex]
\text{c)} & \left\{\begin{array}{l}
Z_z^{2j} = (-1)^j 2K\left[[1+k-j(2k+1)]\Delta_2^j\Theta_0 - \Delta_2^j\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right], \\[2ex]
Z_z^{2j+1} = (-1)^j 2K\left[[1+k-j(2k+1)]\Delta_2^j\Theta_1 - \Delta_2^j\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right],
\end{array}\right. \\[5ex]
\text{d)} & \left\{\begin{array}{l}
Z_y^{(2j)} = (-1)^j K\left[-2[1+k-j(2k+1)]\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_1\right], \\[3ex]
Z_y^{(2j-1)} = (-1)^j K\left[-2[1+k-j(2k+1)]\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_0\right],
\end{array}\right. \\[7ex]
\text{e)} & \left\{\begin{array}{l}
Z_x^{(2j)} = (-1)^j K\left[-2[1+k-j(2k+1)]\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_1\right], \\[3ex]
Z_x^{(2j-1)} = (-1)^j K\left[-2[1+k-j(2k+1)]\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x} + \dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_0\right],
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (15)$$

$$
\text{f)}\left\{\begin{aligned}
X_y^{(2j)} &= (-1)^j K\left[2j(2k+1)\frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x\partial y} + \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right],\\
X_y^{(2j+1)} &= (-1)^j K\left[2j(2k+1)\frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial x\partial y} + \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)\right].
\end{aligned}\right\}\quad (15)
$$

Формулы a), b), c) и f) справедливы для всякаго j отъ 0 и т. д., а d) и e) для $j=1, 2\ldots$ Кромѣ того

$$
\left.\begin{aligned}
Z_y^{(0)} &= K\left(\frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1\right),\\
Z_x^{(0)} &= K\left(\frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1\right).
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots (16)
$$

§ 3.

Допустимъ теперь, что ряды, опредѣляющіе u, v, w и Θ, выражаются ограниченнымъ рядомъ членовъ, расположенныхъ по степенямъ перемѣнной z. Самое общее допущеніе, какъ видно изъ выраженій (11), (12) и (13), которое можетъ быть сдѣлано относительно Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1, V_1, необходимое и достаточное для выполненія требуемаго условія, состоитъ въ предположеніи, что эти функціи удовлетворяютъ уравненіямъ

$$
\Delta_2^n\Theta_0 = 0,\quad \Delta_2^n U_0 = 0,\quad \Delta_2^n V_0 = 0;\ \ldots\ldots (17)
$$

$$
\Delta_2^{n'}\Theta_1 = 0,\quad \Delta_2^{n'} U_1 = 0,\quad \Delta_2^{n'} V_1 = 0,\ \ldots\ldots (18)
$$

гдѣ n и n' какія либо цѣлыя числа, причемъ всегда можемъ принять $n=n'$. При этомъ поверхностныя условія (4), которыя должны быть удовлетворены при всякомъ z, разобьются на рядъ такихъ условій для функцій Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1 и V_1 и одно для W_0, при помощи котораго по уравненію (14) опредѣлится и функція W_0, если будутъ найдены U_1 и V_1. Принимая во вниманіе выраженія (15) и (16), представимъ равенства (4) въ видѣ слѣдующаго ряда таковыхъ для функцій Θ_0, U_0, V_0

$$
\left.\begin{aligned}
&2\left[k\Delta_2^j\Theta_0 + (2k+1)j\,\frac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x^2} + \Delta_2^j\frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha +\\
&+\left[2j(2k+1)\,\frac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x\partial y} + \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\sin\alpha = 0,
\end{aligned}\right\}\ldots (19)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[2j(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha+\\
&\quad+\left[k\Delta_2^j\Theta_0+(2k+1)j\frac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y^2}+\Delta_2^j\frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha=0\,,\\
&\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^j U_0\right]\cos\alpha+\\
&\quad+\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^j V_0\right]\sin\alpha=0\,,
\end{aligned}\right\}\quad .\ (19)$$

гдѣ j должно дать всѣ значенія отъ n до 0 въ первыхъ двухъ и отъ n до 1 въ послѣднемъ, а $m_j=-2[1+k-j(2k+1)]\ldots\ldots(\alpha)$

Точно такой же рядъ условій получимъ и для функцій Θ_1, U_1 и V_1, стоитъ только замѣнить въ выраженіяхъ (19) значокъ 0 значкомъ 1. Сверхъ того для функціи W_0 будемъ имѣть поверхностное условіе

$$\left(\frac{\partial W_0}{\partial x}+U_1\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial W_0}{\partial y}+V_1\right)\sin\alpha=0\,.\quad .\ .\ .\ .\ (19_1)$$

Уравненія (7), равносильныя уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\int X_z\,dq=A\,, &&\int yZ_z\,dq=A'+Bl\,,\\
&\int Y_z\,dq=B\,, &&\int xZ_z\,dq=Al-B'\,,\\
&\int Z_z\,dq=C\,, &&\int(xY_z-yX_z)dq=C'\,,
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (7_1)$$

которыя должны имѣть мѣсто для какого угодно l, также разобьются на рядъ уравненій (каждое). При этомъ для всякаго $j>0$ эти уравненія будутъ

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^j U_0\right]dq=0\,,\\
&\int\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^j V_0\right]dq=0\,,\\
&\int\left[\frac{m_j}{2}\Delta_2^j\Theta_0+\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right]dq=0\,,
\end{aligned}\right\}\quad .\ (20)'$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int x\left[\frac{m_j}{2}\Delta_2^j\Theta_0+\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right]dq=0\,,\\
&\int y\left[\frac{m_j}{2}\Delta_2^j\Theta_0+\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right]dq=0\,,\\
&\int\left\{x\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^j V_0\right]-\right.\\
&\left.-y\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^j U_0\right]\right\}dq=0\,.
\end{aligned}\right\}.(20)'$$

Точно такія-же уравненія будутъ имѣть мѣсто и для функцій Θ_1, U_1 и V_1; выписывать ихъ я не буду.

Рѣшеніе вопроса приводится, такимъ образомъ, къ отысканію семи функцій W_0, Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1, V_1, удовлетворяющихъ дифференціальнымъ уравненіямъ въ частныхъ производныхъ (14), (17) и (18), поверхностнымъ условіямъ (19), (19_1) и уравненіямъ (20)'.

§ 4.

Такъ какъ условія, опредѣляющія Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1, V_1, совершенно одинаковы для всякаго $j>0$, то достаточно будетъ разсмотрѣть первыя три функціи; все сказанное о нихъ будетъ справедливо и для функцій Θ_1, U_1 и V_1 во всякомъ случаѣ, пока $j>0$. Итакъ, предположимъ, что Θ_0, U_0 и V_0 удовлетворяютъ уравненіямъ (17). Написавъ рядъ поверхностныхъ условій, начиная съ послѣдняго, по уравненіямъ (19), давая j значенія n, $(n-1)$, $(n-2)$, получимъ три группы такихъ условій въ видѣ

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}\sin\alpha=0\,,\\
&\frac{\partial^2\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial y^2}\sin\alpha=0\,,\\
&\left[m_n\frac{\partial\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}\right]\cos\alpha+\\
&+\left[m_n\frac{\partial\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}\right]\sin\alpha=0\,;
\end{aligned}\right\}.(20)$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\text{b)}\left\{
\begin{aligned}
&2\left[k\Delta_2^{n-1}\Theta_0+(n-1)(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x^2}+\Delta_2^{n-1}\frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha+\\
&+\left[2(n-1)(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\sin\alpha=0,\\
&\left[2(n-1)(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha+\\
&+\left[k\Delta_2^{n-1}\Theta_0+(n-1)(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial y^2}+\Delta_2^{n-1}\frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha=0,\\
&\left[m_{n-1}\frac{\partial\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^{n-1}U_0\right]\cos\alpha+\\
&+\left[m_{n-1}\frac{\partial\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^{n-1}V_0\right]\sin\alpha=0;
\end{aligned}\right.\\[2ex]
\text{c)}\left\{
\begin{aligned}
&2\left[k\Delta_2^{n-2}\Theta_0+(n-2)(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x^2}+\Delta_2^{n-2}\frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha+\\
&+\left[2(n-2)(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\sin\alpha=0,\\
&\left[2(n-2)(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha+\\
&+2\left[k\Delta_2^{n-2}\Theta_0+(n-2)(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial y^2}+\Delta_2^{n-2}\frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha=0,\\
&\left[m_{n-2}\frac{\partial\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{n-3}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^{n-2}U_0\right]\cos\alpha+\\
&+\left[m_{n-2}\frac{\partial\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{n-3}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^{n-2}V_0\right]\sin\alpha=0.
\end{aligned}\right.
\end{array}
\right\}.\quad(21)
$$

Положивъ для простоты

$$\Delta_2^{n-2}\Theta_0=\Theta_0';\quad \Delta_2^{n-2}U_0=U_0';\quad \Delta_2^{n-2}V_0=V_0',$$

приведемъ группы a) и b) къ виду

*

$$
\left.\begin{array}{l}
\mathrm{a}_1)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x^2}\cos\alpha + \dfrac{\partial^2 \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x\,\partial y}\sin\alpha = 0\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha + \dfrac{\partial^2 \Delta_2 \Theta_0'}{\partial y^2}\sin\alpha = 0\,, \\[2ex]
\left[m_n \dfrac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x} + \dfrac{\partial \Delta_2\left(\dfrac{\partial U_0'}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0'}{\partial y}\right)}{\partial x}\right]\cos\alpha + \\[2ex]
+\left[m_n \dfrac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial y} + \dfrac{\partial \Delta_2\left(\dfrac{\partial U_0'}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0'}{\partial y}\right)}{\partial y}\right]\sin\alpha = 0\,;
\end{array}\right. \\[8ex]
\mathrm{b}_1)\left\{\begin{array}{l}
2\left[k\Delta_2\Theta_0' + (n-1)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Theta_0'}{\partial x^2} + \Delta_2\dfrac{\partial U_0'}{\partial x}\right]\cos\alpha + \\[2ex]
+\left[2(n-1)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Theta_0'}{\partial x\,\partial y} + \Delta_2\left(\dfrac{\partial U_0'}{\partial y}+\dfrac{\partial V_0'}{\partial x}\right)\right]\sin\alpha = 0\,, \\[2ex]
\left[2(n-1)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Theta_0'}{\partial x\,\partial y} + \Delta_2\left(\dfrac{\partial U_0'}{\partial y}+\dfrac{\partial V_0'}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha + \\[2ex]
+\left[k\Delta_2\Theta_0' + (n-1)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Theta_0'}{\partial y^2} + \Delta_2\dfrac{\partial V_0'}{\partial y}\right]\sin\alpha = 0\,, \\[2ex]
\left[m_{n-1}\dfrac{\partial\Theta_0'}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U_0'}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0'}{\partial y}\right) + \Delta_2 U_0'\right]\cos\alpha + \\[2ex]
+\left[m_{n-1}\dfrac{\partial\Theta_0'}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U_0'}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0'}{\partial y}\right) + \Delta_2 V_0'\right]\sin\alpha = 0\,,
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \cdot (21_1)
$$

причемъ очевидно

$$
\Delta_2(\Delta_2\Theta_0') = 0\,,\quad \Delta_2(\Delta_2 U_0') = 0\,,\quad \Delta_2(\Delta_2 V_0') = 0\,,\;.\;.\;.\;.\;(22)
$$

а слѣдовательно и

$$
\left.\begin{array}{l}
\Delta_2\dfrac{\partial\Delta_2\Theta_0'}{\partial x} = 0\,,\quad \Delta_2\dfrac{\partial\Delta_2\Theta_0'}{\partial y} = 0\,,\quad \Delta_2\dfrac{\partial\Delta_2 U_0'}{\partial x} = 0\,, \\[2ex]
\Delta_2\dfrac{\partial\Delta_2 U_0'}{\partial y} = 0\,,\quad \Delta_2\dfrac{\partial\Delta_2 V_0'}{\partial x} = 0\,,\quad \Delta_2\dfrac{\partial\Delta_2 V_0'}{\partial y} = 0\,.
\end{array}\right\}\;.\;.\;.\;(23)
$$

На основаніи этихъ уравненій, принимая во вниманіе поверхностныя условія α_1) (21_1), приходимъ къ заключенію, что необходимо

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varDelta_2 \Theta'_0}{\partial x}\right]=0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \varDelta_2 \Theta'_0}{\partial x}\right]=0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varDelta_2 \Theta'_0}{\partial y}\right]=0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \varDelta_2 \Theta'_0}{\partial y}\right]=0\,,\\
\text{и}\qquad&\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[m_n \varDelta_2 \Theta'_0+\varDelta_2\left(\frac{\partial U'_0}{\partial x}+\frac{\partial V'_0}{\partial y}\right)\right]=0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left[m_n \varDelta_2 \Theta'_0+\varDelta_2\left(\frac{\partial U'_0}{\partial x}+\frac{\partial V'_0}{\partial y}\right)\right]=0\,,
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (24)$$

т. е. что

$$\frac{\partial \varDelta_2 \Theta'_0}{\partial x}=A_1\,, \qquad \frac{\partial \varDelta_2 \Theta'_0}{\partial y}=A_2$$

и

$$m_n \varDelta_2 \Theta'_0+\varDelta_2\left(\frac{\partial U'_0}{\partial x}+\frac{\partial V'_0}{\partial y}\right)=A\,,$$

гдѣ A_1, A_2, A произвольныя постоянныя.

Отсюда, обозначивъ черезъ A_3 новую произвольную постоянную, получаемъ

$$\varDelta_2 \Theta'_0=A_1 x+A_2 y+A_3\,, \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

и еще

$$\varDelta_2\left(\frac{\partial U'_0}{\partial x}+\frac{\partial V'_0}{\partial y}\right)=[A-m_n A_3]-m_n A_1 x-m_n A_2 y\,. \quad \ldots (26)$$

Приэтомъ третье, четвертое и пятое изъ уравненій (20) даютъ (при $j=n-1$)

$$\int Z_z^{2(n-1)}dq=0\,, \quad \int Z_z^{2(n-1)}x dq=0\,, \quad \int Z_z^{2(n-1)}y dq=0\,. \quad \ldots (27)$$

Такъ какъ далѣе

$$Z_z^{2(n-1)}=(-1)^{(n+1)}\left[\frac{m_{n-1}}{2}\varDelta_2 \Theta'_0+\varDelta_2\left(\frac{\partial U'_0}{\partial x}+\frac{\partial V'_0}{\partial y}\right)\right],$$

то

$$Z_z^{2(n-1)}=(-1)^{n+1}\left[\left(\frac{m_{n-1}-2m_n}{2}A_3+A\right)+\frac{m_{n-1}-2m_n}{2}A_1 x+\frac{m_{n-1}-2m_n}{2}A_2 y\right].$$

Положивъ для сокращенія

$$\alpha_1 = \left[\frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_3 + A\right], \quad \alpha_2 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_1, \quad \alpha_3 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_2,$$

получимъ, на основаніи уравненій (27)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 q + \alpha_2 \int x dq + \alpha_3 \int y dq = 0\,, \\ \alpha_1 \int x dq + \alpha_2 \int x^2 dq + \alpha_3 \int yx dq = 0\,, \\ \alpha_1 \int y dq + \alpha_2 \int xy dq + \alpha_3 \int y^2 dq = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (28)$$

гдѣ q величина площади сѣченія разсматриваемаго цилиндра.

Такъ какъ, вообще говоря, опредѣлитель

$$\varDelta = \begin{vmatrix} q\,, & \int x dq\,, & \int y dq \\ \int x dq\,, & \int x^2 dq\,, & \int yx dq \\ \int y dq\,, & \int xy dq\,, & \int y^2 dq \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю *), то необходимо

$$\alpha_1 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_3 + A = 0, \quad \alpha_2 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_1 = 0\,,$$

$$\alpha_3 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_2 = 0\,,$$

а слѣдовательно $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$.

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} &\varDelta_2 \Theta_0' = A_3\,, \quad \varDelta_2 \frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} = 0\,, \quad \varDelta_2 \frac{\partial \Theta_0'}{\partial y} = 0 \\ \text{и} \quad &\varDelta_2 \left(\frac{\partial U_0'}{\partial x} + \frac{\partial V_0'}{\partial y}\right) = -\frac{m_{n-1} A_3}{2}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (29)$$

---

*) Я пока оставляю координатную систему вполнѣ произвольной. Если начало координатъ помѣстить въ центрѣ тяжести сѣченія, то $\varDelta = q \int x^2 dq \cdot \int y^2 dq$ величина существенно положительная.

Представивъ второе изъ уравненій (22) въ видѣ

$$\frac{\partial^2 \Delta_2 U_0'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta_2 U_0'}{\partial y^2} = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22_1)$$

продифференцировавъ послѣднее изъ уравненій (29) по x и вычтя результатъ изъ (22_1), получимъ

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta_2\left(\frac{\partial V_0'}{\partial x} - \frac{\partial U_0'}{\partial y}\right)\right] = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

и точно также, при помощи третьяго изъ уравненій (22), найдемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta_2\left(\frac{\partial V_0'}{\partial x} - \frac{\partial U_0'}{\partial y}\right)\right] = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30_1)$$

такъ что

$$\Delta_2\left(\frac{\partial V_0'}{\partial x} - \frac{\partial U_0'}{\partial y}\right) = B\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

гдѣ B произвольная постоянная.

§ 5.

Очевидно, что функціи Θ_0', U_0' и V_0', удовлетворяющія уравненіямъ (29) предыдущаго параграфа, непосредственно отождествляютъ группу (a_1) поверхностныхъ условій (21_1). Необходимо еще удовлетворить всѣмъ остальнымъ условіямъ, начиная съ группы (b_1).

На основаніи выраженій (29) и (31) первое изъ уравненій этой группы приметъ видъ (по сокращеніи на 2).

$$\left.\begin{aligned}&\left[kA_3 + \frac{\partial}{\partial x}\left\{(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} + \Delta_2 U_0'\right\}\right]\cos\alpha + \\ &+\left[\frac{B}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} + \Delta_2 U_0'\right\}\right]\sin\alpha = 0\,.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (32)$$

Введемъ новую функцію F, положивъ

$$F = (n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} + \Delta_2 U_0' + kA_3 x + \frac{B}{2}y + D_1'\,,$$

разумѣя подъ D_1' произвольную постоянную.

Такъ какъ, очевидно, функція F удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta_2 F = 0\,,$$

то заключаемъ, что

$$(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x}+\Delta_2 U_0'+kA_3 x+\frac{B}{2}y+D_1=0\,,\;.\;.\;(33)$$

гдѣ D_1 новая произвольная постоянная.

Точно также убѣдимся при помощи второго уравненія изъ группы (b_1) поверхностныхъ условій (21_1), что

$$(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial y}+\Delta_2 V_0'+kA_3 y-\frac{B}{2}x+D_2=0.\;.\;.\;(33_1)$$

D_2 обозначаетъ произвольную постоянную.

При помощи уравненій (33) и (33_1) заключаемъ, что $A_3=0$. Въ самомъ дѣлѣ, продифференцировавъ первое изъ нихъ по x, второе по y и сложивъ, получимъ равенство

$$(n-1)(2k+1)\Delta_2\Theta_0'+\Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)+2kA_3=0\,,$$

которое, въ силу перваго и послѣдняго изъ уравненій (29), приметъ видъ

$$\left[2k+(n-1)(2k+1)-\frac{m_{n-1}}{2}\right]A_3=0\,,$$

или, принимая во вниманіе обозначеніе (α) § 3,

$$(3k+1)A_3=0\,,$$

откуда необходимо слѣдуетъ, что $A_3=0$ (ибо $3k+1$ не равно нулю), *) и уравненія (33) и (33_1) будутъ

---

*) Постоянная k связана съ постоянной μ, выражающей отношеніе величины поперечнаго линейнаго сжатія (или растяженія) къ величинѣ продольнаго растяженія (или сжатія) при растягиваніи (или сжатіи) цилиндра силами, приложенными къ его основанію, соотношеніемъ

$$\frac{1}{1-2\mu}=2k+1\,.$$

Такъ какъ средняя величина μ (по опыту) равна 0,25, то $k=\frac{1}{2}$ и $3k+1=\frac{5}{2}$. См. Бобылевъ, Гидростатика и теорія упругости. СПБ. 1886 года § 37, ст. 109 и 110.

$$
\left.\begin{aligned}
&(n-1)(2k+1)\frac{\partial\Theta_0'}{\partial x}+\varDelta_2 U_0'+\frac{B}{2}y+D_1=0\,,\\
&(n-1)(2k+1)\frac{\partial\Theta_0'}{\partial y}+\varDelta_2 V_0'-\frac{B}{2}x+D_2=0\,,
\end{aligned}\right\}\ldots(34)
$$

а первое и послѣднее изъ уравненій (29) приведутся къ слѣдующимъ

$$
\varDelta_2\Theta_0'=0 \quad \text{и} \quad \varDelta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)=0 \quad \ldots\ldots(35)
$$

§ 6.

Переходимъ теперь къ опредѣленію постоянныхъ B, D_1, D_2. Покажемъ, что онѣ необходимо равны нулю при данныхъ условіяхъ задачи. Послѣднее изъ поверхностныхъ условій группы (b_1), по занесеніи въ него вмѣсто $\varDelta_2 U_0'$ и $\varDelta_2 V_0'$ ихъ выраженій черезъ производныя отъ Θ_0', слѣдующихъ изъ уравненій (34), если положимъ для сокращенія

$$
k_1=[m_{n-1}-(n-1)(2k+1)]\,, \quad \ldots\ldots\ldots(\beta)
$$

представится въ видѣ

$$
\left.\begin{aligned}
&\left[k_1\frac{\partial\Theta_0'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)-D_1-\frac{B}{2}y\right]\cos\alpha+\\
&+\left[k_1\frac{\partial\Theta_0'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)-D_2+\frac{B}{2}x\right]\sin\alpha=0\,.
\end{aligned}\right\}.\ (36)
$$

Обозначивъ черезъ F_1 функцію вида

$$
F_1=k_1\Theta_0'+\left[\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)-D_1 x-D_2 y-D_3\,,
$$

гдѣ D_3 нѣкоторая постоянная, получимъ

$$
\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}-\frac{B}{2}y\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{B}{2}x\right]\sin\alpha=0\ \ldots\ldots(37)
$$

Такимъ образомъ функція F_1 удовлетворяетъ на поверхности (собственно на периферіи какого либо сѣченія, нормальнаго къ оси цилиндра) условію (37), а внутри цилиндра, какъ не трудно видѣть, уравненію

$$
\varDelta_2 F_1=0\,.\ \ldots\ldots\ldots\ldots(38)
$$

Уравненіе (38) въ связи съ поверхностнымъ условіемъ (37) вполнѣ опредѣляетъ функцію F_1, аналогичную функціи $b_0 B_0$ (по обозначенію Клебша) *), характеризующей явленіе крученія въ задачѣ С. Венана. Положивъ

$$F_1 = \frac{B}{2} F_2 ,$$

заключаемъ, что F_2 удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta_2 F_2 = 0 , \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38_1)$$

и на поверхности условію

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F_2}{\partial y} \sin\alpha = y \cos\alpha - x \sin\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37_1)$$

Предположимъ, что найдена такая (вполнѣ опредѣленная для каждаго сѣченія) функція координатъ, которую обозначимъ черезъ φ, тогда коэффиціенты при $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ въ выраженіи (36) будутъ

$$\frac{B}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right] \quad \text{и} \quad \frac{B}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) .$$

Такъ какъ при этомъ

$$\int Z_x^{2(n-1)} dq = 0 , \quad \int Z_y^{2(n-1)} dq = 0$$

и

$$Z_x^{2(n-1)} = \frac{B}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right], \quad Z_y^{2(n-1)} = \frac{B}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right],$$

то

$$\frac{B}{2}\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right] dq = 0 , \quad \frac{B}{2}\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right] dq = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Исключая предположеніе, что интегралы $\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right] dq$ и $\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right] dq$ одновременно равны нулю, заключаемъ, что необходимо $B = 0$. Допущеніе неравенства нулю вышеупомянутыхъ интеграловъ мнѣ кажется весьма естественнымъ при произвольномъ выборѣ координатной системы и произвольности периферіи сѣченія. Для подтвержденія сдѣланнаго общаго предположенія разсмотримъ случай эллиптическаго сѣченія, предполагая начало координатъ не въ центрѣ тяжести его и принимая для простоты за координатныя оси прямыя, параллельныя

*) См. Clebsch, „Theorie d. Elasticität fester Körper", § 24 etc.

главнымъ осямъ. Такъ какъ уравненіе (38_1) и условіе (37_1) опредѣляютъ вполнѣ функцію F_2, то всякая F_2, удовлетворяющая имъ, будетъ общимъ рѣшеніемъ уравненія (38_1) при условіи (37_1). Пусть

$$F_2 = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy\,,$$

гдѣ α_1, α_2, α_3 постоянныя, подлежащія опредѣленію. Называя черезъ α и β координаты центра тяжести и принявъ во вниманіе уравненіе эллипса

$$\frac{(x+\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y+\beta)^2}{b^2} = 1,$$

получаемъ, удовлетворяя условію (37_1), для опредѣленія α_i ($i=1,\ 2,\ 3$) слѣдующую систему уравненій

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 b^2 + (\alpha_3+1)a^2\beta &= 0\,,\\ \alpha_2 a^2 + (\alpha_3-1)b^2\alpha &= 0\,,\\ (\alpha_3-1)b^2 + (\alpha_3+1)a^2 &= 0\,,\\ b^2\alpha\alpha_1 + a^2\alpha_2\beta &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Три неизвѣстныхъ α_1, α_2, α_3 удовлетворяютъ четыремъ уравненіямъ (40), но послѣднее изъ нихъ есть слѣдствіе трехъ первыхъ, которыя даютъ

$$\alpha_3 = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\,,\quad \alpha_2 = \frac{2b^2\alpha}{a^2+b^2}\,,\quad \alpha_1 = -\frac{2a^2\beta}{a^2+b^2}\,,$$

четвертое удовлетворится само собою.

Такимъ образомъ

$$F_2 = -\frac{2a^2\beta}{a^2+b^2}x + \frac{2b^2\alpha}{a^2+b^2}y + \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}xy = \varphi$$

и

$$\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right]dq = -\frac{2a^2}{b^2+a^2}\int(\beta+y)dq = -\frac{4a^2\beta q}{a^2+b^2},$$

величинѣ отличной отъ нуля при такомъ-же β.

Впрочемъ, чтобы избѣжать недоразумѣній и не ограничивать доказательства, можно еще слѣдующимъ образомъ убѣдиться, что B необходимо равно нулю (всегда).

Послѣднее изъ уравненій (7) даетъ для всякаго $j>0$, а въ данномъ случаѣ для $j=(n-1)$ (n предполагается >1)

$$\int(xZ_y^{2(n-1)} - yZ_x^{2(n-1)})dq = 0\,,\quad \ldots\ldots\ldots \quad (7_6)$$

или

$$\frac{B}{2}\int\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\right]dq=0\,,$$

откуда необходимо слѣдуетъ, что

$$\text{или}\quad B=0\,,\ \text{или}\quad \int\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\right]dq=0\,.\,.\,(41)$$

Не трудно убѣдиться въ невозможности послѣдняго допущенія. Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, интегралъ, распространенный на всю площадь сѣченія цилиндра, отъ функціи

$$\psi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2.$$

Обозначивъ его черезъ J, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}J=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2\right]dq=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dq+\\+2\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dq+\int(y^2+x^2)\,dq\,.\end{aligned}\right\}(42)$$

Такъ какъ φ удовлетворяетъ уравненію $\Delta_2\varphi=0$ (и предполагается однозначной непрерывной функціей координатъ), то

$$J_1=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dq=\int\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\alpha\right)ds\,.\quad.\,(43)$$

Послѣдній изъ интеграловъ распространяется на всю периферію разсматриваемаго сѣченія.

Отсюда, въ силу условія (37_1), заключаемъ, что

$$J_1=\int\varphi(y\cos\alpha-x\sin\alpha)ds\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(44)$$

Съ другой стороны

$$J_2=\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dq=\int\left[\frac{\partial(x\varphi)}{\partial y}-\frac{\partial(y\varphi)}{\partial x}\right]dq=$$

$$=-\int\varphi(y\cos\alpha-x\sin\alpha)ds\,,$$

а потому, на основаніи равенствъ (43) и (44), находимъ

$$-\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dq=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dq\,,$$

и наконецъ

$$\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2\right]dq=\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+x^2+y^2\right)dq\,. \quad (45)$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что второе изъ условій (41) возможно лишь въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+x=0\,, \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (46)$$

чего, несомнѣнно, не можетъ быть. Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что вообще необходимо

$$B=0\,.$$

§ 7.

Итакъ, находимъ, что Θ'_0, U'_0 и V'_0 должны удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}(n-1)\,(2k+1)\frac{\partial\Theta'_0}{\partial x}+\Delta_2 U'_0+D_1=0\,,\\(n-1)\,(2k+1)\frac{\partial\Theta'_0}{\partial y}+\Delta_2 V'_0+D_2=0\,,\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ . \quad (34_1)$$

а функція F_1 уравненію (38) и условію

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F_1}{\partial y}\sin\alpha=0\,, \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (37_2)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$k_1\Theta'_0+\left(\frac{\partial U'_0}{\partial x}+\frac{\partial V'_0}{\partial y}\right)-D_1x-D_2y-D_3=0 \quad .\ .\ .\ . \quad (47)$$

Переходимъ теперь къ опредѣленію постоянныхъ D_1, D_2 и D_3.

Прежде всего обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Если имѣемъ двѣ функціи ψ_1 и ψ_2 (однозначныя и непрерывныя въ извѣстной части плоскости), удовлетворяющія уравненію

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}=0 \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (48)$$

и на поверхности условію

$$\psi_1 \cos\alpha + \psi_2 \sin\alpha = 0\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (49)$$

то

$$\int \psi_1 dq = 0 \quad \text{и} \quad \int \psi_2 dq = 0\,,$$

гдѣ интеграція распространяется на всю площадь, ограниченную данной кривой, внутри которой эти функціи остаются непрерывными. Въ самомъ дѣлѣ, помножая поверхностное уравненіе (49) на x, и интегрируя по всей периферіи, имѣемъ

$$K = \int x(\psi_1 \cos\alpha + \psi_2 \sin\alpha)\,ds = 0\,.$$

Преобразуя этотъ линейный интегралъ въ поверхностный и принявъ во вниманіе уравненіе (48), получаемъ непосредственно

$$K = \int \psi_1 dq = 0 \, . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (50)$$

Точно также легко убѣдиться, что и

$$\int \psi_2 dq = 0\,, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (50_1)$$

и кромѣ того

и
$$\left.\begin{array}{c} \int x\psi_1 dq = 0\,, \quad \int y\psi_2 dq = 0\,, \\ \\ \int (y\psi_1 + x\psi_2)\,dq = 0\,. \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \quad (51)$$

Послѣднія равенства получимъ, помноживъ уравненіе (49) соотвѣтственно на x^2, y^2 и xy и выполнивъ предыдущія преобразованія. Такъ какъ группы (a_1) и (b_1) поверхностныхъ условій (21_1) удовлетворяются сами собою, то переходимъ къ условіямъ группы (c) уравненій (21), которыя могутъ быть представлены (если примемъ во вниманіе выраженія (15)), въ видѣ

$$\left.\begin{array}{l} X_x^{2(n-2)} \cos\alpha + X_y^{2(n-2)} \sin\alpha = 0\,, \\ \\ Y_x^{2(n-2)} \cos\alpha + Y_y^{2(n-2)} \sin\alpha = 0\,, \\ \\ Z_x^{2(n-2)} \cos\alpha + Z_y^{2(n-2)} \sin\alpha = 0\,. \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \quad (52)$$

Изъ этихъ выраженій легко получить нѣкоторыя равенства, при посредствѣ которыхъ убѣдимся, что постоянныя D_1, D_2 и D_3 необходимо равны нулю.

Такъ какъ несомнѣнно

$$\frac{\partial X_y^{2(n-2)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^{2(n-2)}}{\partial y} = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

въ чемъ легко убѣдиться при помощи уравненій (34_2), то, на основаніи предыдущихъ сужденій, заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned} &\int X_x^{2(n-2)} dq = 0\,,\ \int Y_y^{2(n-2)} dq = 0 \ \text{ и } \int X_y^{2(n-2)} dq = 0\,, \\ &\int x X_x^{2(n-2)} dq = 0\,,\ \int y X_y^{2(n-2)} dq = 0\,,\ \int x X_y^{2(n-2)} dq = 0\,, \\ &\int y Y_y^{2(n-2)} dq = 0\,,\ \int (y X_x^{2(n-2)} + x Y_y^{2(n-2)}) dq = 0,\ \int (y X_y^{2(n-2)} + x Y_y^{2(n-2)}) dq = 0\,. \end{aligned}\right\} (54)$$

Изъ этихъ равенствъ, какъ легко видѣть, слѣдуютъ еще

$$\int x Y_y^{2(n-2)} dq = 0 \quad \text{и} \quad \int y X_x^{2(n-2)} dq = 0\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (54_1)$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ (54) въ силу пятаго изъ нихъ получается первое изъ (54_1), вслѣдствіе котораго предпослѣднее изъ (54) даетъ и второе. Отсюда заключаемъ еще, что

$$\left.\begin{aligned} &\int [X_x^{2(n-2)} + Y_y^{2(n-2)}] dq = 0\,, \quad \int x [X_x^{2(n-2)} + Y_y^{2(n-2)}] dq = 0 \\ \text{и} \\ &\qquad \int y [X_x^{2(n-2)} + Y_y^{2(n-2)}] dq = 0\,. \end{aligned}\right\}. (55)$$

Эти равенства мы и желали получить.

Замѣняя въ послѣднихъ выраженіяхъ $X_x^{2(n-2)}$ и $Y_y^{2(n-2)}$ ихъ выраженіями въ функціяхъ Θ_0, U_0 и V_0 (на основаніи равенства (15)), получаемъ

$$\left.\begin{aligned} &\int \left\{ [2k + (n-2)(2k+1)] \varDelta_2^{n-2} \Theta_0 + \varDelta_2^{n-2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \right\} dq = 0\,, \\ &\int x \left\{ [2k + (n-2)(2k+1)] \varDelta_2^{n-2} \Theta_0 + \varDelta_2^{n-2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \right\} dq = 0\,, \\ &\int y \left\{ [2k + (n-2)(2k+1)] \varDelta_2^{n-2} \Theta_0 + \varDelta_2^{n-2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \right\} dq = 0\,, \end{aligned}\right\} (55_1)$$

или, подставивъ вмѣсто $\varDelta_2^{n-2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right)$ его выраженіе черезъ $\varDelta_2^{n-2} \Theta_0$, слѣдующее изъ уравненія (47), и принявъ во вниманіе обозначенія (α) и (β) (§§ 3, 7), находимъ

$$\left.\begin{aligned}
&\int[(2k+1)\varDelta_2^{n-2}\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,,\\
&\int x\,[(2k+1)\varDelta_2^{n-2}\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,,\\
&\int y\,[(2k+1)\varDelta_2^{n-2}\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,.
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;(55_2)$$

Такъ какъ предполагается $n>2$ и такъ какъ для всякаго $j>0$ имѣютъ мѣсто три послѣднія изъ уравненій (20) (§ 3), то, кромѣ послѣднихъ уравненій (55_2), имѣемъ еще (подставивъ въ уравненія (20) вмѣсто $\varDelta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)$ его выраженіе черезъ $\varDelta_2\Theta_0$) слѣдующую систему условій

$$\left.\begin{aligned}
&\int(k\varDelta_2^{n-2}\Theta_0-D_1x-D_2y-D_3)\,dq=0\,,\\
&\int x\,(k\varDelta_2^{n-2}\Theta_0-D_1x-D_2y-D_3)\,dq=0\,,\\
&\int y\,(k\varDelta_2^{n-2}\Theta_0-D_1x-D_2y-D_3)\,dq=0\,,
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(56)$$

ибо $\frac{m_{n-2}}{2}-k_1=k$ (въ силу обозначеній (α) и (β)).

Умноживъ каждое изъ уравненій (56) на $(2k+1)$, а каждое изъ уравненій (55_2) на k, и вычтя соотвѣтственно однѣ изъ другихъ, получимъ

$$\left.\begin{aligned}
&D_3q+D_1\int xdq+D_2\int ydq=0\,,\\
&D_3\int xdq+D_1\int x^2dq+D_2\int xydq=0\,,\\
&D_3\int ydq+D_1\int xydq+D_2\int y^2dq=0\,,
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(57)$$

откуда, подобно тому какъ въ § 4, заключаемъ, что необходимо

$$D_1=0\,,\quad D_2=0\,,\quad D_3=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(58)$$

что и требовалось доказать.

§ 8.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что если функціи Θ_0, U_0 и V_0 удовлетворяютъ уравненіямъ (въ частныхъ производныхъ $2n$-аго порядка)

$$\varDelta_2^n\Theta_0=0\,,\quad \varDelta_2^n U_0=0\,,\quad \varDelta_2^n V_0=0\,,$$

представляющимъ самыя общія условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы u, v, w и Θ выражались ограниченнымъ числомъ членовъ, расположенныхъ по степенямъ перемѣнной z, то онѣ при данныхъ условіяхъ задачи (высказанныхъ въ § 1), необходимо удовлетворятъ и уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}&(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x}+\Delta_2^{n-1}U_0=0\,,\\&(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial y}+\Delta_2^{n-1}V_0=0\,,\\&k_1\Delta_2^{n-2}\Theta_0+\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(59)$$

въ которыя обращаются уравненія (34_1) и (47) при $D_1=D_2=D_3=0$.

Задача приводится къ отысканію такихъ функцій Θ_0, U_0 и V_0, которыя, удовлетворяя этимъ уравненіямъ и уравненіямъ (7_1) (§ 3), отождествляли бы въ тоже время и рядъ поверхностныхъ условій, начиная съ группы (c) уравненій (21).

Не трудно замѣтить, что уравненія (59) могутъ быть представлены въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_2\left[(n-2)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x}+\Delta_2^{n-2}U_0\right]+(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x}=0\,,\\&\Delta_2\left[(n-2)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial y}+\Delta_2^{n-2}V_0\right]+(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial y}=0\,.\end{aligned}\right\}(60)$$

Но, въ силу уравненій (11) и (12) (при $j=(n-2)$), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{(n-2)}\Delta_2^{n-2}\Theta_0=\Theta_{2(n-2)}\quad\text{и}\\&(-1)^{(n-2)}\left[\Delta_2^{n-2}U_0+(n-2)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x}\right]=U_{2(n-2)}\,,\\&(-1)^{(n-2)}\left[\Delta_2^{n-2}V_0+(n-2)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial y}\right]=V_{2(n-2)}\,,\end{aligned}\right\}.\,(61)$$

а слѣдовательно функціи $\Theta_{2(n-2)}$, $U_{2(n-2)}$ и $V_{2(n-2)}$ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_2U_{2(n-2)}+(2k+1)\frac{\partial\Theta_{2(n-2)}}{\partial x}=0\,,\\&\Delta_2V_{2(n-2)}+(2k+1)\frac{\partial\Theta_{2(n-2)}}{\partial y}=0\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(62)$$

Дифференцируя второе изъ уравненій (61) по x, третье по y и складывая, имѣемъ

$$(-1)^{(n-2)}\left[\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)+(n-2)(2k+1)\Delta_2^{n-2}\Theta_0\right]=\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial x}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial y},$$

а принявъ во вниманіе третье изъ уравненій (59) и замѣтивъ, что

$$(n-2)(2k+1)-k_1=1,$$

приводимъ предыдущее равенство (на основаніи перваго изъ уравненій (61)) къ виду

$$\Theta_{2(n-2)}=\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial x}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (63)$$

Первыя же два изъ поверхностныхъ условій (c) (равенствъ (21)), выраженныя въ функціяхъ $\Theta_{2(n-2)}$, $U_{2(n-2)}$ и $V_{2(n-2)}$, дадутъ

$$\left.\begin{aligned}2\left[k\Theta_{2(n-2)}+\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial y}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial x}\right]\sin\alpha=0,\\ \left[\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial y}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial x}\right]\cos\alpha+2\left[k\Theta_{2(n-2)}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial y}\right]\sin\alpha=0.\end{aligned}\right\} . \; (64)$$

Такимъ образомъ функціи $\Theta_{2(n-2)}$, $U_{2(n-2)}$ и $V_{2(n-2)}$, удовлетворяя уравненіямъ (62) и (63), должны, между прочимъ, на поверхности отождествлять уравненія (64). Несомнѣнно, какъ то слѣдуетъ изъ уравненій (62) и (63), функціи эти можемъ разсматривать какъ проекціи на оси координатъ перемѣщеній точекъ при деформаціяхъ плоской фигуры въ ея плоскости, когда на массу ея площади, а также и на периферію, не дѣйствуетъ никакихъ силъ (что видно изъ уравненій (64)). Функціи $\Theta_{2(n-2)}$, $U_{2(n-2)}$ и $V_{2(n-2)}$, слѣдовательно, были бы равны нулю при условіяхъ опредѣленности задачи о равновѣсіи упругихъ тѣлъ. Въ данномъ случаѣ такихъ условій поставить нельзя, а потому выраженія этихъ функцій черезъ координаты точекъ тѣла будутъ содержать три произвольныхъ постоянныхъ, а самый общій видъ ихъ, какъ рѣшеній уравненій (62) и (63) при условіяхъ (64), будетъ

$$\Theta_{2(n-2)}=0, \quad U_{2(n-2)}=a+cy, \quad V_{2(n-2)}=b-cx.$$

Намъ нѣтъ пока надобности опредѣлять постоянныя a, b и c, важно замѣтить только, что (въ силу перваго изъ только что приведенныхъ уравненій)

$$\Delta_2^{n-2}\Theta_0=0,$$

откуда, принимая въ разсчетъ уравненія (59), заключаемъ, что необходимо

$$\Delta_2^{n-2} U_0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_2^{n-2} V_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

§ 9.

Предыдущій анализъ приводитъ, такимъ образомъ, къ заключенію, что, если функціи Θ_0, U_0 и V_0 удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\Delta_2^n \Theta_0 = 0\,, \quad \Delta_2^n U_0 = 0\,, \quad \Delta_2^n V_0 = 0\,,$$

то, при извѣстныхъ условіяхъ разсматриваемой задачи, онѣ необходимо будутъ удовлетворять и уравненіямъ

$$\Delta_2^{n-1} \Theta_0 = 0\,, \quad \Delta_2^{n-1} U_0 = 0\,, \quad \Delta_2^{n-1} V_0 = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Разсмотримъ ближе эти условія.

Сопоставляя все изложенное въ предыдущихъ параграфахъ, убѣждаемся, что только что сказанное будетъ справедливо для всякаго n, коль скоро 1) имѣютъ мѣсто группы a, b и c поверхностныхъ условій (21) *) и 2) уравненія равенства вектора и момента заданныхъ силъ и силъ напряженій, развивающихся при этомъ, вида (20).

Разсматривая уравненія (7_1), находимъ, что равенства (20) будутъ справедливы для всякаго $j > 0$, и, слѣдовательно, для всякаго $n > 2$; что же касается поверхностныхъ условій (21), то для всякаго $n > 2$ несомнѣнно найдется три группы ихъ вида (21), причемъ для $n = 2$ третье условіе изъ группы (c) замѣнится поверхностнымъ условіемъ для функціи W_0

$$\left[\frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1\right]\sin\alpha = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad (19_1)$$

Такимъ образомъ, если функціи Θ_0, U_0 и V_0 удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\Delta_2^n \Theta_0 = 0\,, \quad \Delta_2^n U_0 = 0\,, \quad \Delta_2^n V_0 = 0\,,$$

то *для всякаго* $n > 2$

$$\Delta_2^{n-1} \Theta_0 = 0\,, \quad \Delta_2^{n-1} U_0 = 0\,, \quad \Delta_2^{n-1} V_0 = 0\,.$$

Для случая же $n = 2$, этого заключенія сдѣлать нельзя.

---

*) Въ послѣдней группѣ необходимы лишь два первыхъ изъ нихъ.

Однако все сказанное въ §§ 4, 5, 6 до 7 будетъ приложимо и для $n=2$, ибо группы (a) и (b) поверхностныхъ условій (21), какъ замѣчено выше, а также и уравненія (7_6), будутъ имѣть мѣсто и при данномъ допущеніи, такъ что для $n=2$ функціи Θ_0, U_0, V_0 необходимо будутъ удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}&(2k+1)\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}+\varDelta_2 U_0+D_1=0\,,\\&(2k+1)\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}+\varDelta_2 V_0+D_2=0\,,\\&k_1\Theta_0+\left[\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right]-D_1x-D_2y-D_3=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots(67)$$

гдѣ $k_1'=-1$, а D_1, D_2 и D_3 вполнѣ опредѣленныя постоянныя, отличныя отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (55) имѣютъ мѣсто и въ разсматриваемомъ случаѣ и представятся въ видѣ

$$\text{и}\qquad\left.\begin{aligned}&\int[X_x^{(0)}+Y_y^{(0)}]dq=0\,,\quad\int x[X_x^{(0)}+Y_y^{(0)}]dq=0,\\&\int y[X_x^{(0)}+Y_y^{(0)}]dq=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots(68)$$

а уравненія (56) замѣнятся, какъ легко видѣть изъ общихъ уравненій (7_1), слѣдующими

$$\int Z_z^{(0)}dq=C\,,\quad\int xZ_z^{(0)}dq=A\,,\quad\int yZ_z^{(0)}dq=A'.\;\ldots\;(69)$$

Но, принявъ во вниманіе равенства (15) и уравненія (67), находимъ, что

$$\left.\begin{aligned}&X_x^{(0)}+Y_y^{(0)}=2K[(2k+1)\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3],\\&Z_z^{(0)}=2K[k\Theta_0-D_1x-D_2y-D_3],\end{aligned}\right\}\quad\ldots(70)$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}&\int[(2k+1)\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,,\\&\int x[(2k+1)\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,,\\&\int y[(2k+1)\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots(71)$$

и (уравненія (69))

$$\left.\begin{aligned} 2K\int[k\Theta_0 - D_1x - D_2y - D_3)dq = C\,, \\ 2K\int x[k\Theta_0 - D_1x - D_2y - D_3)dq = A\,, \\ 2K\int y[k\Theta_0 - D_1x - D_2y - D_3)dq = A'. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (72)$$

Отсюда получаемъ такую систему уравненій для опредѣленія D_1, D_2 и D_3

$$\left.\begin{aligned} D_3\int dq + D_1\int xdq + D_2\int ydq = -\frac{C}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\,, \\ D_3\int xdq + D_1\int x^2dq + D_2\int xydq = -\frac{A}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\,, \\ D_3\int ydq + D_1\int xydq + D_2\int y^2dq = -\frac{A'}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\,. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (73)$$

Принимая начало координатъ въ центрѣ тяжести, а за оси x и y главныя оси инерціи сѣченія, находимъ

$$D_3 = -\frac{C(2k+1)}{2K(3k+1)q}, \quad D_1 = -\frac{A\,(2k+1)}{2K(3k+1)q}\frac{1}{\lambda^2}, \quad D_2 = -\frac{A'\,(2k+1)}{2K(3k+1)q}\frac{1}{\mu^2}, \quad (74)$$

гдѣ q площадь сѣченія, а λ и μ главные радіусы инерціи.

Итакъ, самыя общія выраженія для функцій Θ_0, U_0 и V_0, соотвѣтствующія требованію, чтобы u, v и w выражались цѣлыми раціональными функціями z, получатся рѣшеніемъ системы дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ втораго порядка (67) при поверхностныхъ условіяхъ

$$\left.\begin{aligned} 2\left[k\Theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\sin\alpha = 0\,, \\ \left[\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + 2\left[k\Theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (75)$$

§ 10.

Все сказанное о функціяхъ Θ_0, U_0 и V_0 относится и къ Θ_1, U_1 и V_1, такъ какъ, очевидно изъ уравненій (4) § 1, выраженій (11) и (12) § 2 и уравненій (7_1) § 3, онѣ удовлетворяютъ тѣмъ же условіямъ, какъ и первыя, и уравненіямъ

$$\Delta_2^{n_1}\Theta_1 = 0\,, \quad \Delta_2^{n_1}U_1 = 0\,, \quad \Delta_2^{n_1}V_1 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (76)$$

гдѣ n_1 какое угодно цѣлое число. Поэтому приходимъ къ заключенію, что и самый общій видъ функцій Θ_1, U_1 и V_1, соотвѣтствующій разсматриваемому требованію, опредѣляется уравненіями

$$\Delta_2^2\Theta_1 = 0\,, \quad \Delta_2^2 U_1 = 0\,, \quad \Delta_2^2 V_1 = 0\,,$$

которыя, въ свою очередь, приводятся къ слѣдующимъ

$$\left.\begin{aligned} &(2k+1)\frac{\partial\Theta_1}{\partial x} + \Delta_2 U_1 + E_1 = 0\,, \\ &(2k+1)\frac{\partial\Theta_1}{\partial y} + \Delta_2 V_1 + E_2 = 0\,, \\ &-\Theta_1 + \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right] - E_1 x - E_2 y - E_3 = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (77)$$

гдѣ E_1, E_2 и E_3 постоянныя, опредѣляемыя при помощи равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &\int[X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}]dq = 0\,, \ \int x[X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}]dq = 0\,, \ \int y[X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}]dq = 0\,, \\ &\qquad \int Z_z^{(1)}dq = 0\,, \ \int xZ_z^{(1)}dq = B'\,, \ \int yZ_z^{(1)}dq = B\,, \end{aligned}\right\} (78)$$

какъ легко видѣть изъ уравненій (7_1).

Выражая $X_x^{(1)}$, $Y_y^{(1)}$, $Z_z^{(1)}$ черезъ Θ_1, получимъ уравненія аналогичныя (73), стоитъ только замѣнить въ послѣднихъ постоянныя D_i черезъ $E_i (i = 1\,, 2\,, 3)$, C нулемъ, а A и A' соотвѣтственно черезъ $-B'$ и B, т. е. уравненія

$$\left.\begin{aligned} &E_3\int dq + E_1\int xdq + E_2\int ydq = 0\,, \\ &E_3\int xdq + E_1\int x^2dq + E_2\int xydq = \frac{B'}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\,, \\ &E_3\int ydq + E_1\int xydq + E_2\int y^2dq = -\frac{B}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\,, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (79)$$

которыя при системѣ координатъ съ началомъ въ центрѣ тяжести и осями x, y, направленными по главнымъ осямъ инерціи, дадутъ

$$E_3 = 0\,, \quad E_1 = \frac{B'}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\frac{1}{q\lambda^2}\,, \quad E_2 = -\frac{B}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\frac{1}{q\mu^2}\,. \quad . \ (80)$$

Поверхностныя условія, соотвѣтствующія уравненіямъ (77), будутъ

$$\left.\begin{aligned}2\left[k\Theta_1+\frac{\partial U_1}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]\sin\alpha=0\,,\\ \left[\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[k\Theta_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right]\sin\alpha=0\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (81)$$

Опредѣливъ Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1, и V_1 по уравненіямъ (67), (77) при условіяхъ (75) и (81), найдемъ затѣмъ и W_0 изъ уравненія

$$\Delta_2 W_0=\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}-2(k+1)\Theta_1\,,\quad\ldots\ldots\ (14)$$

при условіи на поверхности

$$\left[\frac{\partial W_0}{\partial x}+U_1\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial W_0}{\partial y}+V_1\right]\sin\alpha=0.\quad\ldots\ (19_1)$$

§ 11.

Составимъ теперь выраженія для Θ_i, U_i, V_i $(i>1)$.

Принимая во вниманіе равенства (11), находимъ (на основаніи уравненій (67)),

$$\left.\begin{aligned}&U_2=+D_1\,,\quad U_3=+E_1\,,\ \text{и всякое}\ U_j=0\ \text{при}\ j>3\\ &V_2=+D_2\,,\quad V_3=+E_2\,,\ \text{и всякое}\ V_j=0\ \text{при}\ j>3\\ &W_1=-D_1x-D_2y-D_3\,,\\ &W_2=-E_1x-E_2y-D_3\,,\ \text{а всякое}\ W_j=0\ \text{при}\ j>2.\end{aligned}\right\}\ .\ (82)$$

Такимъ образомъ проекціи перемѣщеній точекъ на координатныя оси будутъ

$$\left.\begin{aligned}u&=U_0+U_1z+U_2\frac{z^2}{2}+U_3\frac{z^3}{3!}\,,\\ v&=V_0+V_1z+V_2\frac{z^2}{2}+V_3\frac{z^3}{3!}\,,\\ w&=W_0+W_1z+W_2\frac{z^2}{2}\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (83)$$

Назовемъ деформацію, при которой всякая прямая параллельная оси z'овъ преобразуется въ алгебраическую кривую какой либо степени, параболической деформацией (ибо деформированная кривая въ этомъ случаѣ необходимо парабола соотвѣтствующей степени). Сопоставляя все сказанное въ предыдущихъ параграфахъ и принявъ во вниманіе выраженія (83), приходимъ прежде всего къ слѣдующему заключенію: *если на боковую поверхность цилиндра и на внутреннія его массы не дѣйствуетъ никакихъ силъ, а къ одному изъ крайнихъ сѣченій приложены силы, проекціи вектора и момента которыхъ на координатныя оси имѣютъ заданныя величины* (A, B, C, A', B', C'), *то никакая параболическая деформація степени выше третьей невозможна.*

Иначе говоря: всякая прямая, въ естественномъ состояніи параллельная оси z'овъ (или образующей цилиндра), не можетъ преобразоваться въ алгебраическую кривую (параболу) выше третьей степени.

Принимая же во вниманіе аналогичную теорему, доказанную Maurice Lévy относительно задачи о равновѣсіи пластинокъ (Clebsch'а), и только что высказанное предложеніе, заключаемъ, что вообще при деформаціяхъ цилиндрическихъ тѣлъ, на массу которыхъ не дѣйствуетъ никакихъ силъ, а 1) къ одному изъ основаній приложены силы даннаго вектора и момента при отсутствіи силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность (условія задачи С. Венана), или 2) на боковую поверхность дѣйствуютъ заданныя силы (въ функціи координатъ) при отсутствіи силъ, дѣйствующихъ на основанія цилиндра (задача Clebsch'а) *невозможно, чтобы какая либо прямая, параллельная оси цилиндра до деформаціи, преобразовалась въ алгебраическую кривую (параболу) порядка выше третьяго.*

Что же касается напряженій $X_x, Y_y \ldots Z_z$, то, на основаніи выраженій (15) и уравненій (67) и (77), заключаемъ, что

$$X_x^{(i)} = Y_y^{(i)} = Z_z^{(i)} = X_y^{(i)} = 0 \text{ при } i > 1$$

и

$$Z_x^{(i)} = Z_y^{(i)} = 0 \text{ при } i > 0\,.$$

Отыскавъ затѣмъ функціи $\Theta_0, U_0 \ldots W_0$ по уравненіямъ (67), (77) и (14) при поверхностныхъ условіяхъ (75), (81) и (19_1), опредѣлимъ въ функціи координатъ и остальныя напряженія.

§ 12.

Такъ какъ уравненія (67) и условія (75) для функцій Θ_0, U_0 и V_0 вполнѣ аналогичны съ такими же уравненіями (77) и условіями (81) для функцій Θ_1, U_1 и V_1, можно остановиться на любыхъ изъ нихъ и, найдя рѣшенія, удовлетворяющія разсматриваемымъ уравненіямъ, по аналогіи непосредственно написать рѣшенія и для вторыхъ съ соотвѣтствующимъ измѣненіемъ буквъ и значковъ. Остановимся на первыхъ изъ нихъ.

Такъ какъ, далѣе, уравненія (67) могутъ быть разсматриваемы, или, лучше сказать, легко приводятся къ уравненіямъ, опредѣляющимъ слагающія перемѣщеній точекъ плоской фигуры въ ея плоскости подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ (опредѣленныхъ) силъ, приложенныхъ къ ея периферіи, то всякія, какимъ бы то ни было путемъ найденныя функціи, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ и соотвѣтствующимъ поверхностнымъ условіямъ, будутъ единственными необходимыми рѣшеніями разсматриваемыхъ уравненій. Не трудно видѣть, что уравненіямъ (67) можно удовлетворить, полагая

$$(2k+1)\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}=-D_1,\quad (2k+1)\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}=-D_2,\quad \Delta_2 U_0=0,\quad \Delta_2 V_0=0. \quad (84)$$

Отсюда

$$\Theta_0=A_1x+A_2y+A_3,$$

гдѣ

$$A_1=-\frac{D_1}{2k+1},\ A_2=-\frac{D_2}{2k+1},\ A_3$$

нѣкоторыя, пока произвольныя, постоянныя.

При этомъ, какъ то слѣдуетъ изъ третьяго уравненія (67),

$$\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}+2k(A_1x+A_2y+A)=0\,, \quad .\ .\ .\ .\ .\ (85)$$

гдѣ A новая произвольная постоянная.

Отсюда, при помощи двухъ послѣднихъ изъ уравненій (84), называя черезъ B произвольную постоянную, находимъ

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}-\frac{\partial U_0}{\partial y}=-2k(A_1y-A_2x-B). \quad .\ .\ .\ .\ .\ (86)$$

Вслѣдствіе этого поверхностныя условія (75) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned}&\left[k(A_1x+A_2y+A_3)+\frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[k(A_2x-A_1y+B)+\frac{\partial U_0}{\partial y}\right]\sin\alpha=0,\\&\left[k(A_1y-A_2x-B)+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[k(A_1x+A_2y+A_3)+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha=0.\end{aligned}\right\}(87)$$

Называя черезъ ψ_1 и ψ_2 двѣ функціи вида

$$\psi_1=k\left[A_1\frac{x^2-y^2}{2}+A_2xy+A_3x+By\right],$$

$$\psi_2=k\left[A_1xy-A_2\frac{x^2-y^2}{2}-Bx+A_3y\right],$$

находимъ, что

$$\frac{\partial(U_0+\psi_1)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial(U_0+\psi_1)}{\partial y}\sin\alpha=0\,,$$

$$\frac{\partial(V_0+\psi_2)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial(V_0+\psi_2)}{\partial y}\sin\alpha=0\,,$$

а такъ какъ очевидно

$$\Delta_2(U_0+\psi_1)=0 \quad \text{и} \quad \Delta_2(V_0+\psi_2)=0\,,$$

то

$$U_0+\psi_1=C_1 \quad \text{и} \quad V_0+\psi_2=C_2\,,$$

гдѣ C_1 и C_2 произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= -k\Big[A_1\frac{x^2-y^2}{2}+A_2xy+A_3x+By\Big]+C_1\,, \\ V_0 &= -k\Big[A_1xy+A_2\frac{y^2-x^2}{2}-Bx+A_3y\Big]+C_2\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (88)$$

Изъ этихъ уравненій, въ связи съ уравненіемъ (85), слѣдуетъ, между прочимъ, что $A=A_3$.

Разсуждая совершенно такъ же относительно функцій Θ_1, U_1 и V_1, получимъ

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= -k\Big[B_1\frac{x^2-y^2}{2}+B_2xy+B_3x+Cy\Big]+H_1\,, \\ V_1 &= -k\Big[B_1xy+B_2\frac{y^2-x^2}{2}-Cx+B_3y\Big]+H_2\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (89)$$

гдѣ $B_i (i=1\,,\,2\,,\,3)$, C, H_1 и H_2 произвольныя постоянныя, причемъ

$$B_1=-\frac{E_1}{2k+1}\,, \quad B_2=-\frac{E_2}{2k+1}\,.$$

Уравненіе же, опредѣляющее функцію W_0, будетъ

$$\Delta_2W_0+2(2k+1)(B_1x+B_2y+B_3)=0\,. \quad \ldots\ldots (90)$$

При этомъ

$X_x^{(i)}=0$, $Y_y^{(i)}=0$ и $X_y^{(i)}=0$ при всякомъ i, начиная отъ нуля,

$Z_z^{(0)}=(3k+1)(A_1x+A_2y+A_3)$, $\quad Z_z^{(1)}=(3k+1)(B_1x+B_2y+B_3)$,

$Z_x^{(0)}$ и $Z_y^{(0)}$ опредѣлятся по формуламъ (16), когда будетъ найдена функція W_0, а $Z_x^{(i)}=0$ и $Z_y^{(i)}=0$ при $i>0$ (какъ замѣчено раньше).

Изъ сказаннаго уже очевидно, что рѣшеніе, получаемое такимъ образомъ, совпадаетъ вполнѣ съ рѣшеніемъ С. Венана *); дальнѣйшаго изслѣдованія по этому производить не будемъ.

Принимая во вниманіе заключенія § 11, можемъ сказать, что *единственное общее рѣшеніе, обнимающее собою всѣ возможные случаи, когда всякая прямая, параллельная оси цилиндровъ, преобразуется въ алгебраическую (параболическую) кривую, есть рѣшеніе С. Венана.*

§ 13.

Предыдущій анализъ, кромѣ этихъ, непосредственно слѣдующихъ, заключеній, приводитъ и къ нѣкоторымъ другимъ, которыя, на мой взглядъ, могутъ имѣть нѣкоторый интересъ.

Прежде всего не трудно замѣтить, что высказанныя въ предыдущихъ параграфахъ сужденія будутъ справедливы и въ томъ случаѣ, когда силы (заданныя) дѣйствуютъ не только на одно изъ крайнихъ сѣченій цилиндрическаго тѣла, а также и на боковую его поверхность при извѣстныхъ, конечно, ограниченіяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что на послѣднюю дѣйствуютъ силы въ плоскостяхъ сѣченій, нормальныхъ къ оси цилиндра, проекціи которыхъ X и Y на координатныя оси суть

$$\left.\begin{aligned} X &= X_0 + X'z\,, \\ Y &= Y_0 + Y'z\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

Очевидно, что при этомъ весь рядъ поверхностныхъ условій до (75) и (81) останется неизмѣннымъ, а послѣднія приведутся къ виду

$$\left.\begin{aligned} 2\left[k\Theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\sin\alpha = X_0\,, \\ \left[\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + 2\left[k\Theta_0 - \frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha = Y_0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (92)$$

и

$$\left.\begin{aligned} 2\left[k\Theta_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right]\sin\alpha = X'\,, \\ \left[\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right]\cos\alpha + 2\left[k\Theta_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right]\sin\alpha = Y'\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (93)$$

*) См. Clebsch, „Theorie d. Elasticität fester Körper". Leipzig. 1862.

Уравненія же (67) и (77), для вывода которыхъ мы не пользовались уравненіями (75) и (81), будутъ имѣть мѣсто и въ разсматриваемомъ случаѣ.

Функціи X_0, Y_0, X' и Y', выражающіяся въ четырехъ функціяхъ U_i, V_i $(i=0\,,\ 1)$, вполнѣ произвольны.

Задача, такимъ образомъ, приводится къ опредѣленію этихъ послѣднихъ четырехъ функцій по уравненіямъ (67) и (77) при условіяхъ (92) и (93), причемъ должны быть удовлетворены еще уравненія (7_1) при $j=0$ и $j=1$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \int Z_z^0\,dq=C\,,\quad \int Z_z^{(1)}dq=0\,,\quad \int xZ_z^{(0)}dq=A\,,\\ \int xZ_z^{(1)}dq=-B'\,,\quad \int yZ_z^{(0)}dq=A'\,,\quad \int yZ_z^{(1)}dq=B\,,\\ \int X_z^{(0)}dq=A\,,\quad \int Y_z^{(0)}dq=B\,,\quad \int (xY_z^{(0)}-yZ_x^{(0)})dq=C'. \end{array}\right\}\cdot (94)$$

При этомъ, конечно, для полученія вполнѣ опредѣленнаго рѣшенія, необходимо удовлетворить общимъ условіямъ, что при $x=y=z=0$

$$\left.\begin{array}{c} u=v=w=0\,,\\ \dfrac{dv}{dx}=0\,,\ \ \dfrac{dw}{dx}=0\,,\ \ \dfrac{dw}{dy}=0\,. \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (95)$$

Такъ какъ (см. предыдущій §) задача приводится въ этомъ случаѣ къ опредѣленію деформацій двухъ плоскихъ пластинокъ въ ихъ плоскости (слагающія перемѣщеній которыхъ по осямъ координатъ соотвѣтственно равны U_0, V_0, U_1 и V_1) подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ кривыхъ ихъ ограничивающихъ, то выраженія черезъ координаты функцій U_i, V_i $(i=0\,,\ 1)$ будутъ содержать (для каждаго значенія i) три произвольныхъ постоянныхъ, изъ которыхъ постоянныя, соотвѣтствующія величинамъ U_0, V_0, обратятся въ нуль въ силу условій (95), а остальныя три, входящія въ выраженія функцій U_1 и V_1, и постоянныя D_i, E_i $(i=1\,,\ 2\,,\ 3)$ опредѣлятся по уравненіямъ (94) (ибо W_0 выражается при помощи U_1 и V_1).

Слагающія перемѣщеній u, v и w по прежнему будутъ цѣлыми функціями отъ z не выше третьей степени (выраж. (83)), а слѣдовательно можемъ сказать, что *если на одно изъ крайнихъ сѣченій цилиндрическаго тѣла дѣйствуютъ силы даннаго вектора и момента (ихъ проекціями на координатныя оси), а на боковую поверхность силы, лежащія въ плоскостяхъ сѣченій, перпендикулярныхъ къ образующимъ цилиндра, проекціи которыхъ на оси координатъ суть*

$$X=X_0+X'z\,,\quad Y=Y_0+Y'z\,,$$

то всякая прямая, параллельная оси цилиндра, не можетъ деформироваться въ алгебраическую (параболическую) кривую порядка выше третьяго. Иначе говоря, при разсматриваемыхъ условіяхъ не можетъ быть параболической деформаціи выше деформаціи третьяго порядка, и рѣшеніе ей соотвѣтствующее найдется рѣшеніемъ уравненій (67) и (77) при условіяхъ (92), (93), (94) и (95).

§ 14.

Рѣшимъ эту задачу сначала для простѣйшаго случая, когда сила, дѣйствующая на боковую поверхность, нормальна къ ней и равна $C_0 + C_1 z$, гдѣ C_0 и C_1 нѣкоторыя (данныя) постоянныя, т. е. представляетъ собою силу давленія (или растяженія), возрастающую пропорціонально растоянію сѣченій отъ основанія цилиндра.

Равенства (92) и (93) въ такомъ случаѣ принимаютъ, вообще говоря, видъ

$$\left.\begin{aligned} &\left[2\left(k\Theta_i + \frac{\partial U_i}{\partial x}\right) - C_i\right]\cos\alpha + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x}\right)\sin\alpha = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[2\left(k\Theta_i + \frac{\partial V_i}{\partial y}\right) - C_i\right]\sin\alpha = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (96)$$

при $i = 0\,,\ 1$.

Уравненіямъ (67), подобно предыдущему, можно удовлетворить, полагая

$$\Delta_2 U_0 = 0\,, \quad \Delta_2 V_0 = 0\,, \quad \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} = A_1\,, \quad \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} = A_2\,, \quad . \ . \ . \ (97)$$

гдѣ

$$A_1 = -\frac{D_1}{2k+1}\,, \quad A_2 = -\frac{D_2}{2k+1}\,,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_0 = A_1 x + A_2 y + A_3\,, \\ &\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + 2k(A_1 x + A_2 y + A) = 0\,. \\ &\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial U_0}{\partial y} = -2k(A_1 y - A_2 x - B)\,. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (98)$$

Условія (96) приэтомъ представятся въ видѣ (для $i = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial U_0}{\partial x} + k(A_1 x + A_2 y + A_3')\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial U_0}{\partial y} - k(A_1 y - A_2 x - B)\right]\sin\alpha = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial V_0}{\partial x} + k(A_1 y - A_2 x - B)\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial V_0}{\partial y} + k(A_1 x + A_2 y + A_3')\right]\sin\alpha = 0\,, \end{aligned}\right\} (99)$$

ничѣмъ существенно не отличающемся отъ вида условій (97), причемъ

$$kA_3' = \left(kA_3 - \frac{C_0}{2}\right)$$

и A_3 произвольная постоянная.

Вводя, затѣмъ функціи ψ_1 и ψ_2:

$$\psi_1 = k[A_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + A_2 xy + A_3' x + By],$$

$$\psi_2 = k[A_1 xy - A_2 \frac{x^2 - y^2}{2} - Bx + A_3' y],$$

найдемъ, что

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= -k[A_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + A_2 xy + A_3' x + By] + F_1, \\ V_0 &= -k[A_1 xy + A_2 \frac{y^2 - x^2}{2} - Bx + A_3' y] + F_2, \end{aligned}\right\} . \quad (100)$$

и точно также

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= B_1 x + B_2 y + B_3, \\ U_1 &= -k[B_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + B_2 xy + B_3' x + Cy] + H_1, \\ V_1 &= -k[B_1 xy + B_2 \frac{y^2 - x^2}{2} - Cx + B_3' y] + H_2, \end{aligned}\right\} . \quad (101)$$

гдѣ C, F_1, F_2, H_1, H_2 и B_3 произвольныя постоянныя, а

$$kB_3' = \left(kB_3 - \frac{C_1}{2}\right),$$

при помощи же третьяго изъ уравненій (77) находимъ, что

$$B_1 = -\frac{E_1}{2k+1}, \quad B_2 = -\frac{E_2}{2k+1}, \quad B_3(2k+1) = C_1 + E_3 = 0.$$

Функція W_0 удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta_2 W_0 = -2(2k+1)(B_1 x + B_2 y) - 2(2k+1) B_3 + C_1,$$

или

$$\Delta_2 W_0 = -2(2k+1)[B_1 x + B_2 y + B_3 - C_1'],$$

гдѣ

$$C_1' = \frac{C_1}{2(2k+1)}.$$

Полагая затѣмъ

$$W_0=\Omega-(2k+1)\left[\frac{B_3-C_1'}{2}(x^2+y^2)+B_1xy^2+B_2yx^2\right]+C-H_1x-H_2y,$$

приводимъ окончательное рѣшеніе вопроса къ отысканію функціи Ω, удовлетворяющей уравненію

$$\Delta_2\Omega=0$$

при поверхностномъ условіи

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\sin\alpha=B_1\left\{\left[\frac{(3k+2)y^2+kx^2}{2}\right]\cos\alpha+(5k+2)xy\sin\alpha\right\}+$$
$$+B_2\left[(5k+2)xy\cos\alpha+\frac{(3k+2)x^2+ky^2}{2}\sin\alpha\right]+$$
$$+\left[(2k+1)(B_3-C_1')+kB_3'\right]\left[x\cos\alpha+y\sin\alpha\right]+\left[kC(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\right],$$

откуда заключаемъ, что

$$(2k+1)(B_3-C_3')+kB_3'=0,\quad \text{т. е. } B_3=\frac{C_1}{3k+1}.$$

Составляя затѣмъ выраженія для u, v и w и удовлетворяя необходимымъ условіямъ опредѣленности задачи равновѣсія цилиндрическаго тѣла, находимъ

$$B=0,\quad F_1=0,\quad F_2=0,\quad C=0,\quad H_1=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_0,\quad H_2=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_0^{*)},$$

и величины u, v и w представятся въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}
u=&-k\left[A_1\frac{x^2-y^2}{2}+A_2xy+A_3'x\right]-k\left[B_1\frac{x^2-y^2}{2}+B_2xy+Cy\right]z+\\
&+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_0 z-(2k+1)A_1\frac{z^2}{2}-(2k+1)\frac{B_1}{6}z^3+C_1\frac{k+1}{2(3k+1)}xz,\\
v=&-k\left[A_1xy+A_2\frac{y^2-x^2}{2}+A_3'y\right]-k\left[B_1xy+B_2\frac{y^2-x^2}{2}-Cx\right]z+\\
&+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_0 z-(2k+1)A_2\frac{z^2}{2}-(2k+1)\frac{B_2}{6}z^3+C_1\frac{k+1}{2(3k+1)}yz,
\end{aligned}\right\}\quad(102)$$

*) Скобки со значкомъ o внизу въ послѣднихъ двухъ равенствахъ обозначаютъ значеніе частныхъ производныхъ по x и y функціи Ω при $x=y=0$.

$$\left.\begin{aligned}w=\Omega-\frac{k+1}{4(3k+1)}C_1(x^2+y^2)-B_1(2k+1)xy^2-B_2(2k+1)yx^2-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_0 x-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_0 y+\\+(2k+1)(A_1x+A_2y+A_3)z-C_0z+(2k+1)[B_1x+B_2y]\frac{z^2}{2}-\frac{kC_1}{3k+1}\frac{z^2}{2}.\end{aligned}\right\}(102)$$

Формулы эти, точно также какъ и соотвѣтствующія выраженія u, v и w въ рѣшеніи задачи С. Венана, содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ A_1, A_2, A_3, B_1, B_3 и C. Всѣ онѣ опредѣлятся, какъ нетрудно убѣдиться, по уравненіямъ (7_1) независимо отъ постоянныхъ C_0 и C_1 черезъ A, B, C и A', B', C'. Деформаціи гнутія, крученія и растяженія сопровождаются въ разсматриваемомъ случаѣ особой деформаціей, которую получимъ, положивъ всѣ постоянныя A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 и C равными нулю, при которой, слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{C_0}{2}x+\frac{C_1(k+1)}{2(3k+1)}xz,\\ v&=\frac{C_0}{2}y+\frac{C_1}{2}\frac{(k+1)}{(3k+1)}yz,\\ w&=-C_0z-\frac{kC_1}{3k+1}\frac{z^2}{2}-\frac{k+1}{3k+1}\frac{C_1}{4}(x^2+y^2).\end{aligned}\right\}.\ (103)$$

Если будемъ разсматривать z какъ время и заставимъ цилиндръ вращаться равномѣрно ускоренно (въ положительномъ или отрицательномъ направленіи, смотря по общему знаку постоянныхъ C_0 и C_1, если знаки ихъ одинаковы), или равномѣрно замедленно (если знаки ихъ различны), то въ каждый моментъ времени прямая, перпендикулярная къ скорости какой-либо точки и по величинѣ равная ей, представитъ проекцію перемѣщенія этой точки на плоскость xoy для высоты z, соотвѣтствующей разсматриваемому моменту времени. Всякая прямая, параллельная оси цилиндра, остается прямой, а образующія нѣкотораго круговаго цилиндра

$$x^2+y^2=a^2$$

преобразуются въ прямолинейныя образующія гиперболоида (однополаго) вращенія, уравненіе котораго

$$\xi^2+\eta^2=a^2\left[1+\frac{C_0}{2}+\frac{C_1(k+1)}{2(3k+1)}\zeta\right]^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ (104)$$

въ чемъ легко убѣдиться, подставляя вмѣсто x и y въ предыдущее уравненіе ихъ выраженія черезъ ξ, η и ζ, получаемыя изъ равенствъ

$$\xi=x+u',\quad \eta=y+v',$$

гдѣ ξ, η, ζ координаты точки x, y, z послѣ деформаціи, а u' и v' имѣютъ значеніе, указанное въ § 1.

Всякое сѣченіе $z = \text{const.}$ деформируется въ поверхность втораго порядка, уравненіе которой

$$\zeta = z - C_0 z - \frac{kC_1}{2(3k+1)}\frac{z^2}{2} + \frac{k+1}{3k+1}\frac{C_1}{4}(\xi^2 + \eta^2), \; . \; . \; (105)$$

т. е. въ параболоидъ вращенія, ось котораго параллельна оси z'овъ. Замѣтимъ еще, что если черезъ u_1, v_1 и w_1 назовемъ проекціи на оси координатъ перемѣщеній, соотвѣтствующихъ деформаціи подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ концу цилиндра, при отсутствіи силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность, а черезъ u_2, v_2 и w_2 тѣ же величины для деформаціи, обусловленной силой давленія $(C_0 + C_1 z)$, дѣйствующей на боковую поверхность при отсутствіи силъ, дѣйствующихъ на основанія, то u, v и w, полученныя при рѣшеніи разсматриваемой задачи, представляющей соединеніе первыхъ двухъ, равны суммѣ соотвѣтственныхъ величинъ въ послѣднихъ, такъ что

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2 .$$

Не останавливаясь подробнѣе на этомъ частномъ случаѣ, перейдемъ къ рѣшенію болѣе общей задачи, предполагая X_0, X', Y_0 и Y' произвольными функціями координатъ, а основаніе цилиндра кругомъ радіуса a (простѣйшій случай).

§ 15.

Въ § 12 было упомянуто, что уравненія (67) (а также и (77)) могутъ быть приведены къ уравненіямъ, опредѣляющимъ проекціи на координатныя оси перемѣщеній точекъ плоской фигуры при деформаціи ея подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ, приложенныхъ къ периферіи, ея ограничивающей, и лежащихъ въ ея плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ вмѣсто функцій Θ_0, U_0, V_0 (чтобы остановиться на чемъ нибудь опредѣленномъ, я буду разсматривать, подобно предыдущему, только уравненія (67), ибо уравненія (77) ничѣмъ по существу не отличаются отъ первыхъ) три другія Θ'_0, U'_0, V'_0, связанныя съ первыми соотношеніями вида

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0 &= \Theta'_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3, \\ U_0 &= U'_0 + \frac{\beta_1}{4}(x^2 + y^2), \\ V_0 &= V'_0 + \frac{\beta_2}{4}(x^2 + y^2), \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (106)$$

гдѣ $\alpha_i \, (i = 1, 2, 3)$, $\beta_i \, (i = 1, 2)$ нѣкоторыя постоянныя.

Опредѣливъ эти постоянныя при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1 = 2(\alpha_1 + D_1)\,, \quad (2k+1)\alpha_1 + \beta_1 + D_1 = 0\,, \\ &\beta_2 = 2(\alpha_2 + D_2)\,, \quad (2k+1)\alpha_2 + \beta_2 + D_2 = 0\,, \\ &\qquad\qquad \alpha_3 + D_3 = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (107)$$

приводимъ уравненія (67) къ слѣдующимъ.

$$\left.\begin{aligned} &(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} + \Delta_2 U_0' = 0\,, \\ &(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial y} + \Delta_2 V_0' = 0\,, \\ &\Theta_0' = \frac{\partial U_0'}{\partial x} + \frac{\partial V_0'}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (108)$$

Рѣшеніемъ этой системы дифференціальныхъ уравненій при поверхностныхъ условіяхъ

$$\left.\begin{aligned} &2\left[k\Theta_0' + \frac{\partial U_0'}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial U_0'}{\partial y} + \frac{\partial V_0'}{\partial x}\right]\sin\alpha = X_1\,, \\ &\left[\frac{\partial U_0'}{\partial y} + \frac{\partial V_0'}{\partial x}\right]\cos\alpha + 2\left[k\Theta_0' + \frac{\partial V_0'}{\partial y}\right]\sin\alpha = X_2\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (109)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \left[\frac{kD_1}{2k+3}\,x + \frac{3kD_2}{2k+3}\,y + kD_3\right]\cos\alpha - \left[\frac{2kD_2}{2k+3}\,x + \frac{2kD_1}{2k+3}\,y\right]\sin\alpha + X_0\,, \\ X_2 &= -\left[\frac{2kD_2}{2k+3}\,x + \frac{2kD_1}{2k+3}\,y\right]\cos\alpha + \left[\frac{3kD_1}{2k+3}\,x + \frac{kD_2}{2k+3}\,y + kD_3\right]\sin\alpha + Y_0\,, \end{aligned}\right\} (110)$$

а X_0 и Y_0 заданныя функціи координатъ (см. § 13), опредѣлимъ функціи Θ_0', U_0', V_0', а по формуламъ (106) и искомыя Θ_0, U_0 и V_0.

Тоже самое должно, конечно, сказать и о функціяхъ Θ_1, U_1 и V_1.

Такимъ образомъ рѣшеніе вопроса приводится къ интегрированію двухъ уравненій въ частныхъ производныхъ вида

$$\left.\begin{aligned} &2(k+1)\frac{\partial^2 U_0'}{\partial y^2} + (2k+1)\frac{\partial^2 V_0'}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 U_0'}{\partial y^2} = 0\,, \\ &2(k+1)\frac{\partial^2 V_0'}{\partial y^2} + (2k+1)\frac{\partial^2 U_0'}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V_0'}{\partial x^2} = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (111)$$

при условіяхъ (109). Введя новую постоянную μ вмѣсто k, связанную съ послѣдней соотношеніемъ $\frac{1}{1+k}=1-\mu$, получимъ

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 U_0'}{\partial x^2}+(1+\mu)\frac{\partial^2 V_0'}{\partial x\partial y}+(1-\mu)\frac{\partial^2 U_0'}{\partial y^2}=0\,, \\ 2\frac{\partial^2 V_0'}{\partial y^2}+(1+\mu)\frac{\partial^2 U_0'}{\partial x\partial y}+(1-\mu)\frac{\partial^2 V_0'}{\partial x^2}=0\,, \end{aligned}\right\}\quad\ldots(111_1)$$

уравненія, тождественныя съ уравненіями, опредѣляющими деформацію упругой пластинки въ задачѣ Clebsch'а (см. его „Theorie d. Elasticität" ст. 166 etc).

Положивъ далѣе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}=\xi\,, \quad \frac{\partial U_0'}{\partial y}-\frac{\partial V_0'}{\partial x}=\eta\,, \\ \frac{\partial U_0'}{\partial x}-\frac{\partial V_0'}{\partial y}=\xi', \quad \frac{\partial U_0'}{\partial y}+\frac{\partial V_0'}{\partial x}=\eta', \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(112)$$

и введя полярную систему координатъ съ полюсомъ въ центрѣ разсматриваемаго круга, служащаго основаніемъ цилиндру, приведемъ условія (109) къ виду

$$\left.\begin{aligned} (1-\mu)X_1=[(1+\mu)\xi+(1-\mu)\xi']\cos\vartheta+(1-\mu)\eta'\sin\vartheta\,, \\ (1-\mu)X_2=(1-\mu)\eta'\cos\vartheta+[(1+\mu)\xi-(1-\mu)\xi']\sin\vartheta\,. \end{aligned}\right\}.\ (113)$$

Выраженія эти аналогичны таковымъ же въ вышеупомянутой задачѣ Clebsch'а и отличаются отъ послѣднихъ лишь тѣмъ, что не содержатъ членовъ съ h^2 (h высота упругой пластинки). Поэтому мы можемъ прямо воспользоваться рѣшеніемъ Clebsch'а съ соотвѣтственными измѣненіями.

Такимъ образомъ заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned} \xi=\frac{1}{2}\left[\sum_0^\infty A_k r^k\cos k\vartheta+\sum_0^\infty B_k r^k\sin k\vartheta\right], \\ \eta=\frac{1}{(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty B_k r^k\cos k\vartheta-\sum_0^\infty A_k r^k\sin k\vartheta\right], \end{aligned}\right\}\quad\ldots(114)$$

гдѣ A_k и B_k нѣкоторыя постоянныя, выражающіяся опредѣленнымъ образомъ черезъ функціи X_1 и X_2 (выраженія ихъ мы дадимъ нѣсколько позже).

*

Далѣе

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= \varrho\cos 2\vartheta + \sigma\sin 2\vartheta + \sum_0^\infty C_k r^k \cos k\vartheta + \sum_0^\infty D_k r^k \sin k\vartheta\,,\\ \eta' &= \varrho\sin 2\vartheta - \sigma\cos 2\vartheta + \sum_0^\infty D_k r^k \cos k\vartheta - \sum_0^\infty C_k r^k \sin k\vartheta\,,\end{aligned}\right\} \quad (115)$$

гдѣ C_k, D_k ($k = 0, 1 \ldots \infty$) постоянныя, а

$$\left.\begin{aligned}\varrho &= -\frac{(1+\mu)}{4(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty kB_k r^k \sin k\vartheta + \sum_0^\infty kA_k r^k \cos k\vartheta\right],\\ \sigma &= -\frac{(1+\mu)}{4(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty kA_k r^k \sin k\vartheta - \sum_0^\infty kB_k r^k \cos k\vartheta\right].\end{aligned}\right\} \quad (116)$$

Равенства (113) затѣмъ, при посредствѣ выраженій (114), (115) и (116), дадутъ

$$\begin{aligned}(1-\mu)[X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta] &= \frac{(1+\mu)}{2}\left[\sum_0^\infty A_k a^k \cos k\vartheta + \sum_0^\infty B_k a^k \sin k\vartheta\right] -\\ &\quad - \frac{1+\mu}{4}\left[\sum_0^\infty kA_k a^k \cos k\vartheta + \sum_0^\infty kB_k a^k \sin k\vartheta\right] +\\ &\quad + (1-\mu)\left[\sum_2^\infty C_{k-2} a^{k-2} \cos k\vartheta + \sum_2^\infty D_{k-2} a^{k-2} \sin k\vartheta\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-\mu)[X_2\cos\vartheta - X_1\sin\vartheta] &= \frac{(1+\mu)}{4}\left[\sum_0^\infty kA_k a^k \sin k\vartheta - \sum_0^\infty kB_k a^k \cos k\vartheta\right] +\\ &\quad + (1-\mu)\left[\sum_2^\infty D_{k-2} a^{k-2} \cos k\vartheta - \sum_2^\infty C_{k-2} a^{k-2} \sin k\vartheta\right],\end{aligned}$$

откуда прежде всего находимъ, что

$$\left.\begin{aligned}A_0 &= \frac{1-\mu}{(1+\mu)\pi}\int_0^{2\pi}(X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta)\,d\vartheta\,,\\ A_1 &= \frac{4(1-\mu)}{a\pi(1+\mu)}\int_0^{2\pi}(X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta\,,\\ B_1 &= \frac{4(1-\mu)}{a\pi(1+\mu)}\int_0^{2\pi}(X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,,\end{aligned}\right\} \quad . \; . (117)$$

и затѣмъ для всякаго $k > 1$

$$(1-\mu)\int_0^{2\pi}(X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= -\pi\frac{(1+\mu)(k-2)}{4}a^k A_k + (1-\mu)\pi C_{k-2}a^{k-2},$$

$$(1-\mu)\int_0^{2\pi}(X_2\cos\vartheta - X_1\sin\vartheta)\sin k\vartheta\, d\vartheta = \pi\frac{1+\mu}{4}ka^k A_k - (1-\mu)\pi C_{k-2}a^{k-2},$$

$$(1-\mu)\int_0^{2\pi}(X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta)\sin k\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= -\pi\frac{(1+\mu)(k-2)}{4}a^k B_k + (1-\mu)\pi a^{k-2}D_{k-2},$$

$$(1-\mu)\int_0^{2\pi}(X_2\cos\vartheta + X_1\sin\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= -\pi\frac{1+\mu}{4}ka^k B_k + (1-\mu)\pi a^{k-2}D_{k-2}.$$

Рѣшая первыя два изъ этихъ уравненій относительно A_k и C_{k-2}, а послѣднія два относительно B_k и D_{k-2} и замѣнивъ въ выраженіяхъ C_{k-2}, D_{k-2} значекъ $k-2$ черезъ k, получимъ для всякаго k

$$\left.\begin{aligned}
A_k &= \frac{2(1-\mu)}{(1+\mu)a^k\pi}\int_0^{2\pi}[X_1\cos(k+1)\vartheta + X_2\sin(k+1)\vartheta]d\vartheta, \\
B_k &= \frac{2(1-\mu)}{(1+\mu)a^k\pi}\int_0^{2\pi}[X_1\sin(k+1)\vartheta - X_2\cos(k+1)\vartheta]d\vartheta.
\end{aligned}\right\} \quad (118)$$

$$\left.\begin{aligned}
C_k &= \frac{k+2}{2\pi a^k}\int_0^{2\pi}[X_1\cos(k+3)\vartheta + X_2\sin(k+3)\vartheta]d\vartheta - \\
&\quad -\frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi}[X_2\cos\vartheta - X_1\sin\vartheta]\sin(k+2)\vartheta\, d\vartheta, \\
D_k &= \frac{k+2}{2\pi a^k}\int_0^{2\pi}[X_1\sin(k+3)\vartheta - X_2\cos(k+3)\vartheta]d\vartheta + \\
&\quad +\frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi}[X_2\cos\vartheta - X_1\sin\vartheta]\cos(k+2)\vartheta\, d\vartheta.
\end{aligned}\right\} . \quad (119)$$

Итакъ, всѣ постоянныя выражаются черезъ функціи X_1 и X_2, содержащія три произвольныхъ постоянныхъ D_i $(i=1, 2, 3)$.

Такъ какъ далѣе

$$dU_0' = \frac{\xi + \xi'}{2}\,dx + \frac{\eta + \eta'}{2}\,dy\,,$$

$$dV_0' = -\frac{\eta - \eta'}{2}\,dx + \frac{\xi - \xi'}{2}\,dy\,,$$

а ξ, ξ', η и η' найдены въ функціи r и ϑ, найдемъ U_0' и V_0' въ функціи этихъ-же перемѣнныхъ, а именно

$$\left.\begin{aligned}
U_0' = {} & \mathrm{M}_1 + \frac{(3-\mu)}{8(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{k+1} A_k r^{k-1}\cos(k+1)\vartheta + \sum_0^\infty \frac{1}{k+1} B_k r^{k-1}\sin(k+1)\vartheta\right] - \\
& - \frac{(1+\mu)}{8(1-\mu)}\left[r(A_0\cos\vartheta - B_0\sin\vartheta) + A_1 r^2 + \sum_0^\infty r^{k+3} A_{k+2}\cos(k+1)\vartheta + \right. \\
& \qquad\qquad \left. + \sum_0^\infty r^{k+3} B_{k+2}\sin(k+1)\vartheta\right] + \\
& + \frac{1}{2}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{k+1} C_k r^{k+1}\cos(k+1)\vartheta + \sum_0^\infty \frac{1}{(k+1)} D_k r^{k+1}\sin(k+1)\vartheta\right], \\
V_0' = {} & \mathrm{M}_2 + \frac{3-\mu}{8(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{k+1} A_k r^{k+1}\sin(k+1)\vartheta - \sum_0^\infty \frac{1}{k+1} B_k r^{k+1}\cos(k+1)\vartheta\right] - \\
& - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}\left[r(A_0\sin\vartheta + B_0\cos\vartheta) - B_1 r^2 + \sum_0^\infty r^{k+3} A_{k+2}\sin(k+1)\vartheta - \right. \\
& \qquad\qquad \left. - \sum_0^\infty r^{k+3} B_{k+2}\cos(k+1)\vartheta\right] + \\
& + \frac{1}{2}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{(k+1)} C_k r^{k+1}\sin(k+1)\vartheta - \sum_0^\infty \frac{1}{k+1} D_k r^{k+1}\cos(k+1)\vartheta\right].
\end{aligned}\right\}. \quad (120)$$

Эти выраженія содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ M_1, M_2, B_0 и D_i $(i = 1, 2, 3)$. Не трудно убѣдиться далѣе, на основаніи выраженій (110), (117), (118) и (119), что

$$A_0 = L_0' D_3 + N_0\,,$$
$$A_1 = L_1' D_1 + N_1\,,$$
$$B_1 = L_2' D_2 + N_2\,,\ ^{*})$$

а остальныя постоянныя A_k и B_k $(k > 1)$ и C_k, D_k (при всякомъ k) не зависятъ отъ постоянныхъ D_i $(i = 1, 2, 3)$, такъ что, обозначивъ че-

*) Смыслъ обозначеній L_i', N_i' $(i = 0, 1, 2)$ понятенъ самъ собой.

резъ S_1 и S_2 части, не зависящія отъ послѣднихъ въ выраженіяхъ (120), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} U_0' &= M_1 + L_0 D_3 r\cos\vartheta + L_1 D_1 r^2 \cos 2\vartheta + L_2 D_2 r^2 \sin 2\vartheta + \\ &\quad + L_3 D_1 r^2 + S_1\,, \\ V_0' &= M_2 + L_0 D_3 r\sin\vartheta + L_1 D_1 r^2 \sin 2\vartheta - L_2 D_2 r^2 \cos 2\vartheta - \\ &\quad - L_3 D_2 r^2 + S_2\,, \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

гдѣ L_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ нѣкоторыя (вполнѣ опредѣленныя) постоянныя.

Все сказанное относительно функцій Θ_0, U_0 и V_0 относится отъ слова до слова и къ функціямъ Θ_1, U_1 и V_1, стоитъ только замѣнить въ предыдущихъ формулахъ значекъ 0 на 1, постоянныя D_i черезъ E_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, а постоянныя M_i $(i = 1,\ 2)$, A_k, B_k, C_k, D_k соотвѣтственно черезъ M_i' $(i = 1,\ 2)$, A_k', B_k', C_k', D_k' $(k = 0,\ 1 \ldots \infty)$, выражающіяся черезъ функціи X' и Y' также какъ первыя черезъ X_0 и Y_0.

Такимъ образомъ заключаемъ непосредственно, что

$$\left.\begin{aligned} U_1' &= M_1' + L_0' E_3 r\cos\vartheta + L_1' E_1 r^2 \cos 2\vartheta + L_2' E_2 r^2 \sin 2\vartheta + L_3' E_1 r^2 + S_1'\,, \\ V_1' &= M_2' + L_0' E_3 r\sin\vartheta + L_1' E_1 r^2 \sin 2\vartheta - L_2' E_2 r^2 \cos 2\vartheta - L_3' E_2 r^2 + S_2'\,, \end{aligned}\right\} (122)$$

гдѣ M_i', L_i', *) E_i постоянныя, а S_1' и S_2' функціи, соотвѣтствующія S_1 и S_2 въ равенствахъ (121). По этимъ формуламъ найдемъ U_0, V_0, U_1 и V_1. Остается опредѣлить функцію W_0, удовлетворяющую уравненію

$$\Delta_2 W_0 = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial U_1'}{\partial x} + \frac{\partial V_1'}{\partial y}\right] + \frac{2}{1+\mu}\left[E_1' x + E_2' y + E_3\right], \quad (123)$$

къ которому легко приводится уравненіе (14) при помощи третьяго изъ уравненій (77), если замѣнимъ при этомъ постоянную k ея выраженіемъ черезъ μ; здѣсь E_1' и E_2' постоянныя, пропорціональныя E_1 и E_2.

Полагая далѣе

$$W_0 = \Omega + \frac{1}{1-\mu}\left[E_3 \frac{x^2 + y^2}{2} + E_1' x y^2 + E_2' y x^2\right], \ . \ . \ . \ (124)$$

находимъ

$$\Delta_2 \Omega = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial U_1'}{\partial x} + \frac{\partial V_1'}{\partial y}\right].$$

---

*) Постоянныя, обозначенныя здѣсь черезъ L_i', отличны отъ постоянныхъ L_i' $(i = 0,\ 1,\ 2)$ послѣднихъ формулъ предыд. стр.

Преобразуя это уравненіе къ полярнымъ координатамъ, получаемъ

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \vartheta^2} = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\xi_1, \quad \ldots\ldots (125)$$

гдѣ ξ_1 соотвѣтствуетъ ξ въ предыдущихъ сужденіяхъ, такъ что

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \vartheta^2} = -\sum_0^\infty (A_k'' r^k \cos k\vartheta + B_k'' r^k \sin k\vartheta), \quad (125_1)$$

причемъ положено для сокращенія

$$A_k'' = \frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu} A_k', \quad B_k'' = \frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu} B_k'.$$

Частнымъ рѣшеніемъ этого уравненія, какъ легко замѣтить, будетъ функція

$$\Omega_1 = \sum_0^\infty P_k r^{k+2} \cos k\vartheta + Q_k r^{k+2} \sin k\vartheta. \quad \ldots\ldots (126)$$

Составляя въ самомъ дѣлѣ уравненіе (125_1), находимъ

$$\sum_0^\infty \{[4(k+1)P_k + A_k'']r^k \cos k\vartheta + [4(k+1)Q_k + B_k'']r^k \sin k\vartheta\} = 0,$$

и слѣдовательно

$$P_k = -\frac{A_k''}{4(k+1)} \quad \text{и} \quad Q_k = -\frac{B_k''}{4(k+1)}.$$

Общее его рѣшеніе представится въ видѣ суммы двухъ функцій Ω и Ω_2, изъ которыхъ послѣдняя должна удовлетворять уравненію

$$\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \vartheta^2} = 0. \quad \ldots\ldots (127)$$

Положимъ

$$\Omega_2 = \sum_0^\infty (R_k \cos k\vartheta + S_k \sin k\vartheta),$$

гдѣ R_k и S_k нѣкоторыя функціи r. Подставивъ это значеніе Ω_2 въ предыдущее уравненіе, получимъ слѣдующія уравненія для опредѣленія функцій R_k и S_k

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_k}{\partial r} - \frac{k^2 R_k}{r^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 S_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S_k}{\partial r} - \frac{k^2 S_k}{r^2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (128)$$

Этимъ уравненіямъ можно удовлетворить, полагая

$$R_k = R'_k r^k + \frac{R''_k}{r^k}$$

$$S_k = S'_k r^k + \frac{S''_k}{r^k}$$

гдѣ R'_k, S'_k, R''_k, S''_k произвольныя постоянныя.

Предполагая W_0 (а слѣдовательно и Ω) непрерывною функціей внутри разсматриваемаго сѣченія цилиндра, необходимо положить

$$R''_k = 0 \quad \text{и} \quad S''_k = 0\,.$$

Такимъ образомъ

$$\Omega_2 = \sum_0^\infty (R'_k r^k \cos k\vartheta + S'_k r^k \sin k\vartheta)\,,$$

и наконецъ

$$\Omega = \sum_0^\infty \{r^k[R'_k + P_k r^2]\cos k\vartheta + r^k[S'_k + Q_k r^2]\sin k\vartheta\}\,. \quad . \quad . \quad (129)$$

При этомъ равенство (19_1) даетъ

$$\frac{\partial W_0}{\partial r} = -[U_1 \cos\vartheta + V_1 \sin\vartheta]\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial W_0}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{(1+\mu)}[E_3 r + 3E'_1 r^2 \cos\vartheta \sin^2\vartheta + 3E'_2 r^2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta]\,,$$

то

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{1}{1-\mu}\left[E_3 r + 3E'_k r^2 \cos\vartheta \sin^2\vartheta + 3E'_2 r^2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta\right] = \\ &= -\left[\frac{\mu E'_1}{3-\mu} r^2 \cos\vartheta + \frac{\mu E'_2}{3-\mu} r^2 \sin\vartheta\right] - \left[U'_1 \cos\vartheta + V'_1 \sin\vartheta\right]. \end{aligned}\right\} (131)$$

Выраженія, опредѣляющія U'_1 и V'_1 въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по sinus'амъ и cosinus'амъ кратныхъ дугъ, получатся, какъ было замѣчено выше, непосредственно изъ (120), стоитъ только замѣнить въ нихъ значекъ 0 значкомъ 1 при функціяхъ U' и V', а вмѣсто постоянныхъ M_i ($i = 1\,,\ 2$), A_k, B_k, C_k, D_k ввести аналогичныя имъ M'_i ($i = 1,\ 2$) A'_k, B'_k, C'_k, D'_k ($k = 0\,,\ 1..\infty$).

На основаніи этого, пользуясь съ указанными измѣненіями вышеупомянутыми равенствами, находимъ

$$[U_1'\cos\vartheta + V_1'\sin\vartheta] = M_1'\cos\vartheta + M_2'\sin\vartheta +$$

$$+\frac{3-\mu}{8(1-\mu)}\left\{\sum_0^\infty\left(\frac{1}{k+1}A_k'r^{k+1}\cos k\vartheta + \frac{1}{k+1}B_2'r^{k+1}\sin k\vartheta\right)\right\} -$$

$$-\frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_0'r - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty\left(A_{k+2}'r^{k+3}\cos k\vartheta + B_{k+2}'r^{k+3}\sin k\vartheta\right)\right] -$$

$$-\frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_1r^2\cos\vartheta + \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}B_1r^2\sin\vartheta +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_0^\infty\left(\frac{1}{k+1}C_k'r^{k+1}\cos k\vartheta + \frac{1}{k+1}D_k'r^{k+1}\sin k\vartheta\right),$$

а положивъ для сокращенія

$$L_k' = \frac{3-\mu}{8(1-\mu)}\,\frac{1}{k+1}A_k'r^{k+1} - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_{k+2}'r^{k+3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{k+1}C_k'r^{k+1},$$

$$M_k' = \frac{3-\mu}{8(1-\mu)}\,\frac{1}{k+1}B_k'r^{k+1} - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}B_{k+2}'r^{k+3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{k+1}D_k'r^{k+1},$$

имѣемъ

$$[U_1'\cos\vartheta + V_1'\sin\vartheta] = -\frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_0'r + (M_k' - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_1r^2)\cos\vartheta +$$

$$+(M_2' + \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}B_1r^2)\sin\vartheta + \sum_0^\infty(L_k'\cos k\vartheta + M_k'\sin k\vartheta).$$

Замѣтивъ, что кромѣ того

$$[E_3r + 3E_1'r^2\cos\vartheta\sin^2\vartheta + 3E_2'r^2\sin\vartheta\cos^2\vartheta] =$$

$$= E_3r + \frac{3E_1'r^2}{4}[\cos\vartheta - \cos 3\vartheta] + \frac{3E_2'r^2}{4}(\sin\vartheta + \sin 3\vartheta),$$

подставивъ эти послѣднія выраженія въ (131) и собирая члены съ sinus'ами и cosinus'ами одинаковой кратности дугъ, получаемъ

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = F_0 + F_1\cos\vartheta + H_1\sin\vartheta + F_3\cos 3\vartheta + H_3\sin 3\vartheta + \sum_0^\infty(L_k'\cos k\vartheta + M_k'\sin k\vartheta),$$

гдѣ

$$F_0 = \left[-\frac{E_3}{1-\mu} + \frac{1+\mu}{8(1-\mu)} A_0'\right] r,$$

$$F_1 = -\left[r^2\left(\frac{3E_1'}{4(1-\mu)} + \frac{\mu E_1'}{3\cdot-\mu} - \frac{1+\mu}{8(1+\mu)} A_1\right) + M_1'\right],$$

$$F_3 = \frac{3E_1' r^2}{4(1-\mu)},$$

$$H_1 = -\left[r^2\left(\frac{3E_2'}{4(1-\mu)} + \frac{\mu E_2'}{3-\mu} + \frac{1+\mu}{8(1-\mu)} B_1\right) + M_2'\right],$$

$$H_3 = -\frac{3E_2' r^2}{4(1-\mu)},$$

и слѣдовательно, вообще

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \sum_0^\infty L_k \cos k\vartheta + M_k \sin k\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (132)$$

L_k и M_k нѣкоторыя вполнѣ опредѣленныя, какъ видно изъ предыдущаго, постоянныя (т. е. опредѣленнымъ образомъ выражающіяся въ функціи $E_0', \ldots A_k', \ldots D_k'$).

Съ другой стороны, дифференцируя выраженіе (129) по r, имѣемъ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \sum_0^\infty [(kR_k' r^{k-1} + (k+2) r^{k+1} P_k)\cos k\vartheta + (kS_k' r^{k-1} + (k+2) r^{k+1} Q_k)\sin k\vartheta],$$

а потому

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^\infty [(kR_k' r^{k-1} + (k+2) r^{k+1} P_k)\cos k\vartheta + (kS_k' r^{k-1} + (k+2) r^{k+1} Q_k)\sin k\vartheta] = \\ = \sum_0^\infty [L_k \cos k\vartheta + M_k \sin k\vartheta]. \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Въ этомъ равенствѣ, имѣющемъ мѣсто на окружности основанія цилиндра, надо положить $r = a$ (радіусу основанія).

Отсюда получается слѣдующая система уравненій для опредѣленія постоянныхъ R_k' и S_k'

$$\left.\begin{aligned} R'_k &= \frac{L_k - P_k(k+2)a^{k+1}}{ka^{k-1}}\,, \\ S'_k &= \frac{M_k - Q_k(k+2)a^{k+1}}{ka^{k-1}}\,, \\ &(k = 1\,,\ 2\,,\ 3\ldots\infty) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (134)$$

и кромѣ того равенство

$$2P_0 a - L_0 = 0\,.$$

Такимъ образомъ опредѣлится функція Ω, а по (124) и W_0. Постоянная R_0 должна при этомъ равняться нулю, ибо по условіямъ опредѣленности задачи $W_0 = 0$ при $r = 0$. Въ силу тѣхъ же условій обратятся въ нуль постоянныя M_1, M_2 и B_0 въ выраженіяхъ U'_0 и V'_0, останутся неопредѣленными только M'_1, M'_2, B'_0, E_i, D_i ($i = 1$, 2, 3)— девять постоянныхъ произвольныхъ.

Что касается величинъ напряженій, то, какъ видно изъ равенствъ (15), всякое

$$Z_x^{(i)} = X_z^{(i)} = 0\,, \quad Y_z^{(i)} = Z_y^{(i)} = 0 \ \text{ при } i > 0\,.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$\Delta_2 \Theta_0 = 0\,, \quad \Delta_2^2 U_0 = 0\,, \quad \Delta_2^2 V_0 = 0\,,$$

$$\Delta_2 \Theta_1 = 0\,, \quad \Delta_2^2 U_1 = 0\,, \quad \Delta_2^2 V_1 = 0\,,$$

то всякое $Z_x^{(i)}$, $Z_y^{(i)}$ при $j > 1$, очевидно, обращается въ нуль, а при $j = 1$

$$Z_x^{(2)} = (2k+1)\frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 + D_1 = 0\,,$$

$$Z_x^{(1)} = (2k+1)\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + \Delta_2 U_1 + E_1 = 0\,,$$

въ силу уравненій (67) и (77), и точно также всякое $Z_z^{(i)} = 0$ при $i > 1$ (очевидно изъ выраженій (15)). Величины же $Z_z^{(0)}$ и $Z_z^{(1)}$, вообще говоря, не равны нулю.

Уравненія (7_1) разобьются на слѣдующую систему девяти уравненій

$$\int Z_x^0 dq = A\,, \quad \int Z_y^0 dq = B\,, \quad \int (xZ_y^0 - yZ_x^0)dq = C',$$

$$\int Z_z^{(0)} dq = C\,, \quad \int Z_z^{(1)} dq = 0\,, \quad \int xZ_x^{(0)} dq = A\,,$$

$$\int xZ_z^{(1)} dq = -B', \quad \int yZ_z^{(0)} dq = A', \quad \int yZ_z^{(1)} dq = B\,,$$

достаточныхъ для опредѣленія девяти произвольныхъ постоянныхъ (см. § 13). При этомъ между силами, дѣйствующими на концѣ стержня, и силами, приложенными къ боковой его поверхности, должно существовать нѣкоторое соотношеніе, которое получится, если удовлетворимъ двумъ послѣднимъ условіямъ опредѣленности задачи равновѣсія, т. е. положимъ, что при

$$x = y = z = 0\,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,.$$

Въ данномъ случаѣ эти требованія равносильны одному

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0\,,$$

которое (какъ видно изъ выраженій (129) и (134)) даетъ

$$R_0' = 0 = L_0 - 2P_0 a\,,$$

или, принимая во вниманіе выраженія L_0 и P_0 черезъ соотвѣтствующіе изъ коэффиціентовъ A_k', C_k', получаемъ

$$-\frac{E_3}{1-\mu}a - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_2' a^3 + \frac{1}{2}C_0' a = 0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(135)$$

Точно также, конечно, имѣютъ мѣсто соотношенія между величинами X_0, Y_0, X', Y', выражающія равенства нулю момента и вектора совокупности всѣхъ этихъ силъ, распредѣленныхъ по всей поверхности тѣла. Этимъ я и закончу изложеніе разсматриваемаго вопроса, оставляя въ сторонѣ дальнѣйшія подробности, относящіяся къ нему.

§ 16.

Подобнымъ же путемъ можетъ быть рѣшена задача о равновѣсіи цилиндра и для нѣкоторыхъ другихъ сѣченій, напримѣръ для эллиптическаго цилиндра. При этомъ придется воспользоваться методомъ ортогональныхъ координатъ. Само собою разумѣется, что предыдущія сужденія будутъ справедливы и для полыхъ цилиндровъ, и ходъ рѣшенія вопросовъ, относящихся къ нимъ, въ существѣ дѣла останется неизмѣннымъ.

Предыдущія разсужденія, замѣчу между прочимъ, могутъ привести и къ нѣкоторымъ другимъ слѣдствіямъ относительно зависимости высшей степени алгебраической деформаціи и степени цѣлыхъ функцій перемѣной z, представляющихъ проекціи на оси координатъ силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность цилиндрическаго тѣла, но въ видахъ трудности найти соотвѣтствующее этимъ условіямъ рѣшеніе задачи, я не стану разсматривать ихъ.

Къ теоріи взаимныхъ опредѣлителей.

А. П. Грузинцева.

Взаимнымъ опредѣлителемъ *) даннаго опредѣлителя n-го порядка называютъ, какъ извѣстно, опредѣлитель, составленный изъ его первыхъ миноровъ; онъ будетъ, разумѣется, тоже опредѣлителемъ n-го порядка, такъ-какъ первыхъ миноровъ даннаго числомъ n^2.

Можно подобнымъ-же образомъ составить взаимный опредѣлитель по отношенію къ составленному уже взаимному даннаго и такъ поступать далѣе. Цѣлью настоящей замѣтки и будетъ служить выводъ основныхъ связей между этими взаимными опредѣлителями, а также и ихъ минорами, различныхъ порядковъ.

Пусть имѣемъ опредѣлитель n-го порядка

$$D = \sum \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}).$$

Назовемъ его первые миноры тѣми-же буквами, но со значкомъ (1) вверху, они, значитъ, будутъ:

$$a_{11}^{(1)}, \qquad a_{12}^{(1)} \ldots a_{ik}^{(1)}, \ldots$$

такъ-что

$$a_{ik}^{(1)},$$

будетъ миноръ, соотвѣтствующій элементу a_{ik} въ первоначальномъ или основномъ опредѣлителѣ; онъ получается изъ него выкидываніемъ i-ой строки и k-го столбца и составленіемъ опредѣлителя $(n-1)$-го порядка изъ оставшихся $n-1$ строкъ и $n-1$ столбцовъ.

---

*) Нѣкоторые авторы называютъ взаимный опредѣлитель—*опредѣлителемъ присоединенной системы*, т. е. совокупности первыхъ миноровъ даннаго опредѣлителя.

Составимъ изъ $a_{ik}^{(1)}$, которыхъ n^2 числомъ, опредѣлитель и назовемъ его $D^{(1)}$, т. е.

$$D^{(1)} = \sum \pm (a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} \ . \ . \ . \ a_{nn}^{(1)}).$$

это и есть опредѣлитель взаимный съ D; въ виду нашей цѣли мы будемъ называть его *взаимнымъ перваго ранга* *).

Затѣмъ, принимая $D^{(1)}$ за исходный опредѣлитель, составимъ его первые миноры и обозначимъ ихъ знаками:

$$a_{11}^{(2)}, \quad a_{12}^{(2)} \ . \ . \ . \ a_{ik}^{(2)} \ . \ . \ .$$

изъ этихъ миноровъ составляемъ опредѣлитель $D^{(2)}$, который будетъ взаимнымъ съ $D^{(1)}$; будемъ называть его *взаимнымъ опредѣлителемъ 2-го ранга* по отношенію къ первоначальному D.

Идя такимъ путемъ, мы образуемъ $D^{(q)}$ — *взаимный опредѣлитель* (q)-*го ранга* по отношенію къ первоначальному; онъ-же будетъ *просто взаимный* съ предыдущимъ опредѣлителемъ $(q-1)$-го *ранга*. Элементы этого опредѣлителя будутъ:

$$a_{11}^{(q)}, \quad a_{12}^{(q)} \ . \ . \ . \ a_{ik}^{(q)} \ . \ . \ .$$

и самъ онъ будетъ:

$$D^{(q)} = \sum \pm a_{11}^{(q)} a_{22}^{(q)} \ . \ . \ . \ a_{nn}^{(q)}.$$

Всѣ эти опредѣлители суть, разумѣется, опредѣлители n-го *порядка*.

Прежде чѣмъ заняться соотношеніями между всѣми этими опредѣлителями, условимся въ одномъ обозначеніи, которое временно будемъ употреблять. Будемъ обозначать $(n-j)$-ый миноръ какого-нибудь опредѣлителя $\triangle$ n-го порядка символомъ:

$$\triangle_{j,\,p},$$

въ которомъ первый указатель j будетъ обозначать порядокъ того опредѣлителя, который самъ есть $(n-j)$-ый миноръ; а второй указатель p будетъ опредѣлять нумеръ минора **).

---

*) Можно было-бы его называть взаимнымъ 1-го порядка, но терминъ „порядокъ" такъ часто употребляется въ *опредѣлителяхъ*, что во избѣжаніе недоразумѣній будемъ употреблять слово „*рангъ*".

**) Извѣстно, что всѣхъ $(n-j)$-ыхъ миноровъ даннаго опредѣлителя n-го порядка можно составить

$$\left[\frac{n(n-1) \ . \ . \ . \ (n-j+1)}{1 . 2 . 3 \ . \ . \ . j}\right]^2 \text{ числомъ.}$$

Теперь установимъ тѣ соотношенія, которыя имѣли въ виду. Они будутъ основаны на слѣдующихъ двухъ извѣстныхъ равенствахъ, связывающихъ взаимный опредѣлитель и его миноры съ первоначальнымъ опредѣлителемъ и его минорами:

$$\triangle' = \triangle^{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\triangle'_{j\,,\,p} = \triangle^{j-1} \triangle_{n-j\,,\,p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

здѣсь $\triangle'$ есть опредѣлитель взаимный съ $\triangle$, а $\triangle_{n-j\,,\,p}$ есть j-ый миноръ опредѣлителя $\triangle$ дополнительный минору $\triangle'_{j\,,\,p}$.

Примѣняя формулу (A) къ $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ . . $D^{(q)}$, найдемъ послѣдовательно:

$$D^{(1)} = D^{n-1}$$

$$D^{(2)} = (D^{(1)})^{(n-1)} = D^{(n-1)^2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$D^{(q)} = D^{(n-1)^q} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

Установимъ теперь соотношенія между минорами.

По формулѣ (B) имѣемъ:

$$D^{(1)}_{j\,,\,p} = D^{j-1}\, D_{n-j\,,\,p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Полагая здѣсь $j = n - 1$, найдемъ:

$$D^{(1)}_{n-1,p} = D^{n-2} D_{1,p}\,,$$

но по первымъ нашимъ обозначеніямъ должно положить

$$D^{(1)}_{n-1,p} = a^{(2)}_{ik}\,,$$

$$D_{1,p} = a_{ik}\,,$$

слѣдовательно:

$$a^{(2)}_{ik} = D^{n-2}\, a_{ik} = D^{(n-1)-1}\, a_{ik} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

Далѣе, таже формула (B) вмѣстѣ съ (I) даетъ:

$$D^{(2)}_{j,p} = (D^{(1)})^{j-1} D^{(1)}_{n-j,p}\,,$$

но

$$D^{(1)} = D^{n-1}\,,$$

по формулѣ (A),

$$D^{(1)}_{n-j,p} = D^{n-j-1} D_{j,p}\,,$$

по формулѣ (1),

слѣдовательно

$$D^{(2)}_{j,p} = D^{(n-1)(j-1)+(n-j-1)} D_{j,p}\,,$$

или

$$D^{(2)}_{j,p} = D^{[(n-1)-1]j} D_{j,p}\,. \;\ldots\ldots\ldots \;(2)$$

Полагая здѣсь j равнымъ $(n-1)$ и замѣчая, что

$$D^{(2)}_{n-1,p} = a^{(3)}_{ik}\,,\quad D_{n-1,p} = a^{(1)}_{ik}\,,$$

найдемъ:

$$a^{(3)}_{ik} = D^{(n-1)^2-(n-1)} a^{(1)}_{ik}\,. \;\ldots\ldots\ldots \;(2')$$

Далѣе составимъ:

$$D^{(3)}_{j,p} = (D^{(2)})^{j-1} D^{(2)}_{n-j,p}\,,$$

но

$$(D^{(2)})^{j-1} = D^{(n-1)^2(j-1)}$$

и по формулѣ (2), полагая въ ней $n-j$ вмѣсто j,

$$D^{(2)}_{n-j,p} = D^{[(n-1)-1](n-j)} D_{n-j,p}\,,$$

слѣдовательно:

$$D^{(3)}_{j,p} = D^{(n-1)^2(j-1)+[(n-1)-1](n-j)} D_{n-j,p}$$

но

$$(n-1)^2(j-1)+[(n-1)-1](n-j) = [(n-1)^2-(n-1)+1]j-1$$

слѣдовательно *):

$$D^{(3)}_{j,p} = D^{[(n-1)^2-(n-1)+1]j-1} D_{n-j,p}\,. \;\ldots\ldots\ldots \;(3)$$

Полагая здѣсь j равнымъ $n-1$ и зная, что:

$$D^{(3)}_{n-1,p} = a^{(4)}_{ik}\,,\quad D_{1,p} = a_{ik}\,,$$

найдемъ:

$$a^{(4)}_{ik} = D^{(n-1)^3-(n-1)^2+(n-1)-1} a_{ik}\,. \;\ldots\ldots \;(3')$$

---

*) Мы не преобразовываемъ показателей съ цѣлью видѣть способъ ихъ составленія.

Разсматривая выраженія (1), (2) и (3) и помня способъ ихъ полученія, не трудно подмѣтить общій законъ составленія ихъ для миноровъ взаимнаго опредѣлителя какого угодно ранга, а именно, для взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга $2m$ имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} D_{j,p}^{(2m)} = D^{[(n-1)^{2m-1}-(n-1)^{2m-2}+\ldots-1]j} D_{j,p}, \\ \text{а для нечетнаго ранга} \\ D_{j,p}^{(2m+1)} = D^{[(n-1)^{2m}-(n-1)^{2m-1}+\ldots+1]j-1} D_{n-j,p}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

Суммы въ скобкахъ пока оставляемъ въ этомъ видѣ, а потомъ ихъ упростимъ.

Чтобы убѣдиться въ справедливости этихъ формулъ стоитъ только составить изъ $D_{j,p}^{(2m)}$ формулу для $D_{j,p}^{(2m+1)}$, а изъ формулы $D_{j,p}^{(2m+1)}$ формулу для $D_{j,p}^{(2m+2)}$; онѣ будутъ того-же вида (II).

Выполнимъ это. По формулѣ (B) имѣемъ:

$$D_{j,p}^{(2m+1)} = (D^{(2m)})^{j-1} D_{n-j,p}^{(2m)},$$

но по формулѣ (I), полагая въ ней $q = 2m$, имѣемъ:

$$(D^{(2m)})^{j-1} = D^{(n-1)^{2m}(j-1)},$$

а по первой формулѣ группы (II), допускаемой на время, полагая въ ней $n-j$ вмѣсто j, имѣемъ:

$$D_{n-j,p}^{(2m)} = D^{[(n-1)^{2m-1}-(n-1)^{2m-2}+\ldots-1](n-j)} D_{n-j,p},$$

но

$$(n-1)^{2m}(j-1) + [(n-1)^{2m-1} - (n-1)^{2m-2} + \ldots - 1](n-j) =$$
$$= [(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \ldots + 1]j + [-(n-1)^{2m} + n(n-1)^{2m-1} - \ldots$$
$$- n(n-1)^2 + n(n-1) - n],$$

но многочленъ въ скобкахъ равенъ -1, ибо

$$n(n-1)^{2m-1} - n(n-1)^{2m-2} + \ldots + n(n-1) - n = (n-1)^{2m} - 1,$$

какъ сумма геометрической прогрессіи; и такъ имѣемъ:

$$D_{j,p}^{(2m+1)} = D^{[(n-1)^{2m}-(n-1)^{2m-1}+\ldots+1]j-1} D_{n-j,p},$$

а это данная выше формула.

Если-бы мы допустили на время эту формулу, то получили бы изъ нея формулу для $D_{j,p}^{(2m+2)}$ вида (II) для $D_{j,p}^{(2m)}$.

Дѣйствительно, допуская справедливость ея, по формулѣ (B) имѣемъ:

$$D_{j,p}^{(2m+2)}=(D^{(2m+1)})^{j-1}\,D_{n-j,p}^{(2m+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

но

$$(D^{(2m+1)})^{j-1}=D^{(n-1)^{2m+1}(j-1)}$$ по формулѣ (I), а по допускаемой формулѣ (второй въ группѣ (II)), полагая въ ней $n-j$ вмѣсто j, найдемъ:

$$D_{n-j,p}^{(2m+1)}=D^{[(n-1)^{2m}-(n-1)^{2m-1}+\ldots+1](n-j)-1}\,D_{j,p}\,.$$

Подставляя все это въ (a), для показателя при D найдемъ выраженіе:

$$[(n-1)^{2m+1}-(n-1)^{2m}+\ldots-1]j+[-(n-1)^{2m+1}+$$
$$+n(n-1)^{2m}-n(n-1)^{2m-1}+\ldots+n]=[(n-1)^{2m+1}-(n-1)^{2m}+\ldots-1]j,$$

ибо

$$n(n-1)^{2m}-n(n-1)^{2m-1}+\ldots+n=(n-1)^{2m+1}+1\,.$$

И такъ:

$$D_{j,p}^{(2m+2)}=D^{[(n-1)^{2m+1}-(n-1)^{2m}+\ldots-1]j}\,D_{j,p}\,,$$

а это первая формула системы (II) для четнаго указателя $(2m+2)$.

И такъ формулы (II) доказаны.

Дадимъ имъ нѣсколько болѣе простой видъ.

Мы видимъ, что

$$(n-1)^{2m-1}-(n-1)^{2m-2}+\ldots-1=\frac{(n-1)^{2m}-1}{n}$$

и

$$(n-1)^{2m}-(n-1)^{2m-1}+\ldots+1=\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n}\,,$$

поэтому:

$$\left.\begin{aligned} D_{j,p}^{(2m)}&=D^{\frac{(n-1)^{2m}-1}{n}j}\,D_{j,p}\\ D_{j,p}^{(2m+1)}&=D^{\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n}j-1}\,D_{n-j,p}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\text{II bis})$$

Примѣнимъ ихъ къ случаю $j=n-1$; тогда по нашимъ обозначеніямъ

$$D_{n-1,p}^{(2m)}=a_{ik}^{(2m+1)};\ D_{n-1,p}=a_{ik}^{(1)}$$

$$D_{n-1,p}^{(2m+1)}=a_{ik}^{(2m+2)};\ D_{1,p}=a_{ik}$$

и формулы (II bis) дадутъ

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}^{(2m+1)} &= D^{\frac{(n-1)^{2m}-1}{n}(n-1)} a_{ik}^{(1)} \\ a_{ik}^{(2m+2)} &= D^{\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n}(n-1)-1} a_{ik} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{III})$$

или

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}^{(2m+1)} &= a_{ik}^{(1)}\sqrt[n]{\frac{D^{(2m+1)}}{D^{(1)}}} \\ a_{ik}^{(2m+2)} &= a_{ik}\sqrt[n]{\frac{D^{(2m+2)}}{D}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{III\ bis})$$

т. е. *элементы взаимнаго опредѣлителя нечетнаго ранга пропорціональны первымъ минорамъ первоначальнаго опредѣлителя*, а *элементы взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга пропорціональны элементамъ первоначальнаго* или *первые миноры взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга пропорціональны первымъ минорамъ первоначальнаго опредѣлителя*, а *первые миноры взаимнаго опредѣлителя нечетнаго ранга пропорціональны элементамъ первоначальнаго опредѣлителя.*

Въ этихъ формулахъ (III bis):

$$D^{(2m+1)}=D^{(n-1)^{2m+1}}$$

$$D^{(2m+2)}=D^{(n-1)^{2m+2}}$$

$$D^{(1)}=D^{n-1}.$$

Слѣдствіе 1. Если $D=1$, т. е. D будетъ опредѣлителемъ (модулемъ) нѣкоторой обратной линейной подстановки, то тогда

$$D^{(1)}=1 \quad \text{и} \quad D^{(q)}=1,$$

а поэтому

$$a_{ik}^{(2m+1)}=a_{ik}^{(1)}$$

$$a_{ik}^{(2m+2)}=a_{ik}.$$

Въ этомъ случаѣ *взаимные опредѣлители будутъ повторяться послѣдовательно.*

Слѣдствіе 2. Если первоначальный опредѣлитель D будетъ *симметрическимъ*, тогда по извѣстному свойству симметрическихъ опредѣлителей

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ki}^{(1)},$$

слѣдовательно и

$$a_{ik}^{(2m+1)} = a_{ki}^{(2m+1)},$$

$$a_{ik}^{(2m+2)} = a_{ki}^{(2m+2)},$$

т. е. *всѣ взаимные будутъ симметрическими опредѣлителями.*

Слѣдствіе 3. Пусть первоначальный опредѣлитель будетъ *косой симметрическій:* a) *нечетнаго порядка, тогда взаимные нечетнаго ранга будутъ симметрическими,* а *четнаго — косыми симметрическими;* b) *четнаго порядка, тогда взаимные всякаго ранга будутъ косыми симметрическими.*

Примѣнимъ найденныя формулы къ случаю, когда нѣкоторый опредѣлитель n-го порядка C есть произведеніе двухъ другихъ опредѣлителей A и B тоже n-го порядка, т. е. пусть

$$C = A\ B.$$

По формулѣ (I) найдемъ, что

$$C^{(\mu)} = A^{(\mu)}\ B^{(\mu)}$$

т. е. *если опредѣлитель C есть произведеніе двухъ другихъ опредѣлителей A и B, то и его взаимный ранга μ будетъ произведеніемъ взаимныхъ A и B того же ранга.*

Въ заключеніе выведемъ еще одну формулу, связывающую миноры двухъ смежныхъ взаимныхъ опредѣлителей.

Въ формулахъ (II bis) первые множители вторыхъ частей можно преобразовать.

Дѣйствительно, имѣемъ:

$$D^{\frac{(n-1)^{2m}-1}{n}j} = \sqrt[n]{D^{[(n-1)^{2m}-1]j}} = \sqrt[n]{\frac{D^{(n-1)^{2m}j}}{D^j}} =$$

$$= D^{-\frac{j}{n}} \sqrt[n]{[D^{(2m)}]^j};$$

точно такъ-же найдемъ:

$$D^{\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n}j-1} = D^{\frac{j}{n}-1}\sqrt[n]{[D^{(2m+1)}]^j}.$$

Перемножая теперь формулы (II bis) и подставляя найденныя сейчасъ выраженія, получимъ:

$$D_{j,p}^{(2m)} D_{j,p}^{(2m+1)} = \frac{[D^{(2m)} D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}}{D} D_{j,p} D_{n-j,p}.$$

Полагая здѣсь p равнымъ

$$1, 2, \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{1.2.3\ldots j}$$

и сложивъ всѣ равенства, найдемъ:

$$\sum_p D_{j,p}^{(2m)} D_{j,p}^{(2m+1)} = \frac{[D^{(2m)} D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}}{D} \sum_p D_{j,p} D_{n-j,p},$$

но по теоремѣ Лапласа

$$\sum_p D_{j,p}\ D_{n-j,p} = D,$$

слѣдовательно:

$$\sum_p D_{j,p}^{(2m)}\ D_{j,p}^{(2m+1)} = [D^{(2m)}\ D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}.$$

О высшихъ и низшихъ предѣлахъ вещественныхъ корней алгебраическихъ уравненій и ихъ отдѣленіи.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Въ настоящей замѣткѣ я не желаю дать общаго теоретически стройнаго метода для рѣшенія вопроса объ отысканіи предѣловъ корней алгебраическихъ уравненій и ихъ отдѣленіи; цѣль будетъ достигнута, если удастся найти такой частный пріемъ, который давалъ-бы возможность рѣшить эти вопросы въ большинствѣ случаевъ съ меньшей затратой времени, съ меньшимъ числомъ вычисленій.

Изъ существующихъ способовъ опредѣленія высшихъ предѣловъ положительныхъ корней уравненій наиболѣе употребительны два: Ньютона и Лагерра. Первый основанъ на извѣстныхъ свойствахъ производныхъ данной функціи, представляющей лѣвую часть уравненія; второй на нѣкоторыхъ свойствахъ особыхъ функцій Лагерра. Первый точнѣе въ теоретическомъ отношеніи; второй болѣе удобенъ въ практическомъ. Остановимся на послѣднемъ.

Пусть

$$f(x)=V_0=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\dots A_n=0\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(1)$$

заданное уравненіе.

Составимъ рядъ функцій

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\,,\\
V_2 &= x^{n-2} + A_1 x^{n-3} + \ldots + A_{n-2}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
V_{n-2} &= x^2 + A_1 x + A_2\,,\\
V_{n-1} &= x + A_1\,,\\
V_n &= 1.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (\alpha)$$

Если при $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$ всѣ функціи $V_i (i = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3 \ldots n)$ положительны, то α есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія.

Замѣтивъ [1]), что всякое

$$V_k = x V_{k+1} + A_{n-k}\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

найдемъ, что при $\alpha_1 > \alpha$

$$V_{n-1}(\alpha_1) > V_{n-1}(\alpha)\,,\ V_{n-2}(\alpha_1) > V_{n-2}(\alpha) \ldots,\ V_0(\alpha_1) > V_0(\alpha)\,, \quad . \quad (2_1)$$

откуда слѣдуетъ, что, при возрастаніи x отъ α до ∞, функція V_0 возрастаетъ, оставаясь всегда положительною, и слѣдовательно $x = \alpha$ есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (1).

Преимущество способа Лагерра передъ Ньютоновымъ состоитъ въ сравнительно простѣйшемъ вычисленіи функцій $V_1 \ldots V_{n-1}$, законъ образованія которыхъ дается равенствомъ (2), но во всякомъ случаѣ этотъ способъ можетъ потребовать весьма сложныхъ вычисленій, особенно если искомый предѣлъ и степень уравненія достаточно высоки. Не имѣя напередъ никакой догадки о первомъ, мы должны подставлять рядъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ (если хотимъ найти его въ цѣлыхъ числахъ) отъ нуля до нѣкотораго k и каждый разъ вычислять рядъ функцій (α), что можетъ составить очень длинную операцію, особенно если коэффиціенты большія числа.

Понятно, замѣтимъ между прочимъ, что теорема Лагерра дастъ низшій предѣлъ положительныхъ корней разсматриваемаго уравненія, если, положивъ $x = \dfrac{1}{x_1}$, опредѣлимъ при помощи ея высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$f_1(x_1) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n = 0\,, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

которое назовемъ обратнымъ уравненіемъ.

---

[1]) Привожу доказательство, данное г. Мясоѣдовымъ въ статьѣ „Двѣ теоремы Высшей Алгебры". См. Математич. Сборникъ, томъ XI, стр. 617.

Высшіе и низшіе предѣлы отрицательныхъ корней получатся, если вмѣсто x введемъ перемѣнную $-x_2$, а затѣмъ вмѣсто x_2 обратную ей $\frac{1}{x_3}$, и будемъ искать высшіе предѣлы положительныхъ корней такимъ образомъ преобразованныхъ уравненій.

§ 2.

Въ настоящей замѣткѣ я постараюсь показать, что въ большинствѣ случаевъ можно отыскать предѣлы корней несравненно простѣйшимъ пріемомъ, не прибѣгая къ сколько-нибудь сложнымъ вычисленіямъ. Для этого установимъ слѣдующее, почти очевидное, предложеніе.

Между коэффиціентами $A_n, A_{n-1}, \ldots A_1$ *и* $(n-1)$ *параметрами*

$$k_1,\ k_2 \ldots k_{n-1}$$

всегда можно установить $(n-1)$ *равенствъ вида*

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= -k_1(A_{n-1}+k_{n-1}),\\
k_{n-1} &= k_1(A_{n-2}+k_{n-2}),\\
k_{n-2} &= k_1(A_{n-3}+k_{n-3}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
k_3 &= k_1(A_2+k_2),\\
k_2 &= k_1(A_1+k_1),
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (4)$$

причемъ параметръ k_1, *входящій множителемъ въ правыя части всѣхъ этихъ равенствъ, будетъ необходимо однимъ изъ корней уравненія*

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n = 0.$$

Помноживъ обѣ части этихъ равенствъ (4), начиная съ третьяго послѣдовательно на k_1, $k_1^2 \ldots$ до k_1^{n-3} и сложивъ всѣ, за исключеніемъ перваго, получимъ

$$k_{n-1} = k_1A_{n-2} + k_1^2A_{n-3} + \cdots + k_1^{n-2}A_1 + k_1^{n-1}$$

откуда, при помощи перваго изъ нихъ, находимъ

$$k_1^n + A_1k_1^{n-1} + \cdots + k_1^2A_{n-2} + k_1A_{n-1} + A_n = 0 \ldots \quad (5)$$

Давъ k_1 значеніе одного изъ корней уравненія (5), опредѣлимъ изъ равенствъ (4), начиная съ послѣдняго, всѣ $k_i (i=2, 3 \ldots n-1)$, а первое обратится въ тождество

$$(A_n) = (A_n),$$

гдѣ (A_n) обозначаетъ численное значеніе коэффиціента A_n. При всякомъ же k_1, отличномъ отъ одного изъ корней разсматриваемаго уравненія, правая часть перваго равенства будетъ или $>$ или $< A_n$, коэффиціента при нулевой степени k_1 въ уравненіи (5).

Систему равенствъ (4) можно разсматривать, слѣдовательно, только какъ особое изображеніе уравненія (5), и подстановка въ первое изъ нихъ k_{n-1}, вычисленнаго послѣдовательно, при данномъ k_1, изъ остальныхъ равенствъ, есть не что иное какъ подстановка даннаго значенія k_1 въ изслѣдуемое уравненіе (5). Отсюда непосредственно заключаемъ, что если дадимъ k_1 значеніе большее наибольшаго изъ положительныхъ корней уравненія, то

$$A_n > -k_1(A_{n-1} + k_{n-1}), \ldots \ldots \ldots (6)$$

гдѣ подъ k_1 разумѣется данное его значеніе (или большее), а подъ k_{n-1} вычисленное по равенствамъ (4). Если, далѣе, дадимъ k_1 два значенія k'_1 и k_1'', вычислимъ соотвѣтствующія имъ значенія k'_{n-1} и k''_{n-1} и составимъ выраженія

$$-k'_1(A_{n-1} + k'_{n-1}) \quad \text{и} \quad -k''_1(A_{n-1} + k''_{n-1}),$$

то, если между k'_1 и k''_1 заключается четное число корней уравненія (5) или ни одного

$$A_n \gtrless -k'_1(A_{n-1} + k'_{n-1}), \quad A_n \gtrless -k''_1(A_{n-1} + k''_{n-1}), \quad \ldots (7)$$

если же нечетное или одинъ, то

$$A_n \gtrless -k'_1(A_{n-1} + k'_{n-1}), \quad A_n \lessgtr -k''_1(A_{n-1} + k''_{n-1}), \ldots \ldots (8)$$

причемъ въ выраженіяхъ (7) и (8) надо брать одновременно верхніе или нижніе знаки.

Принявъ во вниманіе условія неравенства (6), мы, по одному взгляду на равенства (4), заключаемъ о возможности въ какомъ угодно частномъ случаѣ вычислить высшій предѣлъ положительныхъ корней съ достаточной точностью, полагая его, впрочемъ, большимъ единицы, что въ большинствѣ случаевъ соотвѣтствуетъ дѣйствительности, за исключеніемъ того, когда всѣ корни заключаются между 0 и 1. Послѣдній случай, впрочемъ, всегда можно подвести подъ первый, стоитъ только замѣнить

$$x \text{ черезъ } x_1 - 1$$

и искать высшій предѣлъ положительныхъ корней преобразованнаго уравненія, который несомнѣнно будетъ > 1.

Не входя въ длинный рядъ общихъ разсужденій, я разсмотрю нѣсколько частныхъ примѣровъ и сравню отысканіе высшихъ предѣловъ положительныхъ корней по данному пріему и способу Лагерра, для чего я въ началѣ статьи и изложилъ вкратцѣ содержаніе послѣдняго.

§ 3.

Возьмемъ извѣстное уравненіе Лагранжа [1])

$$x^3 - 7x + 7 = 0 . \qquad (9)$$

Примѣняя способъ Лагерра, составляемъ функціи

$$V_0 = x^3 - 7x + 7,$$
$$V_1 = x^2 - 7,$$
$$V_2 = x,$$
$$V_3 = 1.$$

Подставляя въ этотъ рядъ значенія $x = 0, 1, 2, 3$, получаемъ таблицу

x	V_0	V_1	V_2	V_3
0	+	—	0	+
1	+	—	+	+
2	+	—	+	+
3	+	+	+	+

откуда и заключаемъ, что 3 есть искомый предѣлъ. Такимъ образомъ, для достиженія добытаго результата пришлось выполнить 6 вычисле-

---

[1]) См. Serret, „Cours d'Algèbre supérieure“. T. I. и Математическій Сборникъ, T. XI, стр. 618.

ній, хотя и не сложныхъ, что, конечно, зависитъ отъ простоты взятаго уравненія.

Примѣнимъ нашъ способъ. Въ данномъ случаѣ

$$A_n = 7\,, \quad A_{n-1} = -7, \quad A_{n-2} = 0$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} 7 &= -k_1(-7+k_2),\\ k_2 &= k_1{}^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Высшій предѣлъ найдется, если удовлетворимъ условію

$$7 > k_1(7-k_2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

откуда очевидно, что при

$$k_2 > 7$$

или

$$k_1 > \sqrt{7}$$

неравенство (11) будетъ удовлетворено, а, слѣдовательно, $\sqrt{7}$ и есть высшій предѣлъ положительныхъ корней. Результатъ очевидный и болѣе точный, чѣмъ по способу Лагерра.

Для нахожденія низшаго предѣла составимъ обратное уравненіе

$$7x^3 - 7x^2 + 1 = 0\,,$$

или

$$x^3 - x^2 + \frac{1}{7} = 0\,,$$

причемъ

$$A_n = \frac{1}{7}\,, \quad A_{n-1} = 0\,, \quad A_{n-2} = -1\,,$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{7} &= -k_1k_2\,,\\ k_2 &= k_1(-1+k_1)\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что при всякомъ

$$k_1 > 1$$

k_2 положительно, и первое равенство ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть удовлетворено. Слѣдовательно, 1 и есть низшій предѣлъ положительныхъ корней даннаго уравненія. Способъ Лагерра даетъ тотъ же предѣлъ.

Этотъ примѣръ уже до нѣкоторой степени указываетъ на выгоду даннаго нами частнаго пріема, но она станетъ еще очевиднѣе, если возьмемъ болѣе сложное уравненіе. Пусть, напримѣръ, требуется найти высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$x^6-12x^5+60x^4+123x+4567x-89012=0 \ . \ . \ . \ . \ (13)$$

Примѣняя способъ Лагерра, мы должны составить семь функцій V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, а именно:

$$V_0=x^6-12x^5+60x^4+123x^3+4567x-89012\,,$$

$$V_1=x^5-12x^4+60x^3+123x^2+4567\,,$$

$$V_2=x^4-12x^3+60x^2+123x\,,$$

$$V_3=x^3-12x^2+60x+123\,,$$

$$V_4=x^2-12x+60\,,$$

$$V_5=x-12\,,$$

и, принявъ x или равнымъ, или большимъ 12, произвести пять довольно сложныхъ вычисленій; число 12 и будетъ искомымъ предѣломъ.

Въ данномъ случаѣ вопросъ все таки упрощенъ тѣмъ обстоятельствомъ, что коэффиціентъ члена, слѣдующаго за высшей степенью x-а есть величина отрицательная и высшій предѣлъ корней не $>$ этого коэффиціента, но съ этимъ вводится новое практическое неудобство: предѣлъ, полученный этимъ пріемомъ, не можетъ быть ниже численнаго значенія послѣдняго, тогда какъ высшій предѣлъ положительныхъ корней можетъ оказаться значительно ниже его. Съ другой стороны упомянутый коэффиціентъ можетъ быть слишкомъ малъ, и тогда придется произвести длинный рядъ выкладокъ.

Обращаемся къ нашему способу, причемъ

$$A_n=-89012\,,\quad A_{n-1}=4567\,,\quad A_{n-2}=0,\quad A_{n-3}=123\,,$$

$$A_{n-4}=60\,,\quad A_{n-5}=-12\,,$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}89012 &= k_1(4567+k_5)\,,\\ k_5 &= k_1k_4\,,\\ k_4 &= k_1(123+k_3)\,,\\ k_3 &= k_1(60+k_2)\,,\\ k_2 &= k_1(-12+k_1).\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; (14)$$

Отсюда непосредственно заключаемъ, что при

$$k_1 > 12$$

всѣ

$$k_i (i = 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5)$$

возрастаютъ, оставаясь положительными, а наименьшее значенiе k_5 будетъ соотвѣтствовать $k_1 = 12$; при этомъ

$$\begin{aligned}k_2 &= 0\,,\\ k_3 &= 12.60 = 720\,,\\ k_4 &= 12(123+720) = 9116\,,\\ k_5 &= 12.9116.\end{aligned}$$

Изъ этой таблицы съ очевидностью слѣдуетъ, что и при $k_1 = 12$ равенство первое изъ (14) удовлетворено быть не можетъ, а, слѣдовательно, число 12 и есть высшiй предѣлъ положительныхъ корней даннаго уравненiя. Во многихъ случаяхъ мы легко можемъ найти, замѣтимъ между прочимъ, болѣе низкiй предѣлъ корней, чѣмъ по прiему Лагерра. Возьмемъ уравненiе

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

и составимъ равенства

$$\begin{aligned}-6 &= -k_1(5+k_3)\,,\\ k_3 &= k_1(5+k_2)\,,\\ k_2 &= k_1(-5+k_1).\end{aligned}$$

Искомый предѣлъ найдется изъ условiя

$$5k_1 + k_1k_3 > 6\,.$$

Предполагая $k_1 > 1$, находимъ выполненнымъ это условiе, если

$$5 + k_3 > 6\,,$$

т. е. если

$$k_3 > 1\,,$$

или

$$5 + k_2 > 1\,,\quad k_2 > -4\,.$$

Такъ какъ корни уравненія

$$k_1{}^2 - 5k_1 + 4 = 0\,,$$

суть

$$k_1 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\,,$$

то

$$k_2 > -4 \quad \text{при} \quad k_1 > 4\,,$$

причемъ, очевидно,

$$k_3 > 1\,,\quad 5 + k_3 > 6\,,\quad 5k_1 + k_1k_3 > 6\,.$$

Слѣдовательно, 4 и есть высшій предѣлъ положительныхъ корней даннаго уравненія. Способъ Лагерра даетъ число 5; формула-же Ролля

$$k_1 \geqq 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}},$$

гдѣ A коэффиціентъ при высшей степени, a положительное число не меньшее каждаго изъ отрицательныхъ коэффиціентовъ уравненія, дастъ число 6.

Возьмемъ еще примѣръ, приведенный г. Сохоцкимъ на отысканіе предѣла положительныхъ корней по способу Ролля, именно уравненіе

$$x^5 + x^4 + x^2 + 5x - 109 = 0\,,$$

для котораго высшій предѣлъ корней равенъ

$$1 + \sqrt[5]{109}\,,$$

или 4. Примѣняя способъ Лагерра, получаемъ

$$V_0 = x^5 + x^4 + x^2 + 5x - 109\,,$$

$$V_1 = x^4 + x^3 + x + 5\,,$$

$$V_2 = x^3 + x^2 + 1\,,$$

$$V_3 = x^2 + x\,,$$

$$V_4 = x + 1\,.$$

При $x > 0$ всѣ функціи $V_i (i = 4, 2 \ldots 1)$ положительны. Слѣдуетъ разсмотрѣть только V_0.

При $x = 1$, $x = 2$, функція $V_0 < 0$, а при $x = 3$, имѣемъ $V_0 > 0$. Слѣдовательно, 3 есть высшій предѣлъ.

Примѣняя указанный нами пріемъ, получаемъ

$$\begin{aligned} 109 &= k_1(5 + k_4), \\ k_4 &= k_1(1 + k_3), \\ k_3 &= k_1 k_2, \\ k_2 &= k_1(1 + k_1), \end{aligned}$$

откуда слѣдуетъ, что если

$$k_1(5 + k_4) > 109, \quad k_1 k_4 > 109, \quad k_1{}^3 k_2 > 109, \quad k_1{}^5 > 109,$$

т. е. если $k_1 > 3$, функція $V_0 > 0$ и, слѣдовательно, 3 есть высшій предѣлъ.

Величина предѣла та же, что и при способѣ Лагерра, и почти никакихъ вычисленій.

Всѣ предыдущіе примѣры я бралъ наудачу; изъ нихъ нѣкоторые, именно первые три, служили примѣрами для уясненія способа Лагерра и вытекающихъ изъ него слѣдствій въ упомянутой выше статьѣ г. Мясоѣдова.

Чтобы болѣе уяснить выгоду даннаго пріема, разсмотримъ нарочно случай, когда отрицательный коэффиціентъ при членѣ, слѣдующемъ за высшей степенью x-а, весьма малъ сравнительно съ числомъ, выражающимъ дѣйствительный высшій предѣлъ положительныхъ корней. Пусть

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= x^4 - 2x^3 - 1333x^2 + 1334x + 2666, \\ V_1 &= x^3 - 2x^2 - 1333x + 1334, \\ V_2 &= x^2 - 2x - 1333, \\ V_3 &= x - 2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

т. е. ищется высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$x^4 - 2x^3 - 1333x^2 + 1334x + 2666 = 0.$$

Искомый предѣлъ > 2 и > 30, какъ легко видѣть на основаніи второго изъ равенствъ (15), но < 40. Слѣдуетъ взять промежуточное число между 30 и 40. При $x = 35$, $x = 37$ функція $V_2 < 0$, а при $x = 38$

$$V_2 > 0, \quad V_1 > 0 \quad \text{и} \quad V_0 > 0.$$

Слѣдовательно, 38 и есть искомый предѣлъ. Продолжительность этихъ вычисленій очевидна.

Составимъ теперь равенства (14)

$$2666 = -k_1(1334 + k_3),$$

$$k_3 = k_1(-1333 + k_2),$$

$$k_2 = k_1(-2 + k_1).$$

При всякомъ $k_1 > 2$ параметръ k_2 возрастаетъ, оставаясь положительнымъ. Условіе

$$2666 > -k_1(1334 + k_3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

будетъ удовлетворено, если

$$k_3 > 0,$$

или

$$k_1(k_2 - 1333) > 0, \quad k_2 > 1333,$$

$$k_1^2 - 2k_1 > 1333 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Корни уравненія

$$k_1^2 - 2k_1 = 1333$$

суть

$$k_1 = 1 + \sqrt{1334}, \quad k_2 = 1 - \sqrt{1334},$$

откуда слѣдуетъ, что при всякомъ $k_1 > 38$, условіе (17), а слѣдовательно и (16), удовлетворены. Такимъ образомъ, $k_1 = 38$ и есть высшій предѣлъ. Формула Ролля даетъ за высшій предѣлъ число 1334.

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что данный способъ требуетъ болѣе разсужденій въ каждомъ частномъ случаѣ, чѣмъ вычисленій, по самому характеру своему несомнѣнно примѣнимъ ко всевозможнымъ случаямъ и всегда даетъ искомый предѣлъ. Правда, съ возрастаніемъ степени уравненія сужденія эти усложняются, но въ такой же мѣрѣ усложняются и вычисленія по способу Лагерра, что мы видѣли во второмъ примѣрѣ. Въ случаяхъ же не слишкомъ высокихъ степеней уравненія, преимущество предлагаемаго способа мнѣ кажется очевиднымъ.

§ 4.

Изображеніе алгебраическаго уравненія въ видѣ системы равенствъ (14) не только даетъ возможность быстро, при помощи не сложныхъ соображеній, найти предѣлы, между которыми заключаются вещественные корни даннаго уравненія, но во многихъ случаяхъ позволяетъ съ не меньшею простотою и отдѣлить корни. Опредѣлимъ условія отсутствія корня между данными предѣлами α и β. Если между двумя значеніями $k_1 = \alpha$ и β существуетъ корень, то хотя разъ должно удовлетвориться равенство

$$A_n = -k_1(A_{n-1} + k_{n-1}), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

т. е. при нѣкоторомъ значеніи k_1, большемъ α и меньшемъ β, должно существовать по крайней мѣрѣ одно такое значеніе k_{n-1}, что равенство (18) обратится въ тождество.

Пусть

$$1) \quad A_n > 0, \qquad A_{n-1} > 0,$$

$$2) \quad A_n > 0, \qquad A_{n-1} < 0,$$

$$3) \quad A_n < 0, \qquad A_{n-1} > 0,$$

$$4) \quad A_n < 0, \qquad A_{n-1} < 0.$$

Разсмотримъ каждый случай отдѣльно.

1) При измѣненіи k_1 отъ α до β отношеніе $\frac{A_n}{k_1}$ убываетъ отъ $\frac{A_n}{\alpha}$ до $\frac{A_n}{\beta}$. Для удовлетворенія равенства (18) k_{n-1} необходимо должно получить такое значеніе (при измѣненіи k_1 отъ α до β), чтобы

$$-(A_{n-1} + k_{n-1}) \geq \frac{A_n}{\beta},$$

т. е. чтобы

$$k_{n-1} \leq -\left(\frac{A_n}{\beta} + A_{n-1}\right). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Такимъ образомъ k_{n-1} необходимо должно принять хотя разъ отрицательное значеніе, по числовой величинѣ $> \left[\frac{A_n}{\beta} + A_{n-1}\right]$.

2) Условіе существованія корня для втораго случая, очевидно, то же самое, только k_{n-1} можетъ быть положительнымъ, но меньшимъ нѣкотораго предѣла, если числовое значеніе $(A_{n-1}) > \frac{A_n}{\beta}$.

3) Обозначивъ черезъ (A_n) численное значеніе A_n, получимъ изъ равенства (18)

$$(A_n) = k_1(A_{n-1} + k_{n-1}), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18_1)$$

откуда заключаемъ, что въ случаѣ существованія корня между α и β должно быть выполнено условіе

$$k_{n-1} > \frac{(A_n)}{\beta} - A_{n-1}, \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

причемъ k_{n-1} должно пріобрѣсть положительное значеніе, не меньшее нѣкотораго предѣла, если $A_{n-1} < \frac{(A_n)}{\beta}$, или и отрицательное, но по числовому значенію меньшее числовой величины $\frac{(A_n)}{\beta} - A_{n-1}$, если $A_{n-1} > \left(\frac{A_n}{\beta}\right)$.

4) Легко видѣть, что для послѣдняго случая (4) условіе (20) останется неизмѣннымъ, только k_{n-1} должно принять положительное значеніе, не меньшее $\frac{(A_n)}{\beta} + (A_{n-1})$, гдѣ (A_{n-1}) обозначаетъ численное значеніе коэффиціента A_{n-1}. Само собой разумѣется, можно получить и другой рядъ неравенствъ, обратныхъ указаннымъ, причемъ вмѣсто β будетъ входить въ нихъ число α.

Равенства, слѣдующія за первымъ изъ (14), дадутъ возможность построить рядъ подобныхъ же неравенствъ для k_{n-2}, $k_{n-3} \ldots$ до k_1. Если полученные такимъ образомъ предѣлы для k_1 окажутся согласными съ данными ($\alpha < k_1 < \beta$), то между α и β можетъ существовать по крайней мѣрѣ одинъ корень; въ противномъ случаѣ уравненіе не имѣетъ ни одного корня въ разсматриваемомъ промежуткѣ.

§ 5.

Допустимъ, что при подстановкѣ двухъ значеній k_1 (α и β) получились неравенства (8). Какъ убѣдиться въ существованіи одного корня между α и β? Если производное уравненіе не имѣетъ между взятыми предѣлами ни одного корня, первообразное содержитъ не $>$ одного. Подставивъ въ первое данныя предѣльныя значенія k_1, получимъ или перемѣну неравенствъ, или постоянство. Въ послѣднемъ случаѣ, по предыдущему, мы можемъ узнать четное ли число корней содержится между α и β или ни одного. Если ни одного, первообразное уравненіе имѣетъ одинъ корень. Въ противномъ случаѣ дѣлимъ данный промежутокъ на меньшіе и, отыскавъ, въ какомъ изъ нихъ лежитъ нечетное число корней первообразнаго (или одинъ) и въ какомъ нѣтъ ни одного, примѣнимъ для перваго промежутка предыдущія сужденія по отношенію къ производному уравненію. Если оно не имѣетъ корня въ этихъ предѣлахъ, то данное имѣетъ одинъ корень. Въ противномъ случаѣ дѣлимъ промежутокъ на болѣе малые и, продолжая разсуждать подобно предыдущему, получимъ, наконецъ, предѣлы, въ которыхъ лежитъ не болѣе одного корня даннаго уравненія. Затрудненіе можетъ встрѣтиться лишь въ случаяхъ, когда корни первообразнаго и производнаго весьма близки между собою, но это представляетъ исключенія; въ большинствѣ же случаевъ отдѣленіе слѣдуетъ безъ особыхъ затрудненій.

Изъ слѣдующихъ примѣровъ убѣдимся, на сколько предлагаемый частный пріемъ проще и требуетъ меньшихъ вычисленій, чѣмъ даже совершеннѣйшій въ практическомъ отношеніи способъ Фурье. При этомъ я нарочно возьму нѣсколько примѣровъ наиболѣе благопріятныхъ для послѣдняго, приводимыхъ для его уясненія въ курсахъ Алгебры [1]).

§ 6.

Начнемъ съ простѣйшихъ примѣровъ. Отдѣлимъ положительные корни уравненія

$$x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Равенство (14) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} 6 &= k_1(1 - k_2), \\ k_2 &= k_1(2 + k_1). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

Отсюда слѣдуетъ, что 1 есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (21).

Условія существованія корня между 0 и 1 будутъ.

$$1 - k_2 \geqq 6\,, \quad \text{т. е.} \quad k_2 \leqq -5\,,$$

что, очевидно, невозможно. Слѣдовательно, данное уравненіе не имѣетъ положительныхъ вещественныхъ корней.

Переходимъ къ болѣе сложнымъ случаямъ. Опредѣлимъ, напримѣръ, число корней уравненія

$$x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 2x + 24 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

между 0 и 1. Въ данномъ случаѣ

$$\begin{aligned} 24 &= -k_1(2 + k_3), \\ k_3 &= k_1(-7 + k_2), \\ k_2 &= k_1(6 + k_1), \end{aligned}$$

[1]) См. Сохоцкій, „Высшая Алгебра". Часть I. СПБ., 1882.

Условія существованія корня будутъ

$$-(2+k_3)>24\,,$$

или

$$k_3\leq -26\,,\quad k_1(k_2-7)\leq -26\,,$$

т. е.

$$k_2-7\leq -26\,,\quad k_2\leq -19\,,$$

что невозможно, ибо $k_2>0$ при всякомъ $k_1>0$. Уравненіе (23) не имѣетъ корней между 0 и 1.

Отдѣлимъ положительные корни уравненія

$$5x^5-7x^4-9x^3+16x^2-11x+51=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;(24)$$

причемъ

$$A_n=\frac{51}{5}\,,\quad A_{n-1}=-\frac{11}{5}\,,\quad A_{n-2}=\frac{16}{5}\,,\quad A_{n-3}=-\frac{9}{5}\,,\quad A_{n-4}=-\frac{7}{5}\,.$$

Равенства (14) будутъ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{51}{5}&=-k_1\left(-\frac{11}{5}+k_4\right),\\
k_4&=k_1\left(\frac{16}{5}+k_3\right),\\
k_3&=k_1\left(-\frac{9}{5}+k_2\right),\\
k_2&=k_1\left(-\frac{7}{5}+k_1\right).
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(25)$$

Высшій предѣлъ положительныхъ корней найдется изъ условія

$$\frac{51}{5}>k_1\left(\frac{11}{5}-k_4\right),$$

или

$$\frac{11}{5}-k_4<0\,,\quad k_4>\frac{11}{5}\,,$$

$$\frac{16}{5}k_1+k_1k_3>\frac{11}{5}\,,\quad k_1k_3>0\,,$$

$$k_1^2\left(k_2-\frac{9}{5}\right)>0\,,\quad k_2>\frac{9}{5}\,,$$

и, наконецъ,

$$k_1^2-\frac{7}{5}k_1>\frac{9}{5}=1{,}8\,.$$

Отсюда заключаемъ, что $k_1 = 3$ есть высшій предѣлъ корней даннаго уравненія[1]).

Дѣлимъ промежутокъ 0, 3 на меньшіе 0, 1; 1, 2; 2, 3.

Условія существованія корня для перваго изъ нихъ будутъ

$$\frac{11}{5} - k_4 > \frac{51}{5}, \quad -k_4 > 8,$$

$$-k_1\left(\frac{16}{5} + k_3\right) > 8,$$

$$\frac{16}{5} + k_3 < -8, \quad \text{т. е.} \quad k_3 < -\frac{56}{5},$$

$$k_1\left(-\frac{9}{5} + k_2\right) < -\frac{56}{5},$$

или

$$\frac{9}{5} - k_2 > \frac{56}{5}, \quad -k_2 > \frac{47}{5},$$

и, наконецъ,

$$k_1\left(\frac{7}{5} - k_1\right) > \frac{47}{5}, \quad \frac{7}{5} - k_1 > \frac{47}{5}, \quad -k_1 > 8,$$

что, очевидно, не возможно. Отсюда заключаемъ, что между 0 и 1 нѣтъ ни одного корня уравненія. Разсмотримъ слѣдующій промежутокъ между 1 и 2.

Условія существованія корня будутъ

$$\frac{11}{5} - k_4 > \frac{51}{10}, \quad -k_4 > \frac{29}{10},$$

$$-k_1\left(\frac{16}{5} + k_3\right) > \frac{29}{10}, -\left(\frac{16}{5} + k_3\right) > \frac{29}{20},$$

$$-k_3 > \frac{93}{20},$$

$$k_1\left(\frac{9}{5} - k_2\right) > \frac{93}{20}, \quad -k_2 > \frac{93}{40} - \frac{9}{5}(-) = 4{,}2$$

$$\frac{7}{5} - k_1 > 2{,}1, \quad k_1 < -0{,}7, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

что невозможно.

---

[1]) Способъ Лагерра даетъ то же число, но требуетъ гораздо большихъ вычисленій. По способу Ньютона получается число 2.

Такимъ образомъ, между 1 и 2 также нѣтъ ни одного корня даннаго уравненія. Остается разсмотрѣть промежутокъ между 2 и 3.

Послѣднее изъ равенствъ (25) показываетъ, что въ этихъ предѣлахъ k_2 возрастаетъ, оставаясь $> \frac{6}{5}$. Такъ какъ

$$\frac{dk_3}{dk_1} = -\frac{9}{5} + k_2 + k_1 \frac{dk_2}{dk_1} = -\frac{9}{5} + k_2 + k_1\left(-\frac{7}{5} + 2k_1\right),$$

то k_3 также возрастаетъ; наименьшее значеніе его будетъ при $k_1 = 2$ и равно $-\frac{6}{5}$. Отсюда слѣдуетъ, что k_4 остается положительнымъ и большимъ $2\left(\frac{16}{5} - \frac{6}{5}\right) = 4$. Такъ какъ наибольшее значеніе $\frac{11}{5}k_1$ есть $\frac{33}{5} < \frac{51}{5}$, то равенство первое не можетъ быть удовлетворено, ибо правая его часть всегда $< \frac{33}{5}$. Слѣдовательно, между 2 и 3 нѣтъ ни одного корня уравненія (24). Итакъ, оно не имѣетъ вовсе вещественныхъ положительныхъ корней.

Въ этомъ примѣрѣ всего лучше будетъ видна простота предложеннаго пріема, если сравнимъ приведенныя сейчасъ сужденія съ вычисленіями, нужными для отдѣленія положительныхъ корней этого уравненія по способу Фурье.

Составляемъ рядъ функцій Фурье

$$\left.\begin{aligned} f &= 5x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 11x + 51\,, \\ f' &= 25x^4 - 28x^3 - 27x^2 + 32x - 11\,, \\ f'' &= 100x^3 - 84x^2 - 54x + 32\,, \\ f''' &= 300x^2 - 168x - 54\,, \\ f^{\mathrm{IV}} &= 600x - 168\,, \\ f^{\mathrm{V}} &= 600\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

Вычисляя значеніе этихъ функцій для 0, 1, 2 (*т. е. производя десять вычисленій*), получаемъ таблицу

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
0	+	−	+	−	−	+
1	+	−	−	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+

. . . (27)

откуда заключаемъ, что высшій предѣлъ корней (положительныхъ) равенъ 2. Для промежутка 0, 1 получаемъ рядъ индексовъ

$$2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0.$$

Такъ какъ послѣ перваго индекса, равнаго 1, слѣдуетъ другой также равный 1, то необходимо раздѣлить промежутокъ 0 и 1 на меньшіе, положимъ на промежутки $0, \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}, 1$. Вычисляя значеніе ряда функцій Фурье для $x=\frac{1}{2}$ (т. е. *производя еще 5 вычисленій*), получаемъ таблицу

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
0	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{1}{2}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Индексъ $f(x)$ для промежутка $\frac{1}{2}$, 1 равенъ нулю. Слѣдовательно, данное уравненіе не имѣетъ ни одного корня между $\frac{1}{2}$ и 1.

Для промежутка 0 и $\frac{1}{2}$ имѣемъ рядъ индексовъ

$$2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0.$$

Такъ какъ послѣ перваго индекса, равнаго 1, слѣдуетъ индексъ 0, то надо вычислить численное значеніе суммы

$$\text{числ. знач. } \frac{f'(0)}{f''(0)} + \text{числ. знач. } \frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)}{f''\left(\frac{1}{2}\right)},$$

которая $> \frac{1}{2}$. Отсюда слѣдуетъ, что между 0 и $\frac{1}{2}$ также нѣтъ корней. Остается разсмотрѣть промежутокъ между 1 и 2.

Таблица (27) даетъ слѣдующій рядъ индексовъ

$$2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,$$

откуда заключаемъ, что промежутокъ 1, 2 слѣдуетъ раздѣлить на меньшіе. Положимъ $x=\frac{3}{2}$ и, вычисливъ рядъ функціи (26) (т. е. *совершая еще пять вычисленій*), получимъ тѣ же знаки, что и при $x=2$. Положимъ $x=\frac{5}{4}$ и, опять вычисливъ рядъ функцій Фурье (т. е. *совершивъ еще пять вычисленій*), получаемъ таблицу

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
$\frac{3}{2}$	+	+	+	+	+	+
$\frac{5}{4}$	+	—	+	+	+	+
1	+	—	—	+	+	+

,

изъ которой видно, что между 1 и $\frac{5}{4}$ нѣтъ ни одного корня. Для промежутка $\frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ имѣемъ рядъ индексовъ

$$2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Вычисливъ численное значеніе суммы

$$\text{числ. знач.}\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)}+\text{числ. знач.}\frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{f'\left(\frac{5}{4}\right)}>\frac{1}{4},$$

утверждаемъ, что и въ данномъ промежуткѣ нѣтъ ни одного корня.

Итакъ, уравненіе (24) не имѣетъ ни одного положительнаго вещественнаго корня [1]). При этомъ приходится совершить 22 вычисленія, что, очевидно, требуетъ продолжительной затраты времени.

§ 7.

Разберемъ еще одинъ случай: отдѣлимъ корни уравненія

$$2x^5-17x^4+45x^3-23x^2-54x+42=0,\ \ldots\ldots (28)$$

заключающіеся между 3 и 4.

---

[1]) Этотъ примѣръ взятъ цѣликомъ изъ Высшей Алгебры г. Сохоцкаго. См. „Высш. Алгебра“, стр. 187.

Составимъ равенства

$$\left.\begin{aligned} 21 &= -k_1(-27+k_4), \\ k_4 &= k_1\left(-\frac{23}{2}+k_3\right), \\ k_3 &= k_1\left(\frac{45}{2}+k_2\right), \\ k_2 &= k_1\left(-\frac{17}{2}+k_1\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

При $k_1=3$ имѣемъ $21<\frac{45}{2}$, при $k_1=4$, очевидно, $21>4$.

Отсюда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ промежуткѣ лежитъ или нечетное число корней уравненія (28), или одинъ. Для производнаго уравненія

$$x^4-\frac{34}{5}x^3+\frac{27}{2}x^2-\frac{23}{5}x-\frac{27}{5}=0, \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{27}{5} &= k_1\left(k_3-\frac{23}{5}\right), \\ k_3 &= k_1\left(\frac{27}{2}+k_2\right), \\ k_2 &= k_1\left(k_1-\frac{34}{5}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Отсюда слѣдуетъ, что между 3 и 4 также находится нечетное число или одинъ корень этого уравненія. Производное уравненіе даннаго въ разсматриваемомъ случаѣ не позволяетъ сдѣлать никакихъ заключеній относительно корней послѣдняго.

Разсмотримъ производное уравненія (30)

$$x^3-\frac{51}{10}x^2+\frac{27}{4}x-\frac{23}{20}=0. \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Составимъ равенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{23}{20} &= k_1\left(\frac{27}{4}+k_2\right), \\ k_2 &= k_1(-5{,}1+k_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Такъ какъ

$$\frac{d}{dk_1}\left[k_1\left(\frac{27}{4}+k_2\right)\right]=\frac{27}{4}+k_2+k_1\frac{dk_2}{dk_1}=\frac{27}{4}+k_1(3k_1-10{,}2)\,,$$

и такъ какъ наибольшее численное значеніе втораго члена правой части этого равенства во всякомъ случаѣ $<4{,}8$, заключаемъ, что

$$k_1\left(\frac{27}{4}+k_2\right)$$

возрастаетъ при измѣненіи k_1 отъ 3 до 4. Наименьшее значеніе этого выраженія получится при $k_1=3$ и равно 1,35. Первое изъ равенствъ (33) ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть удовлетворено при измѣненіи k_1 отъ 3 до 4, и, слѣдовательно, уравненіе (32) не имѣетъ въ этомъ промежуткѣ ни одного корня. Уравненіе (30) поэтому имѣетъ въ тѣхъ же предѣлахъ лишь одинъ корень, а такъ какъ для уравненія (28) получается перемѣна знака неравенства, то и оно имѣетъ лишь одинъ корень, который такимъ образомъ и отдѣленъ. Я нарочно подобралъ примѣръ этотъ, чтобы обратить вниманіе на возможное затрудненіе при отдѣленіи корней по указанному пріему въ случаяхъ, когда корни даннаго уравненія и производнаго достаточно близки другъ къ другу. Въ разсматриваемомъ примѣрѣ они разнятся меньше, чѣмъ на 0,4, и поэтому пришлось, для упрощенія разсужденій, прибѣгнуть ко второму производному уравненію.

Если не пользоваться уравненіемъ (32), а дѣлить промежутки на меньшіе и поступать по пріему, указанному въ одномъ изъ предыдущихъ параграфовъ, придется произвести довольно продолжительный рядъ сужденій и вычисленій. Въ этомъ частномъ случаѣ методъ Фурье скорѣе приведетъ къ отдѣленію корня.

§ 8.

Слѣдуетъ замѣтить, что употребленіе указаннаго пріема особенно выгодно для доказательства отсутствія вещественнаго корня между данными предѣлами и преимущественно въ тѣхъ случаяхъ, когда численное значеніе послѣдняго коэффиціента значительно превосходитъ численное значеніе ему предшествующаго, или наоборотъ, хотя во многихъ случаяхъ отсутствіе этого условія не затрудняетъ ходъ рѣшенія. Напримѣръ, въ уравненіи

$$x^3-7x+7=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

коэффиціенты при нулевой и первой степени x-а равны между собою; однако изъ равенствъ

*

$$\left.\begin{aligned} 7 &= k_1(7 - k_2), \\ k_2 &= k_1{}^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

непосредственно слѣдуетъ, что между 0 и 1 не можетъ быть ни одного корня разсматриваемаго уравненія.

Для уравненія

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0\,, \ldots\ldots (34)$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} 1 &= k_1(1 - k_5), \\ k_5 &= k_1(1 + k_4), \\ k_4 &= k_1(-1 + k_3), \\ k_3 &= k_1(-1 + k_2), \\ k_2 &= k_1(1 + k_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots (35)$$

Изъ этихъ равенствъ заключаемъ, что, если существуетъ корень > 1, k_5 должно быть величиною положительною и меньшей 1, но k_2 возрастаетъ съ возрастаніемъ k_1 отъ 2 (оставаясь положительнымъ), k_3 также возрастаетъ отъ 1, k_4 — отъ 0, k_5 — отъ 1. Отсюда слѣдуетъ, что данное уравненіе не имѣетъ корней > 1. Рѣшеніе же вопроса о числѣ корней между 0 и 1 встрѣтитъ значительныя затрудненія; поэтому придется преобразовать это уравненіе въ другое, положивъ

$$x = x_1 - 1\,,$$

и искать корни уравненія

$$x^6 - 5x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 3x + 3 = 0\,, \ldots\ldots (36)$$

заключенные между 1 и 2, причемъ

$$\begin{aligned} 3 &= k_1(3 - k_5), \\ k_5 &= k_1(3 + k_4), \\ k_4 &= k_1(-7 + k_3), \\ k_3 &= k_1(9 + k_2), \\ k_2 &= k_1(-5 + k_1). \end{aligned}$$

Для $k_1 = 1$. $k_2 = 2$ вмѣсто перваго изъ этихъ равенствъ получается неравенство $3 > 2$. Между 1 и 2 находится, слѣдовательно, или четное число корней, или ни одного.

Въ данномъ случаѣ нельзя убѣдиться въ отсутствіи корня непосредственно для промежутка 1,2. Надо раздѣлить его на меньшіе 1, 1,1; 1,1, 1,2; и т. д. и доказывать отсутствіе корня для каждаго изъ нихъ по указанному выше пріему.

§ 9.

Мы замѣтили, что рѣшеніе задачи наиболѣе упрощается въ случаяхъ, когда численное значеніе одного изъ двухъ первыхъ (считая справа) коэффиціентовъ значительно превосходитъ численное значеніе другаго.

Положимъ, ищутся корни уравненія $f(x)=0$ въ промежуткѣ α и $\alpha+1$. Вычисляемъ численныя значенія $f(\alpha)$ и $f'(\alpha)$. Если окажется, что первое значительно $>$ втораго, то положивъ

$$x=x_1+\alpha,$$

приведемъ данное уравненіе къ такому, въ которомъ коэффиціенты удовлетворяютъ вышеупомянутымъ условіямъ, и ищемъ его корни между 0 и 1. Если же разность чиселъ $f(\alpha)$ и $f'(\alpha)$ не велика (по отношенію къ каждому изъ нихъ), полагаемъ

$$x=x_1-\beta$$

и разыскиваемъ корни преобразованнаго уравненія между $\alpha+\beta$ и $\alpha+\beta+1$, выбравъ β такъ, чтобы

$$f(-\beta)-f'(-\beta)< \text{ или } >0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (37)$$

Въ случаѣ нечетности степени функціи f удовлетворимъ первому условію, положивъ β большимъ высшаго предѣла корней уравненія

$$f(-\beta)-f'(-\beta)=0\,,$$

въ случаѣ четности — второму, причемъ можемъ увеличить разность, представляющую лѣвую часть неравенствъ (37), какъ угодно, смотря по требованіямъ задачи.

Hülfstafeln zur Berechnung oertlicher Ephemeriden für die Zeitbestimmungen nach der Zinger'schen Methode.

Von J. Kortazzi.

Die vom Herrn Professor Zinger in seiner Schrift: „Über die Zeitbestimmung nach correspondirenden Höhen verschiedener Sterne", vorgeschlagene Zeitbestimmungsmethode darf zur Zeit als die beste anerkannt werden, dank ihrer Genauigkeit, Einfachheit der Beobachtungen und Berechnungen, und Leichtigkeit der Vorbereitungen zur Ausführung der Beobachtungen. Diese Methode erfordert ferner die einfachsten Jnstrumente und kann in allen Breiten beider Hemisphären angewandt werden, mit Ausnahme natürlich nur derjenigen Orte, welche nahe an beiden Polen liegen, wo, der Natur der Aufgabe der Zeitbestimmung gemäss, sie nicht mit grosser Genauigkeit gelöst werden kann. Die von Zinger in seiner obenerwähnten Schrift nebst einigen Hülfstafeln gegebene Liste von Sternpaaren erlaubt eine örtliche Ephemeride für die Beobachtungen in beliebiger mittlerer Breite sehr einfach vorzubereiten. Es wäre nur wünschenswerth, diese Liste etwas zu erweitern, um die Zeitintervalle zwischen den für die Beobachtungen vortheilhaften Sternpaaren zu verkleinern, und, wo möglich, solche Paare auszuschliessen, welche bei geringer Höhe oder sehr weit vom 1ten Vertical zu beobachten sind.

Wie es sich herausstellt, ist es zu diesem Zwecke genügend auch Sterne 4ter Grösse mitzunehmen, da in der Zinger'schen Liste nur Sterne bis zu 3ter Grösse vorkommen. Unter Benutzung der Sterne des Berliner Jahrbuchs und zwar ausschliesslich derjenigen, für welche dort die scheinbaren Oerter gegeben sind [1]), haben wir eine neue Liste von 99 Ster-

[1]) Nur für ζ Herculis kommen die scheinbaren Oerter im Berliner Jahrbuch nicht vor. Doch haben wir diesen Stern nicht ausgeschlossen, weil man seine scheinbaren Oerter im Nautical Almanac findet.

nen, mit den Declinationen zwischen $+15^0$ und $+52^0$ zusamengestellt. Die Combination aller Sterne dieser Liste ergab bis 500 solcher Paare, welche den von Zinger in seiner Schrift gestellten Anforderungen genügen. Aus dieser grossen Anzahl von Paaren wählten wir dann 186 am meisten vortheilhafte Paare, wobei es fast immer möglich war nur diejenigen Paare zu benutzen, in welchen ε(= halbe Declinationsdifferenz) nicht grösser ist als 1^0. Nur in 8 Fällen liegt ε zwischen $60'$ und $80'$ und einmal erreicht ε, um eine Lücke von 19^m zwischen benachbarten Paaren auszufüllen, eine Grösse von 91^m. Ausnahmsweise ist ein Paar, aus α Tauri und α Bootis bestehend, beibehalten, trotz dem hier ε die Grösse von $102'$ erreicht. Sehr enge Doppelsterne wurden, da sie nur ungenau beobachtet werden können, gar nicht mitgenommen, und ausserdem wurde η Tauri ausgeschlossen, da dieser Stern leicht mit anderen Plejaden-Sternen verwechselt werden kann.

Bei der Durchsicht unserer Sternpaaren-Liste wird man bemerken, dass für die mittlere Breite von 50^0 die Zeitintervalle zwischen zwei benachbarten Paaren in nur 9 Fällen grösser sind als 15^m und nirgends grösser als 18^m.

Die mittleren Sternörter entsprechen dem Jahre 1900, so dass man unsere Tafeln noch etwa 20 Jahre bequem benutzen kann.

Wir halten es für nützlich, die von Zinger für die Berechnung der örtlichen Ephemeride gegebenen Formeln hier zusammen zu stellen. Es seien T' und T'' die Beobachtungszeiten nach dem Chronometer, dessen Correction $= u$ ist, und S' uud S'' die entsprechenden Sternzeiten in den Momenten, wann beide Sterne dieselbe Höhe erreichen, wobei der eine Stern (α', δ', t') auf der Ostseite und der andere (α'', δ'', t'') auf der Westseite des Meridians sich befindet. Dann haben wir folgende Gleichung:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos t' = \sin\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta'' \cos t''.$$

Es sei weiter:

$\delta =$ halbe Summe der Declinationen beider Sterne

$\varepsilon =$ halbe Differenz „ „ „

$t =$ halbe Summe der Studenwinkel „ „

$r =$ halbe Differenz „ „ „

das heisst:

$$\delta' = \delta + \varepsilon \qquad t' = \alpha' - S' = \alpha' - T' - u = t + r$$

$$\delta'' = \delta - \varepsilon \qquad t'' = S'' - \alpha'' = T'' + u - \alpha'' = t - r.$$

Die vorhergehende Gleichung wird, nach einigen Transformationen in folgende verwandelt:

$$\sin t \sin r + \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta \cos t \cos r = \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

wo

$$t = \frac{\alpha' - \alpha''}{2} - \frac{T' - T''}{2}, \text{ und } r = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} - \frac{T' + T''}{2} - u.$$

Die Formel (a) dient als Grundformel für die weiteren Entwickelungen.

Zur Berechnung der Ephemeride ist eine annähernde Kentniss der Sternzeit S, wann beide Sterne gleichzeitig dieselbe Höhe erreichen, nothwendig. Dann hat man $T' = T''$, $t = \frac{\alpha' - \alpha''}{2}$, $S = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} - r_0$. Aus Formel (a) bekomnt man für r den annähernden Werth:

$$r_0 = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\sin 1''} (\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec} t - \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg} t),$$

und folglich S, in Zeitminuten ausgedrückt:

$$S^m = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\sin 15'} \left(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec} \frac{\alpha' - \alpha''}{2} - \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg} \frac{\alpha' - \alpha''}{2} \right).$$

Für die mittlere Breite von 50^0 hat man:

$$S_0 = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\sin 15'} \left(\operatorname{tg} 50^0 \operatorname{cosec} \frac{\alpha' - \alpha''}{2} - \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg} \frac{\alpha' - \alpha''}{2} \right).$$

Folglich $S = S_0 + K(\operatorname{tg} 50^0 - \operatorname{tg}\varphi)$, wo $K = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\sin 15'} \operatorname{cosec} \frac{\alpha' - \alpha''}{2}$, und $(\operatorname{tg} 50^0 - \operatorname{tg}\varphi)$ bekommt man mit genügender Sicherheit aus der folgenden Tabelle:

φ	$\operatorname{tg}50^0 - \operatorname{tg}\varphi$	φ	$\operatorname{tg}50^0 - \operatorname{tg}\varphi$	φ	$\operatorname{tg}50^0 - \operatorname{tg}\varphi$	φ	$\operatorname{tg}50^0 - \operatorname{tg}\varphi$
$+30^0$	$+0·61$	$+40^0$	$+0·35$	$+50^0$	0·00	$+60^0$	$-0·54$
31	$+0·59$	41	$+0·32$	51	$-0·04$	61	$-0·61$
32	$+0·57$	42	$+0·29$	52	$-0·09$	62	$-0·69$
33	$+0·54$	43	$+0·26$	53	$-0·14$	63	$-0·77$
34	$+0·52$	44	$+0·23$	54	$-0·19$	64	$-0·86$
35	$+0·49$	45	$+0·19$	55	$-0·24$	65	$-0·95$
36	$+0·47$	46	$+0·16$	56	$-0·29$	66	$-1·05$
37	$+0·44$	47	$+0·12$	57	$-0·35$	67	$-1·16$
38	$+0·41$	48	$+0·08$	58	$-0·41$	68	$-1·28$
39	$+0·38$	49	$+0·04$	59	$-0·47$	69	$-1·41$
40	$+0·35$	50	0·00	60	$-0·54$	70	$-1·56$

Die Höhe des Sterns h_0 und sein Azimuth a_0 (von Süd nach West gerechnet) für die Sternzeit S_0 bekommt man aus den Formeln:

$$\sin h_0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(S_0 - \alpha)$$

$$\cos a_0 \cos h_0 = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos(S_0 - \alpha),$$

$$\sin a_0 \cos h_0 = \cos\delta \sin(S_0 - \alpha),$$

und daraus, wenn man $\cot g\delta \cos(S_0 - \alpha)$ durch $\cot g \Psi$

und $\cos\delta \sin(S_0 - \alpha)$ „ $\cos H$ bezeichnet, haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \sin h_0 &= \sin H \cos(\varphi - \Psi) \\ \cot g a_0 &= \operatorname{tg} H \sin(\varphi - \Psi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

Man sieht leicht, dass Ψ diejenige Breite ist, für welche der Stern im Moment S_0 den ersten Vertical erreicht und H seine Höhe für denselben Moment und dieselbe Breite. Jn dem beigelegten Verzeichnisse der Sternpaare, sind ausser S_0 und K noch die Grössen Ψ, $\lg\sin H$, $\lg \operatorname{tg} H$ angegeben, womit man nach der Formel (b) für jedes φ sehr einfach die dem Momente S_0 entsprechenden h_0 und a_0 bekommt. Um von diesen letzten Werthen von h und a zu denjenigen Werthen der Höhe und des Azimuths zu übergehen, welche einem anderen Moment S gleicher Höhe entsprechen, dienen folgende einfache Ausdrücke: $dh = -15 \cos\varphi \sin a\, dS$ und $da = 15(\sin\varphi + f\cos\varphi)\, dS$, wo $f = \cos a \operatorname{tg} h$, dS in Zeitminuten, dh und da in Bogenminuten ausgedrückt sind; dh, f und da findet man in den beigelegten Tafeln. Wir bemerken, dass die Höhen $h_0 + dh$ beider Sterne im Moment S einander gleich sein sollen, was zur Controlle dieser kleinen Rechnungen dienen kann.

Nach den oben angegebenen Vorschriften berechnet man eine Ephemeride, in welcher für die Momente S gleicher Höhe beider Sterne gegeben sind:

$a_0 =$ Azimuth des östlichen Sterns

$a_w =$ „ „ westichen „

$z =$ gemeinsame Zenitdistanz beider Sterne

Unter diesen Grössen schreibt man die nach den Tafeln III, IV und V berechneten Werthe von $\triangle a_0$, $\triangle a_w$ und $\triangle z$, wobei wir gewöhnlich $\triangle S = 3^m$ annehmen, da wir uns überzeugt haben, dass ein Zeitintervall von 6^m zwischen den Beobachtungen beider Sterne zum Uebergang von einem Stern zu dem anderen und nöthigenfalls zur Aenderung der Neigung vollkommen ausreicht.

Hat man die örtliche Ephemeride für die Breite φ berechnet, so bekommt man sehr leicht eine solche für die Breite $\varphi + d\varphi$, wo $d\varphi$ eine kleine Grösse ist (nehmen wir an—unter 1^0) wie folgt:

S kann man unverändert lassen, da sich diese Momente sogar für $d\varphi = 1^0$ bei keinem von unseren Paaren um mehr als $0^m\!.3$ verändern. Die Aenderungen von z und a findet man nach den Differenzialformeln:

$$dz = \mathrm{Cos}a \cdot d\varphi$$

$$da = - \mathrm{Sin}a \, \mathrm{Cotg}z \cdot d\varphi \, .$$

Für das gegebene $d\varphi$ bildet man zwei Hülfstabellen, mit dem Argumente: Azimuth; die eine für dz und die andere für den Logarithmus von Sin$a$. $d\varphi$. Man braucht nur diesen letzten Logarithmus zum lg. Cotg$z$ zu addiren, um lg da zu erhalten. Es sind z. B. für den Uebergang von der Breite $50^0 0'$ (Charkow) zu der Breite $50^0 27'$ (Kiew) die oben erwähnten Tabellen:

I

a_w	a_0	dz	a_0	a_w	a_w	a_0	dz	a_0	a_w
60^0	300^0	$+14' -$	240^0	120^0	70^0	290^0	$+9' -$	250^0	110^0
62	298	13	242	118	72	288	8	252	108
64	296	12	244	116	74	286	7	254	106
66	294	11	246	114	76	284	7	256	104
68	292	10	248	112	78	282	6	258	102
70	290	$+ 9' -$	250	110	80	280	$+5 -$	260	100

a_w	a_0	dz	a_0	a_w
80^0	280^0	$+5' -$	260^0	100^0
82	278	4	262	98
84	276	3	264	96
86	274	2	266	94
88	272	1	268	92
90	270	$+0 -$	270	90

II.

a_w		log (Sin$a.d\varphi$)	a_0		a_w		log (Sin$a.d\varphi$)	a_0	
60°	120°	1.369	240°	300°	75°	105°	1.416	255°	285°
61	119	.373	241	299	76	104	.418	256	284
62	118	.377	242	298	77	103	.420	257	283
63	117	.381	243	297	78	102	.422	258	282
64	116	.385	244	296	79	101	.423	259	281
65	115	1.389	245	295	80	100	1.425	260	280
66	114	.392	246	294	81	99	.426	261	379
67	113	.395	247	293	82	98	.427	262	278
68	112	.399	248	292	83	97	.428	263	277
69	111	.392	249	291	84	96	.429	264	276
70	110	1.404	250	290	85	95	1.430	265	275
71	109	.407	251	289	86	94	.430	266	274
72	108	.410	252	288	87	93	.431	267	273
73	107	.412	253	287	88	92	.431	268	272
74	106	.414	254	286	89	91	.431	269	271
75	105	1.416	255	285	90	90	1.431	270	270

Rechnet man die Azimuthen von S über W u. s. w. bis 360°, so wird da für die westlichen Sterne negativ und für die östlichen positiv.

Die Correction der beobachteten Momente wegen der Neigung i (in Bogensecunden ausgedrückt) wird nach der Formel $\tau^s = \frac{i}{15\cos\varphi\ \sin a} = Bi$ gemacht. Bei kleinem ε werden beide Sterne bei wenig verschiedenen Azimuthen (vom Meridian nach Ost und West gerechnet) beobachtet und dabei ändert sich, in der Nähe des $1^{\underline{\text{ten}}}$ Verticals, sin$a$ sehr wenig. In Folge dessen kann man bei geringer Neigung für die Coefficienten B für beide Sterne einen und denselben Werth, nur mit verschiedenen Zeichen annehmen, [1]) so dass man die Neigungscorrection von $T = \frac{T' + T''}{2}$ und von $D = T' - T''$ nach der Formeln:

$$\tau_m = B\frac{i' - i''}{2} \text{ und } Bb = B(i' + i'') \text{ berechnet.}$$

---

[1]) Zur Berechnung dieses Werths benutzt man das Mittel aus den Süd-Ost und Süd-West Azimuthen beider Sterne.

Es mag daran erinnert werden, dass für den östlichen Stern die Neigungscorrection positiv wird, wenn das Objectivende des Niveau's (unter dem Horizont) geneigt ist und für den westlichen Stern das Gegentheil. Da bei den Beobachtungen nach der Zinger'schen Methode die sichere Bestimmung der Neigung die hervorragendste Bedeutung hat, weil die Neigungsfehler beinahe die einzige Ursache der Ungenauigkeit der Resultate bilden, so muss man für jeden Stern die Niveauablesungen zweimal ausführen: kurz vor dem Durchgang und gleich nach demselben und zwar so, dass die erste Ablesung nur dann gemacht wird, wenn das Niveau, nach der Einstellung des Fernrohrs in den Azimuth, schon zur Ruhe gekommen ist.

Zur Berechnung der Beobachtungen wenden wir uns wieder zu unsrerer Grundformel:

$$\sin t \sin r + \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta \cos r = \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

und setzen hier: $\operatorname{tg} m = \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg} t$, dann ist:

$$\sin(r + m) = \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec} t \cos m\,.$$

Jn Folge der Kleinheit der Winkel ε, m und r wird es für die Rechnungen sehr bequem sein, die trigonometrischen Functionen mit Hülfe der Tafel VII in der Zinger'schen Abhandlung (in welcher die Grössen $\mathfrak{S}(x) = \lg \frac{x}{\sin x}$ in der Einheit des 5^{ten} Decimales angegeben sind mit dem Argumente x in Zeitsecunden) in Bogen auszudrücken. Wir haben also:

$$\lg\sin x = \lg x + \lg\sin 1^s - \mathfrak{S}(x)$$

$$\lg\operatorname{tg} x = \lg x + \lg\sin 1^s + 2\mathfrak{S}(x)$$

$$\lg\sec x = 3\mathfrak{S}(x)\text{, wodurch:}$$

$$\lg\operatorname{tg} m = \lg m + \lg\sin 1^s + 2\mathfrak{S}(m) = \lg\varepsilon + \lg(\operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg} t) + \lg\sin 1^s + 2\mathfrak{S}(\varepsilon)$$

und weiter:

$$\left.\begin{array}{l} \lg m = \lg\varepsilon + \lg(\operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg} t) + 2\mathfrak{S}(\varepsilon) - 2\mathfrak{S}(m)\,; \\ \text{Eben so hat man:} \\ \lg(r + m) = \lg\varepsilon + \lg(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec} t) + 2\mathfrak{S}(\varepsilon) + \mathfrak{S}(r + m) - 3\mathfrak{S}(m) \end{array}\right\} \quad (c)$$

Aus der Differenz der Zahlen, deren Logarithmen durch die Formeln (c) dargestellt sind, bekommt man r.

Die Differenz $(r + m) - m$ kann man auch mit Hülfe der Additions- und Substractions-Logarithmen finden, was besonders bequem ist, wenn

m bedeutend grösser ist, als r, um nicht diese kleine Grösse als Differenz zweier grosser Zahlen zu bestimmen.

Es sei:

$$\varepsilon \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec}t = r_0 + m_0 \qquad 2\mathfrak{S}(\varepsilon) - 3\mathfrak{S}(m) + \mathfrak{S}(r+m) = \alpha,$$

$$\varepsilon \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}t = m_0 \qquad 2\mathfrak{S}(\varepsilon) - 2\mathfrak{S}(m) = \beta.$$

Die Formeln (c) nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\lg(r+m) = \lg(r_0+m_0) + \alpha \qquad \lg m = \lg m_0 + \beta.$$

Wenn $r + m > m$, so ist

$$\lg r = \lg(r+m) - \triangle,$$

wo $\triangle$ aus den Tafeln der Additions-und Substractions-Logarithmen mit dem Argument:

$$A = \lg(r+m) - \lg m \text{ entnommen wird.}$$

Bezeichnen wir mit $\triangle_0$ die Function, welche dem Argumente $A_0 = \lg(r_0+m_0) - \lg m_0$ entspricht. Eine Aenderung des Arguments A um die kleine Grösse dA wird auch eine kleine Aenderung $d\triangle$ von $\triangle$ hervorrufen, so dass für $A = A_0 + dA = A_0 + \alpha - \beta$ wird $\triangle = \triangle_0 + d\triangle$.

Wenn wir $\triangle = \lg x$ und $A = \lg x'$ annehmen, so sind die Grössen $\triangle$ und A bekanntlich mit einander durch die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = 1 \text{ verbunden.}$$

Die Differenziation dieser letzen Gleichung ergiebt:

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dx'}{x'^2} = \frac{dlgx}{x} + \frac{dlgx'}{x'} = \frac{d\triangle}{x} + \frac{dA}{x'} = 0$$

so dass $d\triangle = -\frac{x}{x'}dA = \frac{dA}{1-x'}$; aber $\lg x' = \lg\frac{r+m}{m}$, weswegen:

$$\frac{1}{1-x'} = -\frac{m}{r}, \quad d\triangle = -\frac{m}{r}dA = \frac{m}{r}(\beta-\alpha) = \frac{m}{r}(\mathfrak{S}(m) - \mathfrak{S}(r+m)).$$

Erinnern wir daran, dass in Folge der Eigenschaft der Function $\mathfrak{S}$:

$\mathfrak{S}(a)+\mathfrak{S}(b)-\mathfrak{S}(c)=\mathfrak{S}(\sqrt{a^2+b^2-c^2})$ und $f\mathfrak{S}(a)=\mathfrak{S}(a\sqrt{f})$, so dass

$$\lg r=\lg(r+m)-\triangle_0-d\triangle=\lg(\varepsilon\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}t)-\triangle_0+2\mathfrak{S}(\varepsilon)-3\mathfrak{S}(m)+$$

$$+\mathfrak{S}(r+m)-\frac{m}{r}(\mathfrak{S}(m)-\mathfrak{S}(r+m))=$$

$$=\lg(\varepsilon\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}t)-\triangle_0+2\mathfrak{S}(\varepsilon)+\mathfrak{S}\left[\sqrt{-3m^2+(r+m)^2\left(1+\frac{m}{r}\right)-\frac{m^3}{r}}\right]$$

$$=\lg(\varepsilon\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}t)-\triangle_0+2\mathfrak{S}(\varepsilon)+\mathfrak{S}(\sqrt{r^2+3mr})\text{, oder}$$

$$\lg r=\lg(\varepsilon\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}t)-\triangle_0+\mathfrak{S}(r)+2\mathfrak{S}(\varepsilon)+3\mathfrak{S}(\sqrt{mr})$$

$$=\lg r_0+\mathfrak{S}(r)+2\mathfrak{S}(\varepsilon)+3\mathfrak{S}(\sqrt{mr}),\quad\ldots\ldots\quad(d)$$

wo $\triangle_0$ mit dem Argumente $A_0=\lg(\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}t)-\lg(\operatorname{tg}\delta\operatorname{cotg}t)$ gefunden wird.

Ist $m>r+m$, so nimmt man als Argument $\lg(\operatorname{tg}\delta\operatorname{cotg}t)-\lg(\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}t)$ und dann ist:

$$\lg(-r)=\lg(\varepsilon\operatorname{tg}\delta\operatorname{cotg}t)-\triangle_0+\mathfrak{S}(r)+2\mathfrak{S}(\varepsilon)+3\mathfrak{S}(\sqrt{mr})\ldots(d')$$

Jede Beobachtung beider Sterne auf einem und demselben Faden giebt ein unabhängiges Resultat, wenn wir dazu den entsprechenden Werth der Reduction r anwenden, da r eine Function von t und folglich des Zeitintervalls $T'-T''$ ist. Es ist nun freilich gar nicht nöthig r für jeden Faden besonders zu berechnen; man braucht nur die dem mittleren Werth t_m von t entsprechende Grösse r_m zu finden und die Aenderung von r als Function der Aenderung von t darzustellen.

Bezeichnen wir die Zeitintervalle $T'-T''$ durch D; dann haben wir für jeden Faden $t=\frac{\alpha'-\alpha''}{2}-\frac{D}{2}$ und für das Mittel aus allen Fäden $t_m=\frac{\alpha'-\alpha''}{2}-\frac{D_m}{2}$.

Wenn r der Werth ist, welchen die Reduction für t_m hat, so haben wir für jeden wenig von t_m verschiedenen Werth von t:

$$r_1=r+\frac{dr}{dt}dt+\frac{1}{2}\frac{d^2r}{dt^2}dt^2+\ldots\text{ oder}$$

$$r_1=r-\frac{1}{2}\frac{dr}{dt}dD+\frac{1}{8}\frac{d^2r}{dt^2}dD^2+\ldots$$

Um die hier vorkommenden Differenzialcoefficienten zu bestimmen, wird es genügen den annähernden Werth von r aus (a)

$$r = \frac{\varepsilon(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta \cos t)}{\sin t} \text{ zu nehmen.}$$

Daraus ergiebt sich durch zweimalige Differenziation:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\varepsilon(\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varphi \cos t)}{\sin^2 t}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\varepsilon(\operatorname{tg}\varphi(1 + \cos^2 t) - 2\operatorname{tg}\delta \cos t)}{\sin^3 t}.$$

Der Werth des zweiten Differenzialcoefficienten hängt hauptsächlich von t ab und bei abnehmendem t nähert sich das eingeklammerte Glied des Zählers $2(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta)$ und wird für die mittleren Breiten immer < 1.2 (bei kleinem t kann die Declination nicht klein sein) Da aber in unserem Verzeichniss t nie $< 26^0$ und ε nie $> 400'$ wird, so ist der Werth von $\frac{d^2r}{dt^2}$ nicht grösser, als 4500. Nach der Multiplication dieses Coefficienten mit $\frac{1}{8}\sin^2 15''$ finden wir für den Logarithmus des Coefficienten bei dD^2 den Werth $4.4735 - 10$.

Für die Zeitbestimmungen nach der Zinger'schen Methode benutzen wir gewöhnlich den transportabelen Repsold'schen Verticalkreis, welcher mit einem Netz von 8 Horizontalfäden versehen ist. Von diesen Fäden befinden sich zwei mittlere im Abstand von 26″ [1]), die anderen aber liegen symmetrisch nach beiden Seiten des mittleren Fadenpaars in nahezu gleichen Entfernungen von denselben und zwar so, dass die grösste Fadendistanz ungefähr 320″ ausmacht. Bei solchen Fadendistanzen wird der Unterschied zwischen den für den äussersten Faden gültigen Werth von D und seinem mittleren Werth D_m, sogar für die Breite von 60^0, nicht grösser als 90^s, so dass das quadratische Glied in der Reihenentwickelung von r für die äussersten Fäden höchstens einen Werth von $0^s\!.02$ erreichen kann und für das Mittel aus allen Fäden die Correction wegen dieses Gliedes die Grösse $0^s\!.01$ nie erreichen wird. Jn Folge dessen halten wir es für möglich das zweite Glied der Reduction gar nicht zu berücksichti-

[1]) Bei den Beobachtungen wurde der Moment des Sterndurchganges durch die Mitte dieses Doppelfadens notirt.

gen und begnügen uns nur mit dem ersten Glied, welches unter folgender, für die Rechnungen mehr geeigneten Form dargestellt werden kann:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\varepsilon(\text{tg}\delta - \text{tg}\varphi \cos t)}{\sin^2 t} = \frac{-\varepsilon \text{cotg} a}{\cos\varphi \sin t},$$

wo a das Mittel aus den Süd-Ost und Süd-West Azimuthen beider Sterne ist.

Schliesslich haben wir also:

$$r_1 = r + \frac{\sin 15''}{2\cos\varphi} \cdot \frac{\varepsilon \text{cotg} a}{\sin t} (D - D_m)^s \ldots \ldots \ldots (e)$$

Wir bemerken noch, dass es sogar nur selten nöthig sein wird, die Berechnung des ersten Gliedes der Reduction auszuführen, da dieses Glied für $\varepsilon = 0$ und für $a = 90^0$ gleich 0 und folglich in den meisten Fällen sehr klein wird.

Stellen wir jetzt alle für die Berechnung der Uhrcorrection nach der Zinger'schen Methode nöthigen Formeln zusammen:

Oestl. Stern.	West. Stern.		
α'	α''	Rectascensionen	Ohne Correction wegen der täglichen
δ'	δ''	Declinationen	Aberration.
T'	T''	Beobachtungszeiten nach dem Chronometer.	
i'	i''	Neigung in Bogensecunden.	

Es sei:

$$\frac{\alpha' + \alpha''}{2} = \alpha; \quad \frac{\delta' + \delta''}{2} = \delta; \quad \frac{T' + T''}{2} = T; \quad T' - T'' = D; \quad \frac{i' - i''}{2} = i;$$

$$\frac{\alpha' - \alpha''}{2} - \frac{D_m}{2} = t; \quad \frac{\delta' - \delta''}{2} \cdot \frac{1}{15} = \varepsilon.$$

Nachdem für jeden Faden T und D und Mittelwerth D_m gebildet werden, berechnet man r nach der Formeln (c):

$$\lg m = \lg\varepsilon + \lg(\text{tg}\delta \, \text{cotg} t) + 2\mathfrak{S}(\varepsilon) - 2\mathfrak{S}(m)$$

$$\lg(r + m) = \lg\varepsilon + \lg(\text{tg}\varphi \, \text{cosec} t) + 2\mathfrak{S}(\varepsilon) + \mathfrak{S}(r + m) - 3\mathfrak{S}(m)$$

oder nach einer der Formeln (d) und (d').

Weiter wird T, wenn nöthig, wegen $D - D_m$, nach der Formel

$$dT = dr = \frac{\sin 15''}{2\cos\varphi} \cdot \frac{\varepsilon \operatorname{cotg} a}{\sin t} \cdot (D - D_m) = g(D - D_m)$$

corrigirt und das Mittel T_m gebildet. Es bleibt noch die Neigungscorrection mit Hülfe des Coefficienten $B = \dfrac{1}{15\cos\varphi \sin a}$ und die Correction wegen der täglichen Aberration dem § 7 der oben citirten Zinger'schen Abhandlung gemäss anzubringen. Dann hat man:

$$u = \alpha + 0^s021 \sinh h - (T + Bi + r).$$

Als Beispiel mag hier die Berechnung von zwei Zeitbestimmungen, welche am 18 Juni 1891 in Nicolajew gemacht wurden, angeführt werden. Die Durchgänge wurden mit einem Chronometer, dessen täglicher Gang gegen die Sternzeit $= + 0^s6$ war, beobachtet.

Der Werth eines halben Niveautheils $= \dfrac{\tau}{2} = 0''71$. Die Beobachtungen wurden in solcher Lage des Instruments ausgeführt, dass das Ocular mit dem Niveau von der Richtungslinie gegen den Stern sich rechterseits befand. Die Ablesungen am linken Ende der Niveaublase wurden mit Pluszeichen genommen, so dass die Durchgänge des östlichen Sterns die Correctionen mit demselben Zeichen, wie die Niveauablesungen, und des westlichen—mit dem entgegengesetzten Zeichen erforderten.

Die Beobachtungen sind, wie folgt:

	α Canum W	θ Hercul. 0	β Draconis 0	η Ursae maj. W
z	$28^0 21'$		$19^0 14'$	
a	$87^0 12'$	$83^0 19'$	$116^0 56'$	$109^0 25'$
$i^{\frac{\tau}{2}}$	$+0.2$	$+1.7$	$+0.5$	$+0.5$
Fäden				
I	$15^h 20^m 35^s 6$	$26^m 16^s 9$	$15^h 32^m 7.0$	$37^m 59.4$
II	46.4	6.0	19.1	48.05
III	57.3	25 55.15	30.5	37.4
IV	21^m 6.6	46.0	41.9	26.7
V	16.85	35.65	52.4	16.6
VI	27.0	25.4	33 4.5	5.4
VII	37.9	14.5	16.55	36 53.8
$i^{\frac{\tau}{2}}$	$+0.3$	$+0.7$	$+2.2$	$+0.1$
$i' + i'' = b$	$+1.45$		$+1.65$	
$\dfrac{i' - i''}{2} = i$	$+0^{\frac{\tau}{2}}48$		$+0^{\frac{\tau}{2}}52$	

Die Breite des Beobachtungsortes ist $= 46^0 58' 22''1$.

Für jedes Sternpaar werden zuerst die Grössen T, D und D_m gebildet. Darnach wird r berechnet und weiter, mit den schon früher gefundenen $\lg \varepsilon$ und $\lg \sin t$ bekommt man den für die Berechnung von dT nöthigen Coefficient g. Für das erste Paar könnte man die Berechnung von dT ganz unterlassen, da hier die einzelnen Werthe von T sich sehr wenig von einander unterscheiden. Und wirklich ist g für dieses Paar sehr klein.

T	dT	T^s	D	$\lg(D-D_m)$
$15^h 23^m 26^s 25$	$-0^s 09$	26.16	$+5^m 41^s 3$	1.7959
26.2	$-$ .06	.14	$+5$ 19.6	1.6107
26.22	$-$ .03	.19	$+4$ 57.85	1.2788
26.3	0	.30	$+4$ 39.4	—
26.25	$+$ .03	.28	$+4$ 18.8	1.3010_n
26.2	$+$ .06	.26	$+3$ 58.4	1.6070_n
26.2	$+$ .09	.29	$+3$ 38.85	1.7942_n
$15^h 23^m 26^s 231$			$+4$ 38.85	

$Bi + 0.034$ $\qquad$ $Bb = B(i' + i'') = +0.10$ $\quad \lg g = \mathbf{7.1611}_n$

$\lg \varepsilon = 2.2955_n$

$\lg \operatorname{cotg} a = 8.9196$

$\lg \operatorname{cosec} t = 0.2193$

$\text{Const} = 5.7267$

T	dT	T^s	D	$\log(D-D_m)$
$15^h 35^m 3^s 20$	$+0^s 97$	4.17	$-5^m 52^s 4$	1.8283_n
3.58	$+$ .63	.21	-5 28.95	1.6424_n
3.95	$+$ .31	.26	-5 6.9	1.3393_n
4.30	0	.30	-4 44.8	9.4150
4.50	$-$ .30	.20	-4 24.2	1.3193
4.95	$-$ .63	.32	-4 0.9	1.6450
5.17	$-$ .98	.19	-3 37.25	1.8313
$15^h 35^m 4^s 236$			-4 45.06	

$Bi = +0.039$ $\qquad$ $Bb = +0.12$ $\quad \lg g = \mathbf{8.1577}_n$

$\lg \varepsilon = 2.4808$

$\lg \operatorname{cotg} a = 9.6314_n$

$\lg \operatorname{cosec} t = 0.3188$

$\text{Const} = 5.7267$

Es wird sehr bequem sein, alle diese Rechnungen in dem Beobachtungsjournal neben den notirten Werthen von T' und T'' auszuführen, da sie dort leicht controllirt werden können.

Für das 1-e Paar berechnet man T nach der Formel (c). und für das 2-e, wo r sehr klein ist, nach (d').

1-e Paar.

Sterne.		θ Hercul. 0	α Canum W
α'	δ'	$17^h52^m32^s.87$	$+37^0 15' 50'' 7$
α''	δ''	12 50 56.81	38 54 34.3
α	δ	15 21 44.84	38 5 12.5
$\frac{\alpha'-\alpha''}{2}$	$\frac{\delta'-\delta''}{2}$	2 30 48.03	— 49 21.8
$-\frac{1}{2}(D_m+b)$	ε	— 2 19.48	-197^s45
t^h =	t^0	2 28 28.55 =	$37^0 7' 8''$
$\lg\varepsilon$	$\lg\varepsilon$	2.295457_n	2.295457_n
$\lg\mathrm{tg}\varphi$	$\lg\mathrm{tg}\delta$	0.029930	9.894166
$\lg\mathrm{cosec}t$	$\lg\mathrm{cotg}t$	0.219341	0.121007
$\lg(r_0+m_0)$	$\lg m_0$	2.544728_n	2.310630_n
$2\mathfrak{S}(\varepsilon)$	$2\mathfrak{S}(\varepsilon)$	30	30
$-3\mathfrak{S}(m)$	$-2\mathfrak{S}(m)$	— 48	— 32
$\mathfrak{S}(r+m)$	r	47	$-2^m26^s.09$
$r+m$	T_m+Bi	— 350.556	15 23 26.27
$-m$	$\sum$	+ 204.469	15 21 0.18
r	$\alpha+$ Aberr	— 146.09	15 21 44.86
S	u	15^h24^m	+ 0 44.68

2-e Paar.

Sterne.		β Draconis 0.	η Ursae maj W.
α'	δ'	$17^h28^m\ 0^s.68$	$+52^0 22' 53'' 3$
α''	δ''	13 43 16.39	49 51 35.9
α	δ	15 35 38.535	51 7 14.6
$\frac{\alpha'-\alpha''}{2}$	$\frac{\delta'-\delta''}{2}$	1 52 22.145	+ 1 15 38.7
$-\frac{1}{2}(D_m+b)$	ε	+ 2 22.47	$+302^s.58$
t^h =	t^0	1 54 44.61 =	$28^0 41' 9''$
$\lg\varepsilon$	$\lg\varepsilon$	2.48084	2.48084
$\lg\mathrm{tg}\varphi$	$\lg\mathrm{tg}\delta$	0.02993	0.09350
$\lg\mathrm{cosec}t$	$\lg\mathrm{cotg}t$	0.31875	0.26188
$\lg(r_0+m_0)$	$\lg m_0$	2.82952	2.83622
Arg_0	$-\triangle_0$	0.00670	— 1.81500
$\lg(-r_0)$	r	1.02122	— 10.503
$\mathfrak{S}(r)$	T_m+Bi	0	15 35 4.275
$2\mathfrak{S}(\varepsilon)$	$\sum$	7.0	15 34 53.772
$3\mathfrak{S}(\sqrt{mr})$	$\alpha+$ Aberr.	0.8	15 35 38.553
S	u	15^h36^m	+ 0 44.78

Da die Characteristik von $(r+m)$ und m nie grösser ist, als 2, so kann die Berechnung mit fünfstelligen Logarithmen ausgeführt werden.

HÜLFSTAFELN.

I. STERNVERZEICHNISS.

№	Sternnamen.	Grösse	1900.0. δ.	1900.0. α.
1	β Leonis	2	$+15^\circ\ 8'$	$11^h 44^m 0$
2	α Tauri	1	16 18	4 30.2
3	α Bootis	1	19 42	14 11.1
4	β Arietis	3.2	20 19	1 49.1
5	110 Herculis	4	20 27	18 41.4
6	ζ Tauri	3.4	21 5	5 31.7
7	δ Leonis	2.3	21 5	11 8.8
8	β Herculis	2.3	21 42	16 25.9
9	109 Herculis	4	21 43	18 19.4
10	δ Geminor.	3.4	22 10	7 14.2
11	η Geminor.	4	22 32	6 8.8
12	μ Geminor.	3	22 34	6 16.9
13	α Arietis	2	22 59	2 1.5
14	λ Pegasi	4	23 2	22 41.7
15	ζ Androm.	4	23 43	0 42.0
16	ε Leonis	3	24 14	9 40.2
17	κ Geminor.	4.3	24 38	7 38.4
18	ε Geminor.	3.4	25 14	6 37.8
19	υ Piscium	4	26 44	1 14.0
20	41 Arietis	4	26 51	2 44.1
21	α Coronae	2	27 3	15 30.5
22	ε Coronae	4	27 10	15 53.4
23	ψ Bootis	4.5	27 20	15 0.2
24	β Pegasi	2.3	27 32	22 58.9
25	β Cygni	3	27 45	19 26.7
26	μ Herculis	3.4	27 47	17 42.5
27	ι Geminor.	4	28 0	7 19.5
28	β Geminor.	1.2	28 16	7 39.2
29	43 Comae	4	28 23	13 7.2
30	β Tauri	2	28 31	5 20.0
31	α Androm.	2	28 32	0 3.2
32	ο Herculis	4	28 45	18 3.6
33	α Triang.	4.3	29 5	1 47.4
34	β Coronae	4	29 27	15 23.7
35	η Pegasi	3	29 42	22 38.3
36	ζ Cygni	3	29 49	21 8.7
37	δ Androm.	3.4	30 19	0 34.5
38	ρ Bootis	4.3	30 49	14 27.5
39	ε Herculis	3.4	31 4	16 56.5
40	ζ Persei	3	31 35	3 47.8
41	ζ Herulis	3.2	31 47	16 37.5
42	ρ Geminor.	5.4	31 59	7 22.7
43	γ Lyrae	3.4	32 33	18 55.2
44	ι Aurigae	3	33 0	4 50.5
45	π Androm.	4	33 10	0 31.5
46	β Lyrae	4	33 15	18 46.4
47	ε Cygni	3.2	33 36	20 42.2
48	ν Urs. maj.	3.4	33 38	11 13.1
49	δ Bootis	3	33 41	15 11.5

I. STERNVERZEICHNISS.

№	Sternnamen.	Grösse	1900.0 δ.	1900.0 α.
50	θ Geminor.	3.4	+34° 5′	$6^h 46^m 2$
51	β Triang.	3	34 31	2 3.6
52	40 Lyncis	3.4	34 49	9 15.0
53	β Androm.	2.3	35 5	1 4.1
54	ξ Persei	4	35 30	3 52.5
55	π Herculis	3	36 55	17 11.5
56	θ Aurigae	3	37 12	5 52.9
57	31 Leon. min.	4.3	37 13	10 22.1
58	θ Herculis	4	37 16	17 52.8
59	μ Bootis	4	37 44	15 20.7
60	μ Androm.	4	37 57	0 51.2
61	ρ Persei	4	38 27	2 58.8
62	α Lyrae	1	38 41	18 33.6
63	γ Bootis	3.2	38 45	14 28.0
64	α Canum	3	38 52	12 51.4
65	η Herculis	3	39 7	16 39.5
66	ε Persei	3.4	39 43	3 51.1
67	γ Cygni	3.2	39 56	20 18.6
68	β Persei	2—4	40 34	3 1.6
69	β Bootis	3	40 47	14 58.2
70	ν Cygni	4	40 47	20 53.4
71	η Aurigae	4.3	41 6	4 59.5
72	ο Androm.	4.3	41 47	22 57.3
73	γ Androm.	2.3	41 51	1 57.8
74	μ Urs. maj.	3	42 0	10 16.4
75	10 Urs. maj.	4	42 11	8 54.2
76	ν Persei	4	42 16	3 38.4
77	σ Herculis	4	42 39	16 30.9
78	ι Androm.	4	42 43	23 33.2
79	δ Cygni	3	44 53	19 41.9
80	α Cygni	2.1	44 55	20 38.0
81	β Aurigae	2	44 56	5 52.2
82	ψ Urs. maj.	3	45 3	11 4.0
83	α Aurigae	1	45 54	5 9.3
84	ι Herculis	3.4	46 4	17 36.6
85	λ Bootis	4	46 33	14 12.6
86	τ Herculis	3.4	46 33	16 16.7
87	c Persei	4	47 27	4 1.4
88	δ Persei	3	47 28	3 35.8
89	υ Persei	4.3	48 7	1 31.8
90	χ Urs. maj.	4	48 20	11 40.8
91	ι Urs. maj.	3	48 26	8 52.4
92	θ Persei	4	48 48	2 37.4
93	α Persei	2	49 30	3 15.4
94	7 Lacertae	4	49 46	22 27.2
95	η Urs. maj.	2	49 49	13 43.6
96	γ Draconis	2.3	51 30	17 54.3
97	θ Urs. maj.	3	52 8	9 26.2
98	θ Bootis	4	52 19	14 21.8
99	β Draconis	3.2	52 23	17 28.2

II. STERNPAAREN-LISTE.

№ der Paare.	S_0	K	Oestliche Sterne.		Westliche Sterne.	
1	$0^h\ 0^m6$	$-\ 8^m4$	υ Persei	4.3	7 Lacertae . . .	4
2	0 5.2	— 0.5	ε Persei	3.4	γ Cygni	3.2
3	0 13.5	+ 3.8	ν Persei	4	ν Cygni	4
4	0 24.0	— 2.7	ε Persei	3.4	ν Cygni	4
5	0 33.1	— 3.7	θ Persei . . .	4	7 Lacertae . . .	4
6	0 36.9	+ 2.6	η Aurigae	4.3	γ Cygni	3.2
7	0 47.6	— 1.4	ι Aurigae	3	ε Cygni	3.2
8	0 51.5	— 0.9	α Persei	2	7 Lacertae . . .	4
9	0 52.0	+ 2.2	α Aurigae	1	α Cygni	2.1
10	1 1.5	— 4.8	β Persei	2—4	ο Andromedae . .	4.3
11	1 8.6	+ 6.0	ζ Persei	3	η Pegasi	3
12	1 15.1	0.0	β Aurigae	2	α Cygni	2.1
13	1 17.0	+ 1.7	ν Persei	4	ο Andromedae . .	4.3
14	1 27.7	— 6.9	ε Persei	3.4	ο Andromedae . .	4.3
15	1 36.5	— 1.8	ν Persei	4	ι Andromedae . .	4
16	1 43.2	+ 1.0	θ Geminorum . .	3.4	ε Cygni	3.2
17	1 59.5	— 1.9	η Aurigae	4.3	ο Andromedae . .	4.3
18	2 1.8	— 3.1	β Tauri	2	η Pegasi	3
19	2 7.2	+ 2.7	β Tauri	2	β Pegasi	2.3
20	2 18.9	— 4.9	η Aurigae	4.3	ι Andromedae . .	4
21	2 26.4	— 1.2	η Geminorum . .	4	λ Pegasi	4
22	2 30.4	— 1.1	μ Geminorum . .	3	λ Pegasi . . .	4
23	2 34.4	— 4.9	δ Persei	3	υ Persei	4.3
24	2 41.6	+ 0.0	β Tauri	2	α Andromedae . .	2
25	2 47.3	— 4.2	c Persei	4	υ Persei	4.3
26	3 0.0	— 1.9	δ Geminorum . .	3.4	λ Pegasi	4
27	3 1.7	— 6.2	β Tauri	2	δ Andromedae . .	3.4
28	3 11.8	— 3.1	β Geminorum . .	1.2	η Pegasi	3
29	3 17.4	+ 1.6	β Geminorum . .	1.2	β Pegasi	2.3
30	3 23.5	— 2.5	θ Aurigae	3	μ Andromedae . .	4
31	3 32.4	— 3.4	μ Geminorum . .	3	ζ Andromedae . .	4
32	3 42.6	— 1.3	ι Geminorum . .	4	α Andromedae . .	2
33	3 51.8	— 0.6	β Geminorum . .	1.2	α Andromedae . .	2
34	3 57.2	— 2.9	θ Geminorum . .	3.4	β Andromedae . .	2.3
35	4 8.1	+ 2.3	κ Geminorum . .	4.3	ζ Andromedae . .	4
36	4 13.9	+ 3.5	ι Geminorum . .	4	υ Piscium	4
37	4 23.1	+ 4.1	β Geminorum . .	1.2	υ Piscium	4
38	4 25.9	— 1.5	θ Geminorum . .	3.4	β Trianguli . . .	3
39	4 40.1	— 2.6	δ Geminorum . .	3.4	α Arietis	2
40	4 45.2	— 2.4	β Geminorum . .	1.2	α Trianguli . . .	4.3
41	4 49.9	+ 3.6	40 Lyncis	3.4	π Andromedae . .	4
42	5 7.9	+ 4.7	β Geminorum . .	1.2	41 Arietis	4
43	5 10.1	— 0.6	40 Lyncis	3.4	β Andromedae . .	2.3
44	5 25.5	+ 0.8	10 Ursae majoris .	4	γ Andromedae . .	2.3
45	5 38.7	+ 0.7	40 Lyncis	3.4	β Trianguli . . .	3
46	5 45.3	— 1.1	ι Ursae majoris .	3	θ Persei	4
47	5 48.0	+ 3.0	ε Leonis	3	α Arietis	2

II. STERNPAAREN-LISTE.

№№ der Sterne. O	W	OESTLICHE STERNE. lg sin H.	Ψ.	ltg H.	WESTLICHE STERNE. lg sin H.	Ψ.	ltg H.
89	94	9.9850	50°25′	0.5722_n	9.9853	52°10′	0.5770
66	67	9.8850	56 23	0.0780_n	9.8853	56 42	0.0788
76	70	9.9121	55 26	0.1510_n	9.9109	53 19	0.1473
66	70	9.9013	53 19	0.1201_n	9.9023	54 53	0.1228
92	94	9.9733	53 8	0.4419_n	9.9738	54 11	0.4458
71	67	9.8617	64 42	0.0251_n	9.8582	62 51	0.0177
44	47	9.8336	53 1	9.9694_n	9.8341	54 11	9.9702
93	94	9.9658	55 21	0.3843_n	9.9661	55 38	0.3859
83	80	9.8915	67 13	0.0940_n	9.8885	65 54	0.0865
68	72	9.9661	44 41	0.3862_n	9.9652	46 12	0.3802
40	35	9.9234	38 40	0.1867_n	9.9285	35 45	0.2045
81	80	9.8747	70 28	0.0538_n	9.8746	70 28	0.0535
76	72	9.9560	48 6	0.3245_n	9.9563	47 28	0.3260
66	72	9.9507	45 42	0.2970_n	9.9496	48 26	0.2917
76	78	9.9670	46 31	0.3926_n	9.9668	47 4	0.3918
50	47	9.7755	70 1	9.8709_n	9.7728	69 2	9.8668
71	72	9.9275	50 58	0.2009_n	9.9277	51 55	0.2015
30	35	9.8713	39 57	0.0461_n	9.8686	42 7	0.0400
30	24	9.8783	39 11	0.0621_n	9.8811	37 26	0.0687
71	78	9.9415	48 46	0.2550_n	9.9415	50 55	0.2547
11	14	9.8112	36 18	9.9292_n	9.8093	37 22	9.9259
12	14	9.8039	37 4	9.9168_n	9.8021	38 6	9.9137
88	89	9.9929	48 30	0.7402_n	9.9928	49 11	0.7373
30	31	9.9183	35 11	0.1700_n	9.9183	35 13	0.1701
87	89	9.9898	48 58	0.6587_n	9.9896	49 41	0.6552
10	14	9.7474	42 27	9.8288_n	9.7451	44 43	9.8254
30	37	9.9379	33 25	0.2401_n	9.9324	36 8	0.2188
28	35	9.7684	53 50	9.8600_n	9.7708	57 8	9.8636
28	24	9.7771	52 18	9.8734_n	9.7770	50 35	9.8733
56	60	9.9423	43 41	0.2581_n	9.9414	44 44	0.2545
12	15	9.9001	28 53	0.1166_n	9.8948	30 50	0.1026
27	31	9.8437	42 17	9.9886_n	9.8424	43 14	9.9861
28	31	9.8296	44 31	9.9619_n	9.8291	45 4	9.9610
50	53	9.9194	42 26	0.1737_n	9.9180	43 58	0.1690
17	15	9.8401	37 2	9.9817_n	9.8434	35 14	9.9880
27	19	9.8859	37 38	0.0801_n	9.8896	35 27	0.0894
28	19	9.8733	39 21	0.0505_n	9.8778	36 35	0.0608
50	51	9.9442	39 35	0.2667_n	9.9433	40 13	0.2626
10	13	9.9121_5	27 30	0.1511_n	9.9081	28 51	0.1391
28	33	9.9005	36 33	0.1179_n	9.8981	37 55	0.1113
52	45	9.8193	59 57	9.9433_n	9.8158	56 44	9.9372
28	20	9.9251	34 15	0.1926_n	9.9304	32 2	0.2112
52	53	9.8416	55 19	9.9845_n	9.8419	55 49	9.9851
75	73	9.9089	55 55	0.1415_n	9.9085	55 27	0.1403
52	53	9.8733	49 49	0.0506_n	9.8734	49 20	0.0508
91	92	9.9422	58 44	0.2578_n	9.9427	59 9	0.2601
16	13	9.8017	40 23	9.9131_n	9.8058_5	37 38	9.9200

II. STERNPAAREN-LISTE.

№ der Paare.	S_0	K	Oestliche Sterne.		Westliche Sterne.	
48	$5^h 55^m 3$	$+ 4^m 6$	10 Ursae majoris .	4	β Persei	2—4
49	6 5·0	— 3·2	ι Ursae majoris .	3	α Persei	2
50	6 13·1	+ 3·0	ι Ursae majoris .	3	δ Persei	3
51	6 16·4	— 0·3	10 Ursae majoris .	4	ν Persei	4
52	6 25·9	+ 3·3	ι Ursae majoris .	3	c Persei	4
53	6 35·2	— 2·1	40 Lyncis	3.4	ξ Persei	4
54	6 42·6	— 3·0	31 Leon. min. . . .	4.3	ρ Persei	4
55	6 55·0	+ 4·4	10 Ursae majoris .	4	η Aurigae	4.3
56	6 57·8	— 0·7	μ Ursae majoris .	3	ν Persei	4
57	7 4·0	+ 4·6	31 Leon. min. . .	4.3	ξ Persei	4
58	7 9·9	— 1·0	χ Ursae majoris .	4	θ Persei	4
59	7 23·4	— 5·8	ψ Ursae majoris .	3	δ Persei	3
60	7 26·3	+ 5·0	ν Ursae majoris .	3.4	ζ Persei	3
61	7 29·9	— 2·6	χ Ursae majoris .	4	α Persei	2
62	7 36·6	+ 2·8	μ Ursae majoris .	3	η Aurigae	4.3
63	7 49·9	+ 2·1	χ Ursae majoris .	4	c Persei	4
64	8 0·5	+ 1·7	ν Ursae majoris .	3.4	ι Aurigae	3
65	8 7·7	— 2·4	ψ Ursae majoris .	3	α Aurigae	1
66	8 10·1	— 2·9	β Leonis	2	α Tauri	1
67	8 20·2	0	δ Leonis	2.3	ζ Tauri	3.4
68	8 27·9	+ 0·4	ψ Ursae majoris .	3	β Aurigae	2
69	8 35·3	+ 4·8	η Ursae majoris .	2	δ Persei	3
70	8 47·1	— 5·0	δ Leonis	2.3	μ Geminorum . .	3
71	9 0·6	— 1·6	ν Ursae majoris .	3.4	θ Geminorum . .	3.4
72	9 12·7	+ 7·2	α Bootis	1	α Tauri	1
73	9 13·9	— 0·3	43 Comae	4	β Tauri	2
74	9 19·2	+ 4·2	α Canum	3	θ Aurigae	3
75	9 24·8	+ 4·2	δ Bootis	3	ζ Persei	3
76	9 39·9	+ 1·4	λ Bootis	4	α Aurigae	1
77	9 48·4	— 5·0	γ Bootis	3.2	η Aurigae	4.3
78	9 54·6	— 3·0	α Bootis	1	ζ Tauri	3.4
79	9 59·8	+ 3·6	λ Bootis	4	β Aurigae	2
80	10 7·5	+ 3·4	γ Bootis	3.2	θ Aurigae	3
81	10 12·5	+ 1·1	43 Comae	4	ι Geminorum . .	4
82	10 16·7	— 0·6	χ Ursae majoris .	4	ι Ursae majoris .	3
83	10 22·9	+ 0·4	43 Comae	4	β Geminorum . .	1.2
84	10 35·7	+ 1·1	μ Bootis	4	θ Aurigae	3
85	10 44·2	+ 4·7	ψ Bootis	4.5	ε Geminorum . .	3.4
86	10 57·5	— 2·9	ρ Bootis	4.3	ρ Geminorum . .	5.4
87	11 0·2	+ 4·0	α Coronae Boreal.	2	ε Geminorum . .	3.4
88	11 11·2	— 1·6	ψ Bootis	4.5	ι Geminorum . .	4
89	11 16·8	+ 4·7	η Ursae majoris .	2	ι Ursae majoris .	3
90	11 21·7	— 2·3	ψ Bootis	4.5	β Geminorum . .	1.2
91	11 28·9	+ 2·8	β Coronae Boreal.	4	β Geminorum . .	1.2
92	11 37·4	— 2·8	α Coronae Boreal.	2	β Geminorum . .	1.2
93	11 48·7	— 2·5	ε Coronae Boreal.	4	β Geminorum . .	1.2
94	11 58·4	— 3·9	β Bootis	3	10 Ursae majoris .	4

II. STERNPAAREN-LISTE.

№№ der Sterne. O	W	OESTLICHE STERNE. lg sin H.	Ψ.	ltg H.	WESTLICHE STERNE. lg sin H.	Ψ.	ltg H.
75	68	9.9311	51°54′	0.2139_n	9.9309	49°41′	0.2130
91	93	9.9526	56 33	$0\ 3066_n$	9.9538	57 46	0.3124
91	88	9.9568	55 44	0.3284_n	9 9560	54 38	0.3241
75	76	9.9456	49 34	0.2727_n	9.9456	49 40	0.2729
91	87	9.9630	54 34	0.3655_n	9.9624	53 26	0.3618
52	54	9.9293	42 13	0.2073_n	9.9282	43 15	0.2034
57	61	9.8801	52 51	0.0663_n	9.8813	54 49	0.0691
75	71	9.9684	46 14	0.4022_n	9.9691_5	44 53	0.4081
74	76	9.9160	54 16	0.1629_n	9.9163	54 39	0.1638
57	54	9.9007	49 29	0.1184_n	9.9015	46 46	0.1206
90	92	9.8967	71 22	0.1077_n	9.8984	71 55	0.1122
82	88	9.9110	60 18	0.1478_n	9 9160	63 23	0.1630
48	40	9.8562	50 28	0.0136_n	9.8570	46 43	0.0152
90	93	9.9067	67 49	0.1352_n	9.9102_5	69 13	0.1455
74	71	9.9439	49 35	0.2652_n	9.9439	48 25	0.2653
90	87	9.9175	64 35	0.1678_n	9.9154	63 31	0.1612
48	44	9.8946	44 55	0.1020_n	9.8954	43 52	0.1042
82	83	9.9400	54 21	0.2485_n	9.9408	55 24	0.2518
1	2	9.8001	24 26	9.9104_n	9.7911	27 0	9.8957
7	6	9.8920	27 28	0.9955_n	9.8920	27 28	0.0955
82	81	9.9521	52 12	0.3039_n	9.9521	52 3	0.3040
95	88	9.8907	79 18	0.0921_n	9.8795	76 32	0.0648
7	12	9.9249	25 20	0.1918_n	9.9173	27 40	0.1669
48	50	9.9496	38 28	0.2916_n	9.9488	39 5	0.2876
3	2	9.6229	53 26	9.6650_n	9.6278	41 24	0.6710
29	30	9.8214	45 49	9.9471_n	9.8212	46 6	9.9468
64	56	9.8937	53 16	0.0997_n	9.8929	50 41	0.0976
49	40	9 7456	85 2	9.8262_n	9.7248	80 45	9.7966
85	83	9.8863	70 36	0.0812_n	9.8839	69 46	0.0752
63	71	7.8331	66 49	9.9683_n	9 8429	70 43	9.9870
3	6	9.7255	39 22	9.7975_n	9.7209	43 10	9 7912
85	81	9.8973	66 52	0.1093_n	9.8927	64 44	0.0972
63	56	9.8492	62 20	9.9995_n	9.8453	59 41	9.9918
29	27	9.9000	36 46	0.1164_n	9.9010	36 8	0.1193
90	91	9.9873	50 17	0.6098_n	9.9873	50 24	0.6096
29	28	9.9117	35 38	0.1497_n	9.9121	35 26	0.1510
59	56	9.8213	67 27	9.9469_n	9.8192	66 28	9.9431
23	18	9.7800	49 39	9.8779_n	9.7819	44 47	9.8809
38	42	9.8645	44 25	$0\ 0311_n$	9.8632	46 32	0.0284
21	18	9.7541	53 14	9.8386_n	9.7535	48 46	9.8377
23	27	9.8226	43 42	9.9492_n	9.8219	45 2	9.9478
95	91	9 9650	55 54	0.3789_n	9.9640	54 23	0.3717
23	28	9.8385	41 46	9.9786_n	9.8368	43 36	9.9753
34	28	9.8249	47 23	9.9532_n	9.8262	44 58	9.9557
21	28	9.8148	44 10	9.9354_n	9 8134	46 42	9.9330
22	28	9 7969	46 47	9.9051_n	9.7961	49 14	9.9038
69	75	9.9268	50 38	0.1985_n	9 9273	52 33	0.2002

II. STERNPAAREN-LISTE.

№ der Paare.	S_0	K	Oestliche Sterne.		Westliche Sterne.	
95	$12^h\ 0^m5$	-0^m4	ζ Herculis . . .	3.2	ρ Geminorum . .	5.4
96	12 11.5	− 1.9	ε Herculis . . .	3.4	ρ Geminorum . .	5.4
97	12 15.5	− 3.2	δ Bootis	3	40 Lyncis	3.4
98	12 21.9	+ 6.0	γ Bootis	3.2	31 Leonis min. . .	3.4
99	12 36.5	+ 7.5	λ Bootis	4	ψ Ursae majoris .	3
100	12 39.3	− 4.2	β Bootis	3	μ Ursae majoris .	3
101	12 41.8	+ 1.1	σ Herculis . . .	4	10 Ursae majoris .	4
102	12 50.4	+ 1.7	μ Bootis	4	31 Leonis min. . .	4.3
103	13 2.3	− 7.4	ζ Herculis . . .	3.2	40 Lyncis	3.4
104	13 9.0	+ 4.9	π Herculis . . .	3	40 Lyncis	3.4
105	13 12.2	+ 0.2	δ Bootis	3	ν Ursae majoris .	3.4
106	13 22.6	+ 1.8	σ Herculis . . .	4	μ Ursae majoris .	3
107	13 27.3	+ 5.2	η Herculis . . .	3	31 Leonis min. . .	4.3
108	13 38.5	+ 4.8	τ Herculis . . .	3.4	ψ Ursae majoris .	3
109	13 47.4	− 0.8	π Herculis . . .	3	31 Leonis min. . .	4.3
110	14 0.6	− 6.3	τ Herculis . . .	3.4	χ Ursae majoris .	4
111	14 7.3	+ 0.1	θ Herculis . . .	4	31 Leonis min. . .	4.3
112	14 18.9	+ 2.7	ι Herculis . . .	3.4	ψ Ursae majoris .	3
113	14 25.1	+ 3.3	α Lyrae	1	31 Leonis min. . .	4.3
114	14 42.6	+ 1.6	109 Herculis . . .	4	δ Leonis	2.3
115	14 44.9	+ 1.0	η Herculis . . .	3	α Canum	3
116	14 56.6	− 1.5	110 Herculis . . .	4	δ Leonis	2.3
117	15 0.6	− 0.9	β Lyrae	4	ν Ursae majoris .	3.4
118	15 6.3	− 2.6	γ Lyrae	3.4	ν Ursae majoris .	3.4
119	15 14.6	0	τ Herculis . . .	3.4	λ Bootis	4
120	15 25.1	− 5.2	θ Herculis . . .	4	α Canum	3
121	15 34.8	+10.9	β Draconis . . .	3.2	η Ursae majoris .	2
122	15 42.8	− 0.5	α Lyrae	1	α Canum	3
123	15 48.0	+ 6.5	γ Draconis . . .	2.3	η Ursae majoris .	2
124	15 55.2	− 2.2	ι Herculis . . .	3.4	λ Bootis	4
125	15 57.7	− 0.1	ε Cygni	3.2	ν Ursae majoris .	3.4
126	16 8.1	− 3.7	γ Draconis . . .	2.3	θ Bootis	4
127	16 18.4	− 1.7	β Cygni	3	43 Comae	4
128	16 30.9	− 0.3	α Lyrae	1	γ Bootis	3.2
129	16 33.1	+ 2.6	γ Cygni	3.2	α Canum	3
130	16 49.0	+ 4.4	ν Cygni	4	α Canum	3
131	16 59.3	− 5.1	δ Cygni	3	λ Bootis	4
132	17 5.0	+ 3.3	ζ Cygni	3	43 Comae	4
133	17 21.2	+ 3.4	γ Cygni	3.2	γ Bootis	3.2
134	17 27.5	− 4.4	α Cygni	2.1	λ Bootis	4
135	17 39.8	− 2.6	γ Cygni	3.2	β Bootis	3
136	17 50.2	− 2.6	ζ Cygni	3	ρ Bootis	4.3
137	17 55.8	0	ν Cygni	4	β Bootis	3
138	17 57.0	− 0.3	ε Cygni	3.2	δ Bootis	3
139	18 1.4	− 7.7	δ Cygni	3	τ Herculis . . .	3.4

II. STERNPAAREN-LISTE.

№№ der Sterne. O	W	OESTLICHE STERNE. lg sin H.	Ψ.	ltg H.	WESTLICHE STERNE. lg sin H.	Ψ.	ltg H.
41	42	9.7830	60°14′	9.8827$_n$	9.7836	60°40′	9.8837
39	42	9.7671	61 55	9.8580$_n$	9.7706	63 55	9.8634
49	52	9.9117	42 49	9.1497$_n$	9.9103	44 35	0.1455
63	57	9.9605	43 17	0.3501$_n$	9.9626	41 24	0.3632
85	82	9.9823	49 8	0.5351$_n$	9.9826	47 27	0.5394
69	74	9.9553	46 23	0.3205$_n$	9.9547	47 58	0.3173
77	75	9.8952	59 36	0.1037$_n$	9.8943	58 56	0.1014
59	57	9.9425	44 19	0.2592$_n$	9.9431	43 35	0.2618
41	52	9.8619	46 22	0.0256$_n$	9.8612	51 48	0.0242
55	52	9.8557	56 52	0.0127$_n$	9.8538	53 5	0.0087
49	48	9.9592	37 32	0.3424$_n$	9.9593	37 28	9.3429
77	74	9.9256	53 31	0.1944$_n$	9.9253	52 38	0.1933
65	57	9.9121	50 35	0.1509$_n$	9.9126	47 43	0.1523
86	82	9.9538	53 51	0.3124$_n$	9.9530	52 3	0.3086
55	57	9.8940	50 4	0.1005$_n$	9.8939	50 33	0.1003
86	90	9.9652	51 52	0.3800$_n$	9.9660	53 54	0.3852
58	57	9.8744	53 57	0.0531$_n$	9.8745	53 51	0.0533
84	82	9.9293	57 56	0.2075$_n$	9.9281	56 38	0.2030
62	57	9.8596	59 43	0.0207$_n$	9.8568	57 15	0.0150
9	7	9.8179	34 15	9.9408$_n$	9.8208	32 55	9.9460
65	64	9.9677	42 49	0.3971$_n$	9.9680	42 29	0.3998
5	7	9.7976	33 50	9.9063$_n$	9.7946	35 15	9.9013
46	48	9.8556	49 52	0.0124$_n$	9.8554	50 36	0.0120
43	48	9.8485	49 42	9.9980$_n$	9.8487	51 42	9.9984
86	85	9.9925	47 37	0.7275$_n$	9.9925	47 37	0.7282
58	64	9.9436	43 35	0.2641$_n$	9.9421	45 49	0.2573
99	95	9.9810	55 51	0.5188$_n$	9.9794	53 14	0.5009
62	64	9.9286	47 27	0.2048$_n$	9.9286	47 42	0.2047
96	95	9.9756	55 52	0.4625$_n$	9.9744	54 8	0.4516
84	85	9.9799	48 57	0.5071$_n$	9.9798_5	49 30	0.5061
47	48	9.7892	64 2	9.8926$_n$	9.7894	64 6	9.8929
96	98	9.9825	54 34	0.5380$_n$	9.9831	55 22	0.5462
25	29	9.8817	37 41	0.0701$_n$	9.8799	38 49	0.0658
62	63	9.9625	42 57	0.3623$_n$	9.9625	43 2	0.3621
67	64	9.8863	56 31	0.0811$_n$	9.8851	54 51	0.0781
70	64	9.8743	60 45	0.0529$_n$	9.8705	57 43	0.0443
79	85	9.9480	52 42	0.2838$_n$	9.9491	54 43	0.2889
36	29	9.8142	49 42	9.9344$_n$	9.8147	46 45	9.9352
67	63	9.9264	49 30	0.1973$_n$	9.9268	47 48	0.1986
80	85	9.9306	55 57	0.2119$_n$	9.9325	58 0	0.2191
67	69	9.9404	47 25	0.2504$_n$	9.9402	48 34	0.2493
36	38	9.8753	41 30	0.0551$_n$	9.8736	43 16	0.0512
70	69	9.9285	50 22	0.2044$_n$	9.9285	50 22	0.2044
47	49	9.9219	41 29	0.1817$_n$	9.9218	41 37	0.1814
79	86	9.9794	47 44	0.5011$_n$	9.9790	49 38	0.4971

II. STERNPAAREN-LISTE.

№ der Paare.	S_0	K	Oestliche Sterne.		Westliche Sterne.	
140	18^h15^m4	$+1^m1$	ζ Cygni	3	β Coronae	4
141	18 27·4	+ 3.5	γ Cygni	3.2	η Herculis . . .	3
142	18 35·2	— 2.5	η Pegasi	3	ρ Bootis	4.3
143	18 43·4	+ 6.3	ν Cygni	4	η Herculis . . .	3
144	18 56·1	+ 2.3	ο Andromedae . .	4.3	β Bootis	3
145	19 0·5	+ 0.6	η Pegasi	3	β Coronae	4
146	19 8·8	— 6.0	α Cygni	2.1	ι Herculis	3.4
147	19 13·6	+ 1.2	β Pegasi	2.3	α Coronae	2
148	19 25·4	+ 0.9	β Pegasi	2.3	ε Coronae	4
149	19 30·5	+ 3.6	λ Pegasi	4	β Herculis	2.3
150	19 43·6	+ 3.3	α Andromedae . .	2	α Coronae	2
151	19 45·5	— 2.3	ο Andromedae . .	4.3	σ Herculis	4
152	19 50·5	— 4.0	η Pegasi	3	ε Herculis	3.4
153	19 55·4	+ 3.1	α Andromedae . .	2	ε Coronae	4
154	20 1·9	+ 0.2	ι Andromedae . .	4	σ Herculis . . .	4
155	20 11·9	— 6.2	7 Lacertae . . .	4	γ Draconis . . .	2.3
156	20 21·3	— 0.8	β Pegasi	2.3	μ Herculis . . .	3.4
157	20 31·7	+ 3.2	π Andromedae . .	4	ζ Herculis	3.2
158	20 38·9	— 3.4	δ Andromedae . .	3.4	ζ Herculis	3.2
159	20 47·1	— 1.8	δ Andromedae . .	3.4	ε Herculis	3.4
160	20 51·1	+ 2.0	α Andromedae . .	2	μ Herculis . . .	3.4
161	20 59·5	+ 2.5	μ Andromedae . .	4	π Herculis . . .	3
162	21 3·9	— 0.6	α Andromedae . .	2	ο Herculis . . .	4
163	21 11·3	— 4.3	β Andromedae . .	2.3	π Herculis . . .	3
164	21 15·6	+ 4.2	δ Andromedae . .	3.4	ο Herculis . . .	4
165	21 20·8	+ 1.7	μ Andromedae . .	4	θ Herculis	4
166	21 30·5	— 2.5	υ Piscium	4	μ Herculis . . .	3.4
167	21 39·2	— 0.2	π Andromedae . .	4	β Lyrae	4
168	21 43·7	— 2.0	μ Andromedae . .	4	α Lyrae	1
169	21 54·8	+ 0.8	α Trianguli . . .	4.3	ο Herculis	4
170	22 2·1	+ 3.2	ρ Persei	4	π Herculis . . .	3
171	22 7·5	+ 3.0	α Arietis	2	109 Herculis . . .	4
172	22 15·5	— 0.3	β Arietis	3.2	110 Herculis . . .	4
173	22 22·5	+ 3.1	β Trianguli . . .	3	β Lyrae	4
174	22 34·0	+ 3.6	α Trianguli . . .	4.3	β Cygni	3
175	22 46·6	— 0.5	ρ Persei	4	α Lyrae	1
176	22 49·8	+ 5.5	β Andromedae . .	2.3	ε Cygni	3.2
177	23 5·1	+ 5.7	γ Andromodae . .	2.3	γ Cygni	3.2
178	23 7·4	— 2.2	41 Arietis	4	β Cygni	3
179	23 10·4	+ 2.2	ε Persei	3.4	α Lyrae	1
180	23 21·0	+ 2.8	β Trianguli . . .	3	ε Cygni	3.2
181	23 23·9	+ 3.5	γ Andromedae . .	2.3	ν Cygni	4
182	23 39·0	+ 1.6	β Persei	2—4	γ Cygni	3.2
183	23 44·5	— 6.1	ν Persei	4	δ Cygni	3
184	23 48·9	— 0.5	ι Aurigae	3	β Lyrae	4
185	23 51·8	+ 0.9	ι Aurigae	3	γ Lyrae	3.4
186	23 57·9	— 0.6	β Persei	2—4	ν Cygni	4

II. STERNPAAREN-LISTE.

№№ der Sterne. O	W	OESTLICHE STERNE. lg sin H.	Ψ.	ltg H.	WESTLICHE STERNE. lg sin H.	Ψ.	ltg H.
36	34	9.9050	38°14′	0.1302_n	9.9059	37°38′	0.1328
67	65	9.9703	43 25	0.4168_n	9.9713	42 23	0.4248
35	38	9.8144	49 26	9.9347_n	9.8146	51 44	9.9351
70	65	9.9607	45 39	0.3513_n	9.9623	43 29	0.3610
72	69	9.8820	60 58	0.0707_n	9.8797	59 31	0.0653
35	34	9.8497	44 27	0.0005_n	9.8500	43 59	0 0010
80	84	9.9837	47 9	0.5544_n	9.9833	48 26	0.5493
24	21	9.8292	43 14	9.9612_n	9.8303	42 14	9.9642
24	22	9.8467	41 9	9.9944_n	9.8474	40 27	9.9958
14	8	9.8643	32 20	0.0307_n	9.8706	29 52	0.0445
31	21	9.7824	52 2	0.8817_n	0.7825	48 38	9.8818
72	77	9.9205	53 9	0.1772_n	9.9210	54 21	0.1790
35	39	9.9107	37 29	0.1468_n	9.9072	39 43	0.1367
31	22	9.8004	49 9	9.9109_n	9.8012	46 11	9.9123
78	77	9.9089	56 48	0.1414_n	9.9089	56 41	0 1414
94	96	9.9699	54 54	0.4142_n	9.9713	56 43	0.4252
24	26	9.9173	34 0	0.1669_n	9.9165	34 24	0 1643
45	41	9.8383	52 32	9.9783_n	9.8380	49 54	9.9775
37	41	9.8283	48 33	9.9596_n	9.8287	51 24	9.9602
37	39	9.8396	46 55	9.9806_n	9.8390	48 23	9.9795
31	26	9.8792	39 7	0.0642_n	9.8815	37 46	0.0695
60	55	9.8716	55 45	0.0462_n	9.8703	54 4	0.0440
31	32	9.8950	37 28	0.1030_n	9.8943	37 51	0.1014
53	55	9.8565	53 7	0.0142_n	9.8584	56 19	0.0183
37	32	9.8765	42 8	0.0578_n	9.8800	39 21	0.0661
60	58	9.8918	52 5	0.0949_n	9.8915	51 1	0.0942
19	26	9.8282	41 55	9.9594_n	9.8264	44 3	9.9560
45	46	9.9141	41 49	0.1569_n	9.9138	41 58	0.1560
60	62	9.9126	48 46	0.1526_n	9.9126	49 51	0.1523
33	32	9.8260	46 30	9.9554_n	9 8264	45 50	9.9561
61	55	9.8179	71 3	9.9408_n	9.8104	68 21	9.9278
13	9	9.7921	39 4	9.8972_n	9.7970	36 12	9.9052
4	5	9.8183	31 50	9.9416_n	9.8179	32 6	9.9409
51	46	9.8667	50 22	0.0360_n	9.8670	48 8	0.0365
33	25	9.8793	39 56	0.0644_n	9.8830	37 33	0.0732
61	62	9.8549	60 17	0.0110_n	9.8555	60 39	0.0122_5
53	47	9.9502	40 8	0.2946_n	9.9532	38 3	0.3097
73	67	9.9347	50 51	0.2274_n	9.9348	48 14	0.2278
20	25	9.8391	40 51	9.9797_n	9.8371	42 39	9.9758
66	62	9.8390	67 48	9.9795_n	9.8349	66 5	9.9717
51	47	9.9262	42 11	0.1964_n	9.9277	40 49	0.2018
73	70	9.9475	48 51	0.2815_n	9.9478	47 27	0.2829
68	67	9.9081	53 28	0.1391_n	9.9078	52 32	0.1382
76	79	9.8898	60 5	0.0899_n	9.8957	63 48	0.1050
44	46	9.7666	68 47	9.8573_n	9.7681	69 16	9.8596
44	43	9.7694	67 51	9.8615_n	9.7673	66 50	9.8583
68	70	9.9232	50 54	0.1862_n	9.9232	51 13	0.1861

III. Höhenänderungen während 10^m (in Bogenminuten)

(für östliche Sterne mit + und westliche mit —).

Argumente: Breite. φ und Azimuth a.

a \ φ	30°	32°	34°	36°	38°	40°	42°	44°	46°	48°	50°	φ / a
90°	130	127	124	121	118	115	111	108	104	100	96	90°
86	130	127	124	121	118	115	111	108	104	100	96	94
82	129	126	123	120	117	114	110	107	103	99	95	98
78	127	124	122	119	116	112	109	106	102	98	94	102
74	125	122	120	117	114	110	107	104	100	96	93	106
70	122	120	117	114	111	108	105	101	98	94	91	110
66	119	116	114	111	108	105	102	99	95	92	88	114
62	115	112	110	107	104	101	98	95	92	89	85	118
58	110	108	105	103	100	97	95	91	88	85	82	122
54	105	103	101	98	96	93	90	87	84	81	78	126
50	100	97	95	93	91	88	85	83	80	77	74	130
46	93	91	89	87	85	83	80	78	75	72	69	134
42	87	85	83	81	79	77	75	72	70	67	65	138
38	80	78	77	75	73	71	69	66	64	62	59	142
34	73	71	70	68	66	64	62	60	58	56	54	146
30	65	64	62	61	59	57	56	54	52	50	48	150

IV. Grössen $f = \cos a \operatorname{tg} h$.

Argumente: Höhe h und Azimuth a.

a \ h	12°	15°	18°	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	h / a
90°	+0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00—	90°
86	+0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04	0.05	0.05	0.06	0.06—	94
82	+0.03	0.04	0.05	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.13—	98
78	+0.04	0.06	0.07	0.08	0.09	0.11	0.12	0.14	0.15	0.17	0.19—	102
74	+0.06	0.07	0.09	0.11	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.25—	106
70	+0.07	0.09	0.11	0.13	0.15	0.17	0.20	0.22	0.25	0.28	0.31—	110
66	+0.09	0.11	0.13	0.15	0.18	0.21	0.23	0.26	0.30	0.33	0.37 –	114
62	+0.10	0.13	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30	0.34	0.38	0.42—	118
58	+0.11	0.14	0.17	0.20	0.24	0.27	0.31	0.34	0.38	0.43	0.48—	122
54	+0.12	0.16	0.19	0.23	0.26	0.30	0.34	0.38	0.43	0.48	0.53—	126
50	+0.14	0.17	0.21	0.25	0.29	0.33	0.37	0.42	0.47	0.52	0.58—	130
46	+0.15	0.19	0.23	0.27	0.31	0.35	0.40	0.45	0.50	0.56	0.63—	134
42	+0.16	0.20	0.24	0.29	0.33	0.38	0.43	0.48	0.54	0.60	0.67—	138
38	+0.17	0.21	0.26	0.30	0.35	0.40	0.45	0.51	0.57	0.64	0.71—	142
34	+0.18	0.22	0.27	0.32	0.37	0.42	0.48	0.54	0.60	0.67	0.75—	146
30	+0.18	0.23	0.28	0.33	0.39	0.44	0.50	0.56	0.63	0.70	0.78—	150

III. Höhenädernngen während 10^m (in Bogenminuten)

(für östliche Sterne mit + und westliche mit —).

Argumente: Breite. φ und Azimuth a.

a \ φ	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°	66°	68°	70°	φ / a
90°	96	92	88	84	79	75	70	66	61	56	51	90°
86	96	92	88	84	79	75	70	66	61	56	51	94
82	95	92	87	83	79	74	70	65	60	56	51	98
78	94	90	86	82	78	73	69	64	60	55	50	102
74	93	89	85	81	76	72	68	63	59	54	49	106
70	91	87	83	79	75	70	66	62	57	53	48	110
66	88	84	81	77	73	68	64	60	56	51	47	114
62	85	81	78	74	70	66	62	58	54	50	45	118
58	82	78	75	71	67	64	60	56	52	48	43	122
54	78	75	71	68	64	61	57	53	49	45	41	126
50	74	71	68	64	61	57	54	50	47	43	39	130
46	69	66	63	60	57	54	51	47	44	40	37	134
42	65	62	59	56	53	50	47	44	41	38	34	138
38	59	57	54	52	49	46	43	40	38	35	32	142
34	54	52	49	47	44	42	39	37	34	31	29	146
30	48	46	44	42	40	38	35	33	31	28	26	150

IV. Grössen $f = \cos a \operatorname{tg} h$.

Argumente: Höhe h und Azimuth a.

a \ h	42°	45°	48°	51°	54°	57°	60°	63°	66°	69°	72°	h / a
90°	+0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00—	90°
86	+0.06	0.07	0.08	0 09	0.10	0.11	0.12	0.14	0.16	0.18	0.21—	94
82	+0.13	0.14	0.15	0.17	0.19	0.21	0.24	0.27	0.31	0.36	0.43—	98
78	+0.19	0.21	0.23	0.26	0.29	0.32	0.36	0.41	0.47	0.54	0.64—	102
74	+0.25	0.28	0.31	0.34	0.38	0.42	0.48	0.54	0.62	0.72	0.85—	106
70	+0.31	0.34	0.38	0.42	0.47	0.53	0.59	0.67	0.77	0.89	1.05—	110
66	+0.37	0.41	0.45	0.50	0.56	0.63	0.70	0.80	0.91	1.06	1.25—	114
62	+0.42	0.47	0.52	0.58	0.65	0.72	0.81	0.92	1.05	1.22	1.44—	118
58	+0.48	0.53	0.59	0.65	0.73	0.82	0.92	1.04	1.19	1.38	....—	122
54	+0.53	0.59	0.65	0.73	0.81	0.91	1.02	1.15	1.32	....	....—	126
50	+0.58	0.64	0.71	0.79	0.88	0.99	1.11	1.26	1.44	....	....—	130
46	+0.63	0.69	0·77	0.86	0.96	1.07	1.20	1.36	....	....	....—	134
42	+0.67	0.74	0.83	0.92	1.02	1.14	1.29	....	....	....	....—	138
38	+0.71	0.79	0 88	0.97	1.08	1.21	1.37	....	....	....	....—	142
34	+0.75	0.83	0.92	1.02	1.14	1.28	....	....	....	....	....—	146
30	+0.78	0.87	0.96	1.07	1.19	1.33	....	....	....	....	....—	150

V. Azimuthmaenderungen während 10^m (in Bogenminuton).

Argumente: Breite φ und Grösse $f = \cos a \operatorname{tg} h$.

f \ φ	30°	32°	34°	36°	38°	40°	42°	44°	46°	48°	50°	φ / f
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
+1.3	244	245	246	246	246	246	245	244	243	242	240	+1.3
+1.2	231	232	233	234	234	234	234	234	233	232	231	+1.2
+1.1	218	219	221	222	222	223	223	223	223	222	221	+1.1
+1.0	205	207	208	209	211	211	212	212	212	212	211	+1.0
+0.9	192	194	196	197	199	200	201	201	202	202	202	+0.9
+0.8	179	181	183	185	187	188	190	190	191	192	192	+0.8
+0.7	166	168	171	173	175	177	178	180	181	182	182	+0.7
+0.6	153	156	158	161	163	165	167	169	170	172	173	+0.6
+0.5	140	143	146	149	151	154	156	158	160	162	163	+0.5
+0.4	127	130	134	137	140	142	145	147	150	152	153	+0.4
+0.3	114	118	121	124	128	131	134	136	139	141	144	+0.3
+0.2	101	105	109	112	116	119	123	126	129	131	134	+0.2
+0.1	88	92	96	100	104	108	112	115	118	121	125	+0.1
0.0	75	79	84	88	92	96	100	104	108	111	115	0.0
−0.1	62	67	71	76	81	85	89	93	98	101	105	−0.1
—0.2	49	54	59	64	69	73	78	83	87	91	96	—0.2
—0.3	36	41	47	52	57	62	67	72	77	81	86	—0.3
—0.4	23	29	34	40	45	50	56	61	66	71	76	—0.4
—0.5	10	16	22	28	33	39	45	50	56	61	67	—0.5
—0.6	3	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	—0.6
—0.7	16	10	3	3	10	16	22	29	35	41	47	—0.7
—0.8	29	22	16	9	2	4	11	18	25	31	38	—0.8
—0.9	42	35	28	21	14	7	0	7	14	21	28	—0.9
—1.0	55	48	40	33	26	18	11	4	4	11	18	—1.0
—1.1	68	60	53	45	38	30	22	14	7	1	9	—1.1
—1.2	81	73	65	57	49	41	33	25	17	9	1	—1.2
—1.3	94	86	78	70	61	53	45	36	28	19	10	—1.3
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
f / φ	30°	32°	34°	36°	38°	40°	42°	44°	46°	48°	50°	f \ φ

V. Azimuthmaenderugen während 10^m (in Bogenminuten).

Argumente: Breite φ und Grösse $f = \cos a \operatorname{tg} h$.

f \ φ	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°	66°	68°	70°	φ / f
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
+1.3	240	238	236	233	231	227	224	220	216	212	208	+1.3
+1.2	231	229	227	225	223	220	217	214	210	206	203	+1.2
+1.1	221	220	218	216	215	212	210	207	204	201	197	+1.1
+1.0	211	210	210	208	207	205	203	200	198	195	192	+1.0
+0.9	202	201	201	200	199	197	196	194	192	190	187	+0.9
+0.8	192	192	192	191	191	190	189	187	186	184	182	+0.8
+0.7	182	183	183	183	183	182	182	181	180	178	177	+0.7
+0.6	173	174	174	175	175	175	175	174	174	173	172	+0.6
+0.5	163	164	165	166	167	167	168	168	168	167	167	+0.5
+0.4	153	155	157	158	159	160	161	161	161	161	161	+0.4
+0.3	144	146	148	149	151	152	154	154	155	156	156	+0.3
+0.2	134	137	139	141	143	145	147	148	149	150	151	+0.2
+0.1	125	127	130	133	135	137	140	141	143	145	146	+0.1
0.0	115	118	121	124	127	130	132	135	137	139	141	0.0
−0.1	105	109	113	116	119	122	125	128	131	133	136	−0.1
−0.2	96	100	104	108	111	115	118	122	125	128	131	−0.2
−0.3	86	90	95	99	103	107	111	115	119	123	126	−0.3
−0.4	76	81	86	91	95	100	104	108	113	117	120	−0.4
−0.5	67	72	77	82	87	92	97	102	106	111	115	−0.5
−0.6	57	62	68	74	80	85	90	95	100	105	110	−0.6
−0.7	47	53	60	66	72	77	83	89	94	100	105	−0.7
−0.8	38	44	51	57	64	70	76	82	88	94	100	−0.8
−0.9	28	35	42	49	56	62	69	76	82	88	95	−0.9
−1.0	18	26	33	40	48	55	62	69	76	83	90	−1.0
−1.1	9	17	24	32	40	47	55	62	70	77	85	−1.1
−1.2	1	7	16	24	32	40	48	56	64	72	79	−1.2
−1.3	10	2	7	15	24	32	41	49	58	66	74	−1.3
	—	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
f / φ	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°	66°	68°	70°	f \ φ

VI. Grössen $\mathfrak{S}(x) = \text{Lg}\,\frac{x}{\sin x}$ (in der Einheit der fünften Decimale).

Argument: logarithmus x, in Zeitsecunden ausgedrückt.

Lg x^s	$\mathfrak{S}(x)$	Lg x^s	$\mathfrak{S}(x)$	Lg x^s	$\mathfrak{S}(x)$	Lg x^s	$\mathfrak{S}(x)$
1.500	0.0	2.800	15.2	3.040	46.0	3.120	66.5
.600	0.1	.810	16.0	.042	46.5	.122	67.2
.700	0.1	.820	16.7	.044	46.9	.124	67.8
.800	0.2	.830	17.5	.046	47.3	.126	68.4
1.900	0.2	.840	18.3	.048	47.8	.128	69.0
2.000	0.4	2.850	19.2	3.050	48.2	3.130	69.7
.100	0.6	.860	20.1	.052	48.6	.132	70.3
.200	1.0	.870	21.0	.054	49.1	.134	71.0
.300	1.5	.880	22.0	.056	49.6	.136	71.6
2.400	2.4	.890	23.1	.058	50.0	.138	72.3
2.400	2.4	2.900	24.2	3.060	50.5	3.140	73.0
.420	2.6	.910	25.3	.062	50.9	.142	73.6
.440	2.9	.920	26.5	.064	51.4	.144	74.3
.460	3.2	.930	27.7	.066	51.9	.146	75.0
.480	3.5	.940	29.0	.068	52.4	.148	75.7
2.500	3.8	2.950	30.4	3.070	52.9	3.150	76.4
.520	4.2	.960	31.8	.072	53.3	.152	77.1
.540	4.6	.970	33.3	.074	53.8	.154	77.8
.560	5.0	.980	34.9	.076	54.3	.156	78.5
.580	5 5	.990	36.6	.078	54.8	.158	79.3
2.600	6.1	3.000	38.3	3.080	55.4	3.160	80.0
.610	6.4	.002	38.6	.082	55.9	.162	80.7
.620	6.7	.004	39.0	.084	56.4	.164	81.5
.630	7.0	.006	39.4	.086	56.9	.166	82.2
.640	7.3	.008	39.7	.088	57.4	.168	83.0
2.650	7.6	3.010	40.1	3.090	58.0	3.170	83.8
.660	8.0	.012	40.5	.092	58.5	.172	84.6
.670	8.4	.014	40.8	.094	59.0	.174	85.3
.680	8.8	.016	41.2	.096	59.6	.176	86.1
.690	9.2	.018	41.6	.098	60.1	.178	86.9
2.700	9.6	3.020	42.0	3.100	60.7	3.180	87.7
.710	10.1	.022	42.4	.102	61.3	.182	88.5
.720	10.5	.024	42.8	.104	61.8	.184	89.4
.730	11.0	.026	43.2	.106	62.4	.186	90.2
.740	11.6	.028	43.6	.108	63.0	.188	91.0
2.750	12.1	3.030	44.0	3.110	63.5	3.190	91.9
.760	12.7	.032	44.4	.112	64.1	.192	92.7
.770	13.3	.034	44.8	.114	64.7	.194	93.6
.780	13.9	.036	45.2	.116	65.3	·196	94.4
.790	14.6	.038	45.6	.118	65.9	.198	95.3
2.800	15.2	3.040	46.0	3.120	66.5	3.200	96.2

Полная теорія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функцій съ одною перемѣнною.

В. П. Ермакова.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ дать подробную теорію наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функціи съ одною перемѣнною, принимая во вниманіе всѣ возможные случаи, когда производныя функціи обращаются въ нуль, въ безконечность, либо съ безконечно-малымъ измѣненіемъ перемѣннаго измѣняются на конечную величину.

Вся теорія можетъ быть построена на слѣдующемъ извѣстномъ соотношеніи между функціей и ея производной. Если съ возрастаніемъ перемѣннаго функція возрастаетъ, то ея первая производная положительна; если же функція убываетъ, то первая производная отрицательна. Для большей наглядности указанное соотношеніе представимъ въ формѣ слѣдующей **первой таблички**:

функція	*первая производная*
возрастаетъ	*положительна*
убываетъ	*отрицательна*

Положимъ теперь, что функція переходитъ чрезъ maximum; въ такомъ случаѣ съ возрастаніемъ перемѣнной, функція сначала возрастаетъ, потомъ убываетъ; на основаніи же указаннаго соотношенія первая производная будетъ сначала положительна, а потомъ отрицательна. Если же функція переходитъ чрезъ minimum, то первая производная должна переходить изъ отрицательнаго значенія въ положительное. Такимъ образомъ имѣемъ **вторую табличку**:

*

функція переходитъ чрезъ	*первая производная переходитъ изъ*
maximum	*положительнаго значенія въ отрицательное*
minimum	*отрицательнаго значенія въ положительное*

Въ обоихъ случаяхъ первая производная мѣняетъ знакъ. Но всякая функція можетъ мѣнять знакъ тремя способами: 1) переходя чрезъ нуль, 2) переходя чрезъ безконечность, 3) дѣлая скачокъ отъ положительной величины къ отрицательной, или обратно. Основываясь на этомъ свойствѣ и на второй табличкѣ, мы можемъ находить тѣ значенія независимаго перемѣннаго, при которыхъ данная функція *можетъ* пріобрѣтать maximum или minimum.

Пусть одно изъ найденныхъ такимъ образомъ значеній независимаго перемѣннаго будетъ $x = a$. Требуется узнать, пріобрѣтаетъ ли данная функція $f(x)$ maximum или minimum при $x = a$.

Положимъ, что первая производная переходитъ чрезъ нуль, $f'(a) = 0$.

На основаніи второй таблички наша задача сводится къ опредѣленію знаковъ $f'(x)$ для значеній независимаго перемѣннаго, весьма близкихъ къ $x = a$. Иногда это опредѣленіе знаковъ можетъ быть сдѣлано по одному внѣшнему виду функціи $f'(x)$. Но если опредѣленіе знаковъ по внѣшнему виду затруднительно, то переходимъ къ разсмотрѣнію слѣдующей производной.

Если $f'(x)$ мѣняетъ знакъ и переходитъ чрезъ нуль, то по обѣ стороны $x = a$ можно намѣтить два такіе достаточно близкіе предѣла, между которыми $f'(x)$ либо непрерывно убываетъ, либо непрерывно возрастаетъ [1]). Въ такомъ случаѣ на основаніи первой таблички производная отъ $f'(x)$, т. е. вторая производная $f''(x)$, должна сохранять постоянный знакъ. Если $f'(x)$ переходитъ изъ положительнаго значенія въ отрицательное (слѣдовательно убываетъ), то $f''(x)$ отрицательна; если же $f'(x)$ переходитъ изъ отрицательнаго значенія въ положительное, то $f''(x)$ положительна. Таким образомъ имѣемъ **третью табличку**:

---

[1]) Исключеніемъ будетъ тотъ случай, когда для значеній весьма близкихъ къ $x = a$ функція имѣетъ безконечное число maxima и minima; такой случай представляетъ $\sin \frac{1}{x}$ для значеній x весьма близкихъ $x = 0$.

функція переходитъ чрезъ	*первыя производная переходитъ чрезъ нуль*	*вторая производная остается*
maximum		*отрицательною*
minimum		*положительною*

Задача приводится къ опредѣленію знака второй производной для значеній весьма близкихъ къ $x=a$. Смотря по величинѣ $f''(a)$, изслѣдованіе распадается на четыре отдѣльныхъ случая.

Первый случай. Положимъ, что $f''(x)$ при $x=a$ обращается въ величину конечную, опредѣленную, отличную отъ нуля. Въ такомъ случаѣ $f''(x)$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ и для значеній x весьма близкихъ къ $x=a$, а потому данная функція пріобрѣтаетъ либо maximum, либо minimum. Если $f''(a)$ положительна, то на основаніи третьей таблички данная функція пріобрѣтаетъ minimum, если $f''(a)$ отрицательна, то данная функція имѣетъ maximum.

Представителемъ этого случая можетъ быть функція, приводимая къ виду

$$f(x)=A+(x-a)^2\varphi(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ A нѣкоторая постоянная величина, а функція $\varphi(x)$ такова, что при $x=a$ она не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность.

Второй случай. Положимъ, что $f''(a)=0$. Если по внѣшнему виду $f''(x)$ трудно судить о знакѣ этой функціи для значеній x весьма близкихъ къ $x=a$, то разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ.

Если данная функція пріобрѣтаетъ maximum или minimum, то по третьей табличкѣ $f''(x)$ сохраняетъ постоянный знакъ. Но если $f''(x)$, сохраняя одинъ и тотъ же знакъ, переходитъ чрезъ нуль, то этотъ нуль будетъ для $f''(x)$ либо maximum, либо minimum.

Въ частности если $f''(x)$ сохраняетъ отрицательный знакъ, то $f''(a)=0$ будетъ maximum этой функціи; если же $f''(x)$ положительна, то $f''(a)=0$ будетъ minimum. Сопоставляя это разсужденіе съ третьей табличкой, мы приходимъ къ заключенію, что *двѣ функціи* $f(x)$ *и* $f''(x)$ *одновременно пріобрѣтаютъ maximum, либо minimum, либо одновременно возрастаютъ, либо обѣ убываютъ.*

Такимъ образомъ вопросъ о томъ, пріобрѣтаетъ ли данная функція $f(x)$ maximum или minimum при $x=a$, сводится къ подобному же вопросу для $f''(x)$. *Съ этою второю функціею можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какъ и съ данною функціею.*

Представителемъ этого случая можетъ быть функція, выраженная тою же формулой (1), гдѣ функція $\varphi(x)$ такова, что при $x = a$ она обращается въ нуль.

Третій случай. Положимъ, что вторая производная при $x = a$ обращается въ безконечность, $f''(a) = \infty$. Вопросъ всетаки сводится къ опредѣленію знака $f''(x)$ для значеній x весьма близкихъ къ $x = a$. Если такое опредѣленіе затруднительно, то беремъ обратную по величинѣ функцію $\dfrac{1}{f''(x)}$, которая при $x = a$ обращается въ нуль, но должна сохранять одинъ и тотъ же знакъ, если данная функція пріобрѣтаетъ maximum или minimum.

Тѣже разсужденія, какъ и во второмъ случаѣ, приводятъ насъ къ слѣдующему заключенію. *Двѣ функціи* $f(x)$ *и* $\dfrac{1}{f''(x)}$ *одновременно пріобрѣтаютъ maximum, либо minimum, либо одновременно возрастаютъ, либо обѣ убываютъ.*

Такимъ образомъ вопросъ о томъ, пріобрѣтаетъ ли данная функція $f(x)$ maximum или minimum при $x = a$, сводится къ подобному же вопросу для функціи $\dfrac{1}{f''(x)}$. *Съ этою второю функціею можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какъ и съ данною функціею.*

Представителемъ этого случая можетъ быть функція, приводимая къ формѣ

$$f(x) = A + (x-a)^n \varphi(x), \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

гдѣ A нѣкоторая постоянная величина, показатель n заключается между единицею и двумя, а функція $\varphi(x)$ при $x = a$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность.

Четвертый случай. Положимъ, что $f''(x)$ при $x = a$ дѣлаетъ конечный скачокъ. Въ такомъ случаѣ задача приводится къ нахожденію предѣловъ выраженій

$$f''(a-h), \qquad f''(a+h) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

съ приближеніемъ положительной величины h къ нулю. Данная функція пріобрѣтаетъ maximum или minimum только въ томъ случаѣ, когда обѣ предѣльныя величины имѣютъ одинаковые знаки. Если оба предѣла отрицательны, то данная функція пріобрѣтаетъ maximum, если же оба предѣла положительны, то—minimum.

Примѣромъ этого случая можетъ служить функція

$$f(x) = A + B(x-a)^4 \left\{ \log\left(e^{\frac{1}{x-a}} + 1\right) \right\}^2 + C(x-a)^2, \quad . \ . \ . \quad (4)$$

гдѣ A, B и C — нѣкоторыя постоянныя величины. Предѣльныя величины выраженій (3) въ этомъ примѣрѣ будутъ $2C$ и $2B+2C$.

До сихъ поръ мы полагали, что первая производная переходитъ чрезъ нуль. Остается разсмотрѣть еще два случая, когда первая производная обращается въ безконечность, или дѣлаетъ конечный скачокъ.

Пятый случай. Положимъ, что первая производная переходитъ чрезъ безконечность, $f'(a)=\infty$. Въ этомъ случаѣ разсмотримъ функцію $\phi(x)=\frac{1}{f'(x)}$, которая переходитъ чрезъ нуль и должна мѣнять знакъ, если данная функція переходитъ чрезъ maximum или чрезъ minimum. Функція $\phi(x)$ должна мѣнять знакъ по тѣмъ же правиламъ, какъ и $f'(x)$, т. е. по второй табличкѣ. Если трудно по внѣшнему виду судить о знакѣ функціи $\phi(x)$, то перейдемъ къ производной этой функціи

$$\phi'(x)=-\frac{f''(x)}{f'(x)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Если $\phi(x)$ переходитъ чрезъ нуль и мѣняетъ знакъ, то по обѣ стороны $x=a$ можно найти два такіе довольно близкіе предѣла, между которыми эта функція либо непрерывно убываетъ, либо непрерывно возрастаетъ. Но въ такомъ случаѣ по первой табличкѣ $\phi'(x)$ должна сохранять постоянный знакъ. Если $\phi(x)$ переходитъ изъ положительнаго значенія въ отрицательное, то $\phi'(x)$ отрицательна, если же $\phi(x)$ переходитъ изъ отрицательнаго значенія въ положительное, то $\phi'(x)$ положительна. Но изъ равенства (5) слѣдуетъ, что $\phi'(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ противоположные знаки. Отсюда вытекаетъ **четвертая табличка:**

функція переходитъ чрезъ	*первая производная переходитъ чрезъ безконечность*	*вторая производная остается*
maximum		*положительною*
minimum		*отрицательною*

Если при $x=a$ первая производная обращается въ безконечность, то извѣстно, что при томъ же значеніи перемѣннаго и всѣ остальныя производныя также обращаются въ безконечности. По этой причинѣ разсмотримъ обратную по величинѣ функцію $\frac{1}{f''(x)}$, которая переходитъ чрезъ нуль и должна сохранять одинъ и тотъ же знакъ, если данная функція пріобрѣтаетъ maximum или minimum. Но если функція

$\frac{1}{f''(x)}$, сохраняя постоянный знакъ, переходитъ чрезъ нуль, то этотъ нуль будетъ maximum или minimum для функціи $\frac{1}{f''(x)}$.

Повторяя тѣже разсужденія, какъ и во второмъ случаѣ, мы на основаніи четвертой таблички приходимъ къ слѣдующему заключенію: *если изъ двухъ функцій $f(x)$ и $\frac{1}{f''(x)}$ одна пріобрѣтаетъ maximum при $x=a$, то другая пріобрѣтаетъ minimum при томъ же значеніи перемѣннаго; если одна изъ этихъ функцій непрерывно возрастаетъ, то другая непрерывно убываетъ.*

Такимъ образомъ нашъ вопросъ о maximum и minimum функціи $f(x)$ сводится къ подобному же вопросу для функціи $\frac{1}{f''(x)}$. Съ этою второю функціею можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какъ и съ первою.

Представителемъ этого случая можетъ быть функція, выражаемая формулой (2), гдѣ A—нѣкоторая постоянная величина, показатель n заключается между нулемъ и единицею, а функція $\varphi(x)$ при $x=a$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность.

Шестой случай. Остается разсмотрѣть еще одинъ случай, когда первая производная, при переходѣ перемѣннаго чрезъ $x=a$, измѣняется на конечную величину. Въ такомъ случаѣ нужно найти предѣлы выраженій

$$f'(a-h), \quad f'(a+h), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

съ приближеніемъ положительной величины h къ нулю. Данная функція имѣетъ maximum или minimum, если найденные предѣлы имѣютъ разные знаки.

Примѣромъ для этого случая можетъ служить функція:

$$f(x) = A + B(x-a)^2 \log(e^{\frac{1}{x-a}} + 1) + C(x-a),$$

гдѣ A, B и C—нѣкоторыя постоянныя величины. Предѣлы выраженій (6) для этого примѣра будутъ C и B.

Практическія упрощенія. Въ предыдущемъ мы видѣли, что вопросъ о maximum и minimum одной функціи приводится иногда къ подобному же вопросу для другой функціи, а для второй функціи подобнымъ же образомъ можетъ приводиться къ третьей и т. д. Можетъ случиться, что рядъ подобныхъ дѣйствій окажется безконечнымъ, что данная функція приводится къ другой—болѣе сложной. Такое обстоятельство дѣйствительно имѣетъ мѣсто, если первая или вторая производная обращается въ безконечность. Такимъ образомъ наша теорія оказывается несостоятельною. Но въ помощь теоріи можно дать нѣкоторыя практическія упрощенія, которыя при надлежащемъ навыкѣ всегда даютъ возможность привести задачу къ благополучному концу. На самомъ дѣлѣ мы видимъ, что наша задача приводится къ опредѣленію знаковъ первой, второй, либо какой-нибудь слѣдующей производной. Но знакъ всякаго выраженія не измѣнится, если мы его умножимъ или раздѣлимъ на такой множитель, который остается всегда положительнымъ.

Для примѣра положимъ, что намъ нужно найти наибольшее и наименьшее значеніе алгебраической дроби

$$\frac{F(x)}{\phi(x)}.$$

Беремъ производную

$$\frac{\phi(x)\,F'(x)-F(x)\phi'(x)}{\phi(x)^2}.$$

Такъ какъ вопросъ идетъ о знакѣ этого выраженія, то можно знаменателя отбросить. Остается выраженіе

$$\phi(x)\,F'(x)-F(x)\,\phi'(x)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

Прежде всего нужно найти такія значенія x, при которыхъ это выраженіе обращается въ нуль. Пусть одно изъ этихъ значеній будетъ $x=a$. Теперь нужно изслѣдовать знакъ этого выраженія для сосѣднихъ значеній, для каковой цѣли беремъ производную

$$\phi(x)\,F''(x)-F(x)\phi''(x).$$

Остается подставить сюда $x=a$ и изслѣдовать знакъ полученнаго выраженія.

Для второго примѣра возьмемъ

$$\varphi(x)e^{\psi(x)}.$$

Для отысканія наибольшей и наименьшей величины этого выраженія беремъ производную

$$\varphi'(x)e^{\psi(x)}+\varphi(x)\,\psi'(x)e^{\psi(x)}.$$

Здѣсь можно отбросить положительный множитель $e^{\psi(x)}$, послѣ чего получимъ:

$$\varphi'(x)+\varphi(x)\,\psi'(x).$$

Далѣе съ этимъ выраженіемъ нужно поступать такъ, какъ и съ выраженіемъ (7).

Можно дать еще упрощенія другого рода. Положимъ, что намъ нужно отыскать знакъ $F(x)$ для значеній весьма близкихъ къ $x=a$. Полагая $x=a\pm h$, получаемъ выраженіе

$$F(a\pm h),$$

въ которомъ h есть какъ угодно малая величина. Разложимъ это выраженіе какимъ-нибудь образомъ на отдѣльные члены и отбросимъ члены высшихъ порядковъ. Задача приведется къ изслѣдованію знака оставшагося выраженія.

Дополненіе. Говоря о четвертомъ случаѣ, мы предполагали, что каждый изъ предѣловъ выраженій (3) не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность. Если же предѣлъ одного изъ выраженій (3) обращается въ нуль или въ безконечность, то знакъ такого выраженія остается неизвѣстнымъ. Для устраненія этого обстоятельства прежде всего нужно надъ выраженіями (3) произвести указанныя выше упрощенія.

Для примѣра положимъ въ выраженіи (4) $C=0$; тогда предѣлъ $f''(a-h)$ обращается въ нуль. Замѣчая же, что $\log(e^{-\frac{1}{h}}+1)$ всегда положителенъ, мы отсюда заключаемъ, что знакъ $f(a-h)$ одинаковъ со знакомъ выраженія

$$\frac{f''(a-h)}{\log(e^{\frac{1}{h}}+1)}.$$

Это послѣднее выраженіе при $h=0$ обращается въ $2B$. Отсюда заключаемъ, что знакъ $f(a-h)$ одинаковъ со знакомъ B.

Сказанное здѣсь о четвертомъ случаѣ можетъ быть примѣнено и къ шестому случаю.

Кіевъ, 29 окт. 1891.

Объ осяхъ симметріи центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка.

Вѣры Ос. Шиффъ.

1. Всякая кривая линія второго порядка имѣетъ по крайней мѣрѣ одну ось симметріи. Алгебраическія кривыя высшихъ порядковъ могутъ имѣть такія оси, но могутъ и не имѣть. Возникаетъ поэтому вопросъ: въ чемъ состоитъ условіе или признакъ существованія оси симметріи для кривой, данной ея уравненіемъ, и какъ при существованіи такого условія эти оси могутъ быть найдены?

Вопросу этому, въ примѣненіи къ центральнымъ кривымъ четвертаго порядка, посвящена работа М. В. Постникова, составлявшая рефератъ секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей въ Казани и напечатанная тамъ же въ 1888 году [1]). Авторъ этого сочиненія пользуется для своей цѣли пріемами, представляющими полную аналогію съ тѣми, которые употребляются въ курсахъ Аналитической Геометріи для разысканія осей кривыхъ второго порядка.

Въ настоящей замѣткѣ предлагается другой путь къ той же цѣли, а именно, исходящій изъ понятія о діаметральныхъ кривыхъ для линій высшихъ порядковъ. По существу своему этотъ пріемъ такъ же простъ и элементаренъ какъ и предыдущій; въ общемъ онъ приложимъ къ линіямъ какого угодно четнаго порядка. Мы приложимъ его къ тѣмъ же центральнымъ кривымъ четвертаго порядка, имѣющимъ центръ.

2. Въ сочиненіи Салмона „A treatise on the hygher plane curves“ мы находимъ слѣдующее опредѣленіе діаметральныхъ кривыхъ.

Если, имѣя алгебраическую кривую порядка n, мы вообразимъ систему параллельныхъ сѣкущихъ и на каждой изъ нихъ возьмемъ точку,

---

[1]) *Постниковъ* (*М. В.*) — „Этюды по теоріи кривыхъ четвертаго порядка“. — Казань 1888 года.

между разстояніями которой ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ... ϱ_n отъ точекъ ея пересѣченія съ кривою существуетъ соотношеніе

$$\sum \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_i = 0,$$

гдѣ сумма $\sum$ распространяется на всѣ возможныя произведенія изъ n названныхъ разстояній по i множителей въ каждомъ, то геометрическое мѣсто такихъ точекъ, взятыхъ на всѣхъ сѣкущихъ даннаго направленія, будетъ кривая линія, называемая діаметральною по отношенію къ данной кривой. Давая числу i значенія 1, 2, 3, ... $(n-1)$, получимъ такимъ образомъ $m-1$ различныхъ діаметральныхъ линій, соотвѣтствующихъ одному и тому же направленію сѣкущихъ.

Положимъ, что разсматриваемая кривая n-го порядка выражается относительно прямоугольной системы координатъ уравненіемъ

$$f(x, y) = 0$$

и пусть направленіе сѣкущихъ опредѣляется угломъ φ, составляемымъ ими съ осью абсциссъ. Въ такомъ случаѣ, обозначая чрезъ x_1 и y_1 координаты какой-нибудь точки на сѣкущей, а чрезъ x и y координаты точки встрѣчи этой сѣкущей съ кривою, будемъ имѣть

$$x = x_1 + \varrho \cos\varphi \quad \text{и} \quad y = y_1 + \varrho \sin\varphi .$$

Слѣдовательно

$$f(x_1 + \varrho\cos\varphi,\ y_1 + \varrho\sin\varphi) = 0$$

или, по теоремѣ Тейлора,

$$\left.\begin{aligned} & f(x_1, y_1) + \varrho\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y_1}\sin\varphi\right] + \\ & + \frac{\varrho^2}{1.2.}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial y_1}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1{}^2}\sin^2\varphi\right] + \\ & + \ldots + \frac{\varrho^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^n}\cos^n\varphi + n\frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^{n-1}\partial y_1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + \right. \\ & \qquad\qquad \left. + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y_1{}^n}\sin^n\varphi\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Относительно ϱ это есть алгебраическое уравненіе n-ой степени, а потому, въ силу соотношенія между его коэффиціентами и корнями, будемъ имѣть, что геометрическія мѣста, опредѣляемыя уравненіями

$$\sum \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = 0, \quad \sum \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-2} = 0, \ldots \sum \varrho_1 = 0,$$

т. е. послѣдовательныя діаметральныя кривыя данной линіи n-го порядка, выражаются уравненіями:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi = 0\,,$$

. . . .

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\cos^{n-1}\varphi + (n-1)\,\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\partial y}\cos^{n-2}\varphi\sin\varphi + \ldots + \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\sin^{n-1}\varphi = 0\,.$$

Это будутъ кривыя линіи порядковъ $(n-1)$, $(n-2)$, и т. д. Послѣдняя изъ нихъ есть прямая, такъ называемый прямолинейный діаметръ. Для краткости будемъ обозначать первыя части этихъ уравненій чрезъ $\triangle_1 f$, $\triangle_2 f$, ... $\triangle_{n-1} f$.

Всякая кривая четвертаго порядка имѣетъ, такимъ образомъ, три рода діаметральныхъ линій. Діаметральныя линіи 1-го рода суть кривыя третьяго порядка, выражаемыя уравненіемъ $\triangle_1 f = 0$; діометральныя линіи 2-го рода суть коническія сѣченія $\triangle_2 f = 0$, и наконецъ діаметральныя линіи третьяго рода суть прямолинейные діаметры, коихъ уравненіе есть $\triangle_3 f = 0$.

Непосредственнымъ дифференцированіемъ легко убѣдиться, что $\triangle_1(\triangle_1 f) = \triangle_2 f$, $\triangle_1(\triangle_2 f) = \triangle_3 f$ ... и вообще $\triangle_k(\triangle_h f) = \triangle_{h+k} f$. Отсюда заключаемъ, что при одномъ и томъ же направленіи сѣкущихъ всякая діаметральная линія высшаго рода есть въ то же время діаметральная линія для діаметральныхъ линій нисшаго рода. Слѣдовательно, въ частности всякій прямолинейный діаметръ какой-либо алгебраической кривой, соотвѣтствующій данному направленію, есть въ то же время прямолинейный діаметръ для всѣхъ діаметральныхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ тому же направленію.

3. Обращаясь къ вопросу о разысканіи осей симметріи для кривыхъ четнаго порядка, замѣтимъ, что по самому понятію о такой оси разстоянія отъ нея точекъ, въ которыхъ перпендикулярная къ ней прямая пересѣкаетъ разсматриваемую кривую, должны быть попарно равны между собою и имѣть противоположные знаки. Такъ, если назовемъ эти разстоянія чрезъ ϱ_1, ϱ_2 ... ϱ_n, то будемъ имѣть $\varrho_2 = -\varrho_1$, $\varrho_4 = -\varrho_3$, и т. д.; слѣдовательно $\sum\varrho = 0$. Отсюда заключаемъ прежде всего, что всякая ось симметріи есть прямолинейный діаметръ перпендикулярный къ сѣкущимъ, которымъ онъ соотвѣтствуетъ.

Такимъ образомъ, предполагая, что φ означаетъ уголъ, составляемый съ осью абсциссъ перпендикуляромъ къ оси симметріи кривой четнаго порядка $f(x,y) = 0$, будетъ имѣть согласно предыдущему, что уравненіе этой оси будетъ $\triangle_{n-1} f = 0$.

Далѣе, изъ понятія объ оси симметріи слѣдуетъ, что если въ уравненіи (1) x_1, y_1 означаютъ координаты точки, лежащей на этой оси, то уравненіе это не должно содержать нечетныхъ степеней ϱ; также какъ и обратно. Это показываетъ, что уравненіе $\triangle_{n-1}f=0$ только тогда будетъ выражать ось симметріи, когда всѣ координаты, ему удовлетворяющія, будутъ удовлетворять и уравненіямъ

$$\triangle_1 f=0\,,\quad \triangle_3 f=0\ \ldots\ \triangle_{n-3}f=0.$$

Слѣдовательно, первая часть уравненія оси симметріи должна быть точнымъ дѣлителемъ каждаго изъ многочленовъ, представляющихъ первыя части уравненій діаметральныхъ кривыхъ нечетныхъ порядковъ.

Приложимъ это общее условіе къ разысканію осей симметріи центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка.

4. Будемъ предполагать, что кривая отнесена къ прямоугольной системѣ координатъ, начало которой находится въ центрѣ. Въ такомъ случаѣ, по самому понятію о центрѣ, уравненіе кривой не будетъ содержать членовъ нечетныхъ измѣреній. Слѣдовательно, мы можемъ разсматривать это уравненіе въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &A_1x^4+4A_2x^3y+6A_3x^2y^2+4A_4xy^3+A_5y^4+\\ &\quad+6(C_1x^2+2C_2xy+C_3y^2)+E=0. \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (2)$$

Обозначая его первую часть чрезъ $f(x,y)$, будемъ имѣть

$$\triangle_3 f=2\,.\,3\,.\,4\,[(A_1x+A_2y)\cos^3\varphi+3\,(A_2x+A_3y)\cos^2\varphi\sin\varphi+$$
$$+3(A_3x+A_4y)\cos\varphi\sin^2\varphi+(A_4x+A_5y)\sin^3\varphi]\,,$$

а потому уравненіе прямолинейнаго діаметра будетъ

$$(A_1+3A_2m+3A_3m^2+A_4m^3)\,x+(A_2+3A_3m+3A_4m^2+A_5m^3)\,y=0\ .\ (3)$$

гдѣ $m=\operatorname{tg}\varphi$.

Замѣчая далѣе, что

$$\triangle_1 f=4\,[(A_1x^3+3A_2x^2y+3A_3xy^2+A_4y^3+3C_1x+3C_2y)\cos\varphi+$$
$$+(A_2x^3+3A_3x^2y+3A_4xy^2+A_5y^3+3C_2x+3C_3y)\sin\varphi]=0\,,$$

получимъ уравненіе діаметральной кривой перваго рода въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &(A_1+A_2m)\,x^3+3\,(A_2+A_3m)\,x^2y+3\,(A_3+A_4m)\,xy^2+\\ &\quad+(A_4+A_5m)\,y^3+3(C_1+C_2m)\,x+3\,(C_2+C_3m)\,y=0\,, \end{aligned}\right\}\ .\ (4)$$

гдѣ m имѣетъ то же значеніе.

Если діаметръ (3) есть ось симметріи, то, представляя его уравненіе въ видѣ $y = m'x$, будемъ имѣть $mm' = -1$, или, замѣняя здѣсь m' его значеніемъ изъ уравненія (3),

$$\frac{m(A_1 + 3A_2 m + 3A_3 m^2 + A_4 m^3)}{A_2 + 3A_3 m + 3A_4 m^2 + A_5 m^3} = 1$$

или наконецъ

$$A_2 + (3A_3 - A_1)\,m + 3\,(A_4 - A_2)\,m^2 + (A_5 - 3A_3)\,m^3 - A_4 m^4 = 0\,. \quad (5)$$

Такъ какъ въ то же время первая часть уравненія (3), какъ показано выше, должна быть точнымъ дѣлителемъ первой части уравненія (4), то подстанавливая въ это послѣднее $-\frac{1}{m}x$ на мѣсто y, мы должны получить равенство тождественное, т. е. справедливое при всякомъ значеніи x; а это приводитъ къ двумъ слѣдующимъ условіямъ:

$$A_4 + (A_5 - 3A_3)\,m + 3\,(A_2 - A_4)\,m^2 + (3A_3 - A_1)\,m^3 - A_2 m^4 = 0\,. \quad (6)$$

$$C_2 + (C_3 - C_1)\,m - C_2 m^2 = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (7)$$

Каждое изъ условій (5), (6), (7) опредѣляетъ m, т. е. направленіе оси симметріи; изъ нихъ первые два суть относительно m уравненія четвертой степени, а послѣднее второй. Существованіе оси симметріи возможно, слѣдовательно, только тогда, когда всѣ эти три условія имѣютъ по крайней мѣрѣ одно общее рѣшеніе.

5. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, исключая изъ условій (5), (6) и (7) m, какъ величину имъ одновременно удовлетворяющую, мы получимъ зависимость между коэффиціентами уравненія (2), при которой оно выражаетъ кривую, имѣющую ось симметріи.

Это исключеніе m можетъ быть достигнуто слѣдующимъ образомъ.

Складывая уравненія (5) и (6), получимъ

$$(A_2 + A_4)(1 - m^4) + (A_5 - A_1)(1 + m^2)\,m = 0$$

или

$$(A_2 + A_4)(1 - m^2) + (A_5 - A_1)\,m = 0\,,$$

откуда

$$\frac{m}{m^2 - 1} = \frac{A_2 + A_4}{A_5 - A_1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (8)$$

Съ другой стороны изъ уравненія (7) имѣемъ

$$\frac{m}{m^2 - 1} = \frac{C_2}{C_3 - C_1}\,;$$

слѣдовательно

$$\frac{C_2}{C_3 - C_1} = \frac{A_2 + A_4}{A_5 - A_1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (9)$$

Вычитая же одно изъ другого уравненія (5) и (6) получимъ

$$(A_2 - A_4)(1 - 6m^2 + m^4) - (A_1 - 6A_2 + A_5)(1 - m^2)m = 0$$

или

$$(A_2 - A_4)[(1 - m^2)^2 - 4m^2] - (A_1 - 6A_3 + A_5)(1 - m^2)m = 0$$

или

$$(A_2 - A_4)\left[1 - \frac{4m^2}{(1 - m^2)^2}\right] - (A_1 - 6A_3 + A_5)\frac{m}{1 - m^2} = 0\,,$$

откуда вслѣдствіе равенства (8) находимъ

$$(A_2 - A_4)\left[1 - 4\frac{(A_2 + A_4)^2}{(A_5 - A_1)^2}\right] + (A_1 - 6A_3 + A_5)\frac{A_2 + A_4}{A_5 - A_1} = 0$$

или по преобразованіи

$$3A_3 = \frac{A_1A_4 + A_2A_5}{(A_2 + A_4)} + 2\,\frac{A_2{}^2 - A_4{}^2}{A_1 - A_5} \,.\;.\;.\;.\;.\; (10)$$

Равенства (9) и (10) и представляютъ искомыя соотношенія между коэффиціентами уравненія (2). Въ такомъ же видѣ они были даны и г. Постниковымъ [1]).

6. Замѣтимъ далѣе, что уравненія (5) и (6) обращаются одно въ другое при замѣнѣ m чрезъ $-\frac{1}{m}$. Это показываетъ, что если эти уравненія имѣютъ общій корень m_1, то они должны имѣть еще общій корень $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Въ такой же зависимости находятся и корни уравненія (7). Слѣдовательно, при выполненіи условій (9) и (10) кривая (2) имѣетъ двѣ перпендикулярныя между собою оси симметріи, направленіе которыхъ опредѣляется корнями уравненія (7).

Если кромѣ названныхъ двухъ корней m_1 и m_2 уравненія (5) и (6) имѣютъ еще третій общій корень m_3, то они будутъ удовлетворяться и при $m = -\frac{1}{m_3} = m_4$, т. е. будутъ имѣть всѣ четыре общіе корня. Въ этомъ случаѣ ихъ коэффиціенты должны быть пропорціональны, т. е.

$$\frac{A_2}{A_4} = \frac{3A_3 - A_1}{A_5 - 3A_3} = \frac{A_4 - A_2}{A_2 - A_4} = \frac{A_5 - 3A_3}{3A_3 - A_1} = \frac{A_4}{A_2}\,,$$

откуда

$$A_4 = -A_2 \quad \text{и} \quad A_5 = A_1 \,.\;.\;.\;.\;.\;.\; (11)$$

---

[1]) См. назван. сочин. стр. 15 и 16.

Для того чтобы всѣ четыре корня уравненій (5) и (6) соотвѣтствовали направленіямъ различныхъ осей симметріи, нужно, чтобы всѣ они удовлетворяли и уравненію (7), что возможно только тогда, когда это уравненіе тождественно, т. е. при

$$C_2 = 0 \quad \text{и} \quad C_3 = C_1 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Итакъ, при условіяхъ (11) и (12) кривая (2) имѣетъ четыре оси симметріи по двѣ перпендикулярныя между собою. Ихъ направленіе опредѣляется корнями уравненія (5), которое въ этомъ случаѣ обращается въ

$$A_2 + (3A_3 - A_1)\, m - 6A_2 m^2 - (3A_3 - A_1)\, m^3 + A_2 m^4 = 0 \, .$$

По извѣстному соотношенію между коэффиціентами и корнями уравненій будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_2 m_4 + m_3 m_4 = -6$$

или

$$m_1 m_2 + m_3 m_4 + (m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = -6 \, ,$$

откуда, замѣчая, что

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{и} \quad m_4 = -\frac{1}{m_3} \, ,$$

получимъ

$$-2 + \left(m_1 - \frac{1}{m_1}\right)\left(m_3 - \frac{1}{m_3}\right) = -6$$

или

$$(m_1{}^2 - 1)(m_3{}^2 - 1) + 4 m_1 m_3 = 0 \, ,$$

что можно представить еще въ слѣдующемъ видѣ

$$(m_1 m_3 + 1)^2 - (m_1 - m_3)^2 = 0 \, .$$

Слѣдовательно

$$\frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3} = \pm 1 \, .$$

Такъ какъ первая часть этого равенства представляетъ тангенсъ угла между прямыми, угловые коэффиціенты которыхъ равны m_1 и m_3, то заключаемъ, что всякія двѣ оси симметріи кривой (2), не перпендикулярныя между собою, составляютъ уголъ въ 45^0.

Возможенъ наконецъ случай, когда всѣ три уравненія (5), (6) и (7) удовлетворяются тождественно, т. е. при всякомъ m, и когда, слѣдовательно, всякая прямая, проходящая черезъ центръ, будетъ осью симметріи. Коэффиціенты уравненія (2) удовлетворяютъ въ этомъ случаѣ условіямъ (12) и еще условіямъ

$$A_2 = A_4 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 = A_5 = 3A_3.$$

Слѣдовательно, это уравненіе обращается въ

$$A_1(x^2 + y^2)^2 + 6C_1(x^2 + y^2) + E = 0$$

и выражаетъ, очевидно, совокупность двухъ концентрическихъ круговъ.

7. Выводъ уравненій (5), (6) и (7), послужившихъ намъ для изслѣдованія всѣхъ возможныхъ случаевъ относительно существованія осей симметріи, можетъ быть основанъ еще на другихъ соображеніяхъ, вытекающихъ изъ того, что сказано нами въ началѣ. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что ось симметріи всякой кривой четнаго порядка, будучи ея прямолинейнымъ діаметромъ, должна быть въ то же время діаметромъ для всякой діаметральной линіи, соотвѣтствующей тому же направленію. Примѣнимъ это къ діаметральнымъ кривымъ второго рода $\triangle_2 f = 0$. Для кривой четвертаго порядка, данной уравненіемъ (2), это будутъ кривыя второго порядка, выражаемыя вообще уравненіемъ

$$(A_1 + 2A_2m + A_3m^2)\,x^2 + 2\,(A_2 + 2A_3m + A_4m^2)\,xy +$$
$$+ (A_3 + 2A_4m + A_5m^2)\,y^2 + (C_1 + 2C_2m + C_3m^2) = 0.$$

Такъ какъ предполагаемая ось симметріи должна совпадать съ одною изъ осей этой кривой, то, обозначая чрезъ α уголъ наклоненія этой оси къ оси абсциссъ, будемъ имѣть, какъ извѣстно изъ теоріи кривыхъ второго порядка,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2(A_2 + 2A_3m + A_4m^2)}{(A_3 - A_1) + 2\,(A_4 - A_2)\,m + (A_5 - A_3)\,m^2}$$

но такъ какъ

$$m = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha + 90^0) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

то

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2m}{1 - m^2}$$

и слѣдовательно

$$\frac{m}{1 - m^2} = \frac{-(A_2 + 2A_3m + A_4m^2)}{(A_3 - A_1) + 2(A_4 - A_2)\,m + (A_5 - A_3)\,m^2}.$$

Отсюда, по уничтоженіи знаменателей и приведеніи, и получимъ уравненіе (5).

Уравненіе (6) получимъ точно также, предполагая направленіе сѣкущихъ перпендикулярнымъ къ прежнему, т. е. замѣня m чрезъ $-\dfrac{1}{m}$.

Что касается уравненія (7), то его получимъ, примѣняя тѣ же разсужденія непосредственно къ уравненію кривой (2). Въ самомъ дѣлѣ, измѣнивши направленіе осей координатъ такъ, чтобы ось абсциссъ совпадала съ осью симметріи, мы будемъ имѣть, что въ новомъ уравненіи исчезнутъ всѣ члены, содержащіе нечетныя степени y и въ частности обратится въ нуль коэффиціентъ при произведеніи xy. Такъ какъ формулы для такого преобразованія координатъ суть

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \qquad \text{и} \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

то этотъ коэффиціентъ будетъ

$$6[-2(C_1 - C_3)\sin\alpha\cos\alpha + 2C_2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)];$$

слѣдовательно

$$(C_3 - C_1)\operatorname{tg}\alpha + C_2(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 0.$$

Здѣсь α имѣетъ то же значеніе, какъ и въ предыдущемъ, а потому, замѣняя $\operatorname{tg}\alpha$ чрезъ $-\dfrac{1}{m}$, мы и получимъ уравненіе (7).

8. Разсмотрѣніе діаметральныхъ кривыхъ различныхъ порядковъ, соотвѣтствующихъ осямъ симметріи, можетъ быть очень полезно при изслѣдованіи возможныхъ частныхъ видовъ центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка или ихъ классификаціи. Если предположимъ, что двѣ перпендикулярныя между собою оси симметріи такой кривой приняты за оси координатъ, то ея уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4 + Dx^2 + Ey^2 + F = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Уравненія ея діаметральныхъ кривыхъ перваго рода, соотвѣтствующихъ сѣкущимъ, перпендикулярнымъ къ этимъ осямъ, будутъ

$$x(2Ax^2 + By^2 + D) = 0 \qquad \text{и} \qquad y(Bx^2 + 2Cy^2 + E) = 0.$$

Отъ вида и взаимныхъ отношеній кривыхъ второго порядка

$$2Ax^2 + By^2 + D = 0 \qquad \text{и} \qquad Bx^2 + 2Cy^2 + E = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

должны, очевидно, зависѣть видъ и частныя свойства самой кривой. Вторую изъ этихъ кривыхъ второго порядка г. Постниковъ дѣйствительно разсматриваетъ съ цѣлью классификаціи кривыхъ четвертаго

*

порядка, называя ее основаніемъ. Намъ кажется, что въ видахъ геометрической наглядности и ясности полѣзнѣе разсматривать обѣ эти кривыя совмѣстно. Случаи, когда онѣ обѣ суть эллипсы, обѣ гиперболы, одна эллипсъ, а другая гипербола, когда онѣ пересѣкаются или соприкасаются, когда онѣ подобны и т. д., должны быть особыми случаями по отношенію къ свойствамъ самой кривой (13), также какъ и обратно. Такъ напр., когда кривая (13) имѣетъ четыре оси симметріи, то, согласно сказанному выше, должно быть

$$A = C \quad \text{и} \quad D = E.$$

Слѣдовательно, кривыя (14) въ этомъ случаѣ тождественны и различаются только положеніемъ. Каждая изъ нихъ приводится въ совпаденіе съ другою, будучи повергнута около центра на прямой уголъ.

Систематическое изслѣдованіе центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка на основаніи указанныхъ признаковъ не входитъ, впрочемъ, въ скромныя цѣли настоящей замѣтки.

О равновѣсіи упругихъ тѣлъ вращенія.

В. А. Стеклова.

I. Ортогональныя системы координатъ.

§ 1.

Относя тѣло къ какой-либо прямоугольной системѣ координатъ, оси которой назовемъ черезъ x, y и z, обозначимъ черезъ u, v и w проекціи на эти оси перемѣщеній точекъ упругаго твердаго тѣла, координаты которыхъ въ естественномъ состояніи суть x, y, z.

Положимъ затѣмъ (по Kirchhoff'y)

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & y_z &= z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & z_x &= x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & x_y &= y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\ ^{1)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Будемъ обозначать проекціи на оси координатъ напряженій, дѣйствующихъ въ различныхъ точкахъ тѣла на различныя площадки, черезъ X, Y, Z со значками x, y, z такъ, что первыя будутъ указывать на направленіе проектирующей линіи, а вторыя—на направленіе перпендикуляра къ площадкѣ, на которую дѣйствуетъ разсматриваемое напряженіе. Предполагая, что упругія силы имѣютъ потенціалъ, получаемъ

[1]) Величины x_x, y_y, z_z носятъ названія растяженій по осямъ координатъ, а $y_z = z_y$, $z_x = x_z$, $x_y = y_x$ — скольженій по тѣмъ же осямъ.
См. Kirchhoff, „Vorlesungen ü. Math. Physik". Leipzig, 1883, S. 388 etc.

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \frac{\partial f}{\partial x_x}, & Y_z &= Z_y = \frac{\partial f}{\partial y_z}, \\
Y_y &= \frac{\partial f}{\partial y_y}, & Z_x &= X_z = \frac{\partial f}{\partial z_x}, \\
Z_z &= \frac{\partial f}{\partial z_z}, & X_y &= Y_x = \frac{\partial f}{\partial x_y},
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

гдѣ f квадратичная однородная функція шести перемѣнныхъ, $x_x \ldots y_z \ldots x_y$, содержащая, вообще говоря, 21 коэффиціентъ, число которыхъ уменьшается при различныхъ частныхъ предположеніяхъ относительно внутренняго строенія тѣла.

Если черезъ μ обозначимъ плотность тѣла, а черезъ X, Y и Z проекціи на оси координатъ внѣшнихъ (заданныхъ) силъ, дѣйствующихъ на массы твердаго тѣла, то, какъ извѣстно, получимъ слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій для опредѣленія u, v и w

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= \mu X, \\
\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= \mu Y, \\
\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= \mu Z.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Рѣшеніе задачи о равновѣсіи упругаго тѣла приводится къ интегрированію этой системы дифференціальныхъ линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ (второго порядка относительно u, v и w) при поверхностныхъ условіяхъ

$$\left.\begin{aligned}
X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\
Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\
Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz),
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (4)$$

гдѣ X_n, Y_n, Z_n заданныя (произвольно) функціи координатъ, а n направленіе внѣшней нормали къ поверхности, ограничивающей данное тѣло.

Въ послѣдующихъ сужденіяхъ мы будемъ имѣть дѣло лишь съ изотропными тѣлами, для которыхъ

$$f = K\left[x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + k(x_x + y_y + z_z)^2\right], \; (5)$$

гдѣ K и k постоянныя, зависящія отъ физическихъ свойствъ матеріи, а проекціи на оси координатъ напряженій выразятся черезъ производныя по координатамъ отъ u, v и w слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2K\left(k\theta + \frac{\partial u}{\partial x}\right), & Z_y &= Y_z = K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ Y_y &= 2K\left(k\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\right), & X_z &= Z_x = K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ Z_z &= 2K\left(k\theta + \frac{\partial w}{\partial z}\right), & X_y &= Y_x = K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

гдѣ

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

коэффиціентъ кубическаго измѣненія объема.

Допустивъ, что на внутреннія массы тѣла не дѣйствуетъ силъ (т. е. $X = Y = Z = 0$), и обозначивъ черезъ $\varDelta_2$ операцію вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

приведемъ уравненія равновѣсія упругихъ изотропныхъ тѣлъ къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} (2k+1)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \varDelta_2 u &= 0, \\ (2k+1)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \varDelta_2 v &= 0, \\ (2k+1)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \varDelta_2 w &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

§ 2.

Рѣшеніе вопросовъ о равновѣсіи различнаго рода тѣлъ значительно упрощается введеніемъ криволинейныхъ (и именно ортогональныхъ) координатъ. Такъ какъ въ послѣдующемъ изложеніи намъ придется пользоваться исключительно послѣдними, то я изложу вкратцѣ преобразованіе уравненій (8) къ ортогональнымъ координатамъ, слѣдуя пріему Lamé [1]).

[1]) См. Lamé. „Leçons sur les coordonnées curvilignes". Paris, 1859, p. 277 etc.

*

Возьмемъ три поверхности

$$f_1(x, y, z) = \alpha, \quad f_2(x, y, z) = \beta, \quad f_3(x, y, z) = \gamma \quad . \quad . (9)$$

Какъ данныя значенія x, y и z опредѣляютъ точку пространства, такъ данныя значенія α, β и γ опредѣляютъ три поверхности, пересѣченіемъ которыхъ опредѣлится также точка (или точки) пространства. Параметры α, β и γ можно разсматривать, слѣдовательно, какъ координаты, носящія названіе криволинейныхъ координатъ.

Выбравъ поверхности (9) такъ, чтобы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz} = 0\,, \\ \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\gamma}{dz} = 0\,, \\ \frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\frac{d\gamma}{dz} = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

получимъ ортогональную криволинейную систему координатъ.

Проводя въ какой либо точкѣ пересѣченія поверхностей ортогональной системы по нормали къ каждой изъ нихъ (принимая за положительное направленіе внѣшней нормали), получаемъ прямоугольную систему съ началомъ въ этой точкѣ. Назовемъ оси системы черезъ x', y' и z', а проекціи перемѣщеній точки на эти оси соотвѣтственно черезъ U, V и W. Введемъ далѣе слѣдующія обозначенія: будемъ называть черезъ A, B и Γ со значками α, β и γ проекціи на эти оси напряженій, причемъ буквы A, B и Γ будутъ указывать на направленіе проектирующей линіи, а значки α, β и γ на поверхность, которой принадлежитъ площадка разсматриваемаго напряженія [1]).

Такимъ образомъ, A_α, B_β, Γ_γ суть, такъ называемыя, нормальныя напряженія, а $A_\beta = B_\alpha$, $A_\gamma = \Gamma_\alpha$, $B_\gamma = \Gamma_\beta$ — тангенціальныя.

Черезъ h_1, h_2, h_3 назовемъ первые дифференціальные параметры поверхностей (9), черезъ m, n и p со значками α, β и γ cosinus'ы угловъ, составляемыхъ осями x, y, z съ x', y' и z', такъ что

m_α есть cosinus угла между x и x'

m_β . . . . между x и y' и т. д.

---

[1]) „Площадка разсматриваемаго напряженія“ сокращено изъ: „площадка, въ точкѣ которой дѣйствуетъ разсматриваемое напряженіе“.

При этомъ

$$\left.\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{1}{h_1}, & m_\beta &= \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{1}{h_2}, & m_\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{1}{h_3}, \\ n_\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{1}{h_1}, & n_\beta &= \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{1}{h_2}, & n_\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{1}{h_3}, \\ p_\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{1}{h_1}, & p_\beta &= \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{1}{h_2}, & p_\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{1}{h_3}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} U = um_\alpha + vn_\alpha + wp_\alpha, \qquad V = um_\beta + vn_\beta + wp_\beta, \\ W = um_\gamma + vn_\gamma + wp_\gamma, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

и, какъ извѣстно,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial \alpha}, & \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \alpha}{\partial z} &= \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \\ \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \beta}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial \beta}, & \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \beta}{\partial z} &= \frac{\partial z}{\partial \beta}, \\ \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \gamma}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial \gamma}, & \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial \gamma}, & \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \gamma}{\partial z} &= \frac{\partial z}{\partial \gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Всякая функція $F(x, y, z)$ можетъ быть выражена какъ въ x', y', z', такъ и въ α, β, γ, причемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = h_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = h_2 \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = h_3 \frac{\partial F}{\partial \gamma}.$$ [1] $\ldots$ (14)

§ 3.

Формулы (6) справедливы для какой угодно прямоугольной системы координатъ, а, слѣдовательно, и для системы съ осями x', y' и z'. Поэтому

---

[1]) См. Lamé, „Leçons sur les coord. curvil.“. P. 279.

$$\left.\begin{array}{c} A_\alpha = 2K\left[k\theta + \dfrac{\partial U}{\partial x'}\right], \quad B_\beta = 2K\left[k\theta + \dfrac{\partial V}{\partial y'}\right], \quad \Gamma_\gamma = 2K\left[k\theta + \dfrac{\partial W}{\partial z'}\right], \\ B_\gamma = \Gamma_\beta = K\left[\dfrac{\partial V}{\partial z'} + \dfrac{\partial W}{\partial y'}\right], \quad \Gamma_\alpha = A_\gamma = K\left[\dfrac{\partial W}{\partial x'} + \dfrac{\partial U}{\partial z'}\right], \\ A_\beta = B_\alpha = K\left[\dfrac{\partial U}{\partial y'} + \dfrac{\partial V}{\partial x'}\right], \end{array}\right\} \qquad (15)$$

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'} + \frac{\partial W}{\partial z'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Дифференцируя равенства (12) послѣдовательно по x', y' и z', разсматривая $m_\alpha \dots p_\gamma$ какъ постоянныя, и принимая во вниманіе равенства(11) и (13), находимъ

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x'} = \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y'} = \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial \beta}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial \beta}\dfrac{\partial \beta}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial \beta}\dfrac{\partial \beta}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial z'} = \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}\dfrac{\partial \gamma}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial \gamma}\dfrac{\partial \gamma}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial \gamma}\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Замѣнивъ u, v и w ихъ выраженіями, слѣдующими изъ уравненій (12), получимъ для перваго изъ (17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x'} = {} & \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{U}{h_1}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{W}{h_3}\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right] + \\ & + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{U}{h_1}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{W}{h_3}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] + \\ & + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{U}{h_1}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{W}{h_3}\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right]. \end{aligned}$$

Не трудно убѣдиться, что

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) = h_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right) = -\frac{h_2^2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = -\frac{h_3^2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}.$$

Вслѣдствіе этого

$$\frac{\partial U}{\partial x'} = U\frac{\partial h_1}{\partial \alpha} + h_1^2\frac{\partial\left(\frac{U}{h_1}\right)}{\partial \alpha} - V\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} - W\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \gamma},$$

и точно также

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = V\frac{\partial h_2}{\partial \beta} + h_2^2\frac{\partial\left(\frac{V}{h_2}\right)}{\partial \beta} - W\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \gamma} - U\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial W}{\partial z'} = W\frac{\partial h_3}{\partial \gamma} + h_3^2\frac{\partial\left(\frac{W}{h_3}\right)}{\partial \gamma} - U\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha} - V\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \beta}. \quad \ldots (18)$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\theta = h_1h_2h_3\left[\frac{\partial\left(\frac{U}{h_2h_3}\right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial\left(\frac{V}{h_3h_1}\right)}{\partial \beta} + \frac{\partial\left(\frac{W}{h_1h_2}\right)}{\partial \gamma}\right]. \quad \ldots (19)$$

Воспользовавшись затѣмъ условіями ортогональности и формулами (11), (12), (13) и (14), получимъ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial z'} + \frac{\partial W}{\partial y'} &= \frac{h_3}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial \gamma} + \frac{h_2}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial \beta},\\
\frac{\partial W}{\partial x'} + \frac{\partial U}{\partial z'} &= \frac{h_1}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial \alpha} + \frac{h_3}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial \gamma},\\
\frac{\partial U}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial x'} &= \frac{h_2}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial \beta} + \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial \alpha}.
\end{aligned}\right\} \ldots (20)$$

Слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}
A_\alpha &= 2K\left\{k\theta + \left[\frac{\partial(Uh_1)}{\partial \alpha} - \frac{1}{h_1}\left(Uh_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha} + Vh_2\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + Wh_3\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}\right)\right]\right\},\\
B_\beta &= 2K\left\{k\theta + \left[\frac{\partial(Vh_2)}{\partial \beta} - \frac{1}{h_2}\left(Uh_1\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} + Vh_2\frac{\partial h_2}{\partial \beta} + Wh_3\frac{\partial h_2}{\partial \gamma}\right)\right]\right\},\\
\Gamma_\gamma &= 2K\left\{k\theta + \left[\frac{\partial(Wh_3)}{\partial \gamma} - \frac{1}{h_3}\left(Uh_1\frac{\partial h_3}{\partial \alpha} + Vh_2\frac{\partial h_3}{\partial \beta} + Wh_3\frac{\partial h_3}{\partial \gamma}\right)\right]\right\},\\
B_\gamma &= \Gamma_\beta = K\left[\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial \gamma} + \frac{h_2}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial \beta}\right],\\
\Gamma_\alpha &= A_\gamma = K\left[\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial \alpha} + \frac{h_3}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial \gamma}\right],\\
A_\beta &= B_\alpha = K\left[\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial \beta} + \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial \alpha}\right].
\end{aligned}\right\} (21)$$

§ 4.

Формулы (21) даютъ выраженія проекцій напряженій на координатныя оси ортогональной системы съ параметрами α, β и γ. Остается преобразовать самыя уравненія равновѣсія.

Уравненія (8) даютъ

$$\left.\begin{aligned} 2(k+1)\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{\partial\omega_2}{\partial z} - \frac{\partial\omega_3}{\partial y}, \\ 2(k+1)\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{\partial\omega_3}{\partial x} - \frac{\partial\omega_1}{\partial z}, \\ 2(k+1)\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \frac{\partial\omega_1}{\partial y} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8_1)$$

гдѣ

$$\omega_1 = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_2 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \omega_3 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad \ldots (22)$$

Обозначивъ черезъ a, b и c выраженія $\frac{U}{h_1}$, $\frac{V}{h_2}$ и $\frac{W}{h_3}$, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} u &= a\frac{\partial\alpha}{\partial x} + b\frac{\partial\beta}{\partial x} + c\frac{\partial\gamma}{\partial x}, \\ v &= a\frac{\partial\alpha}{\partial y} + b\frac{\partial\beta}{\partial y} + c\frac{\partial\gamma}{\partial y}, \\ w &= a\frac{\partial\alpha}{\partial z} + b\frac{\partial\beta}{\partial z} + c\frac{\partial\gamma}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$\omega_3 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial b}{\partial\gamma} - \frac{\partial c}{\partial\beta}\right)K_1 + \left[\frac{\partial c}{\partial\alpha} - \frac{\partial a}{\partial\gamma}\right]K_2 + \left[\frac{\partial a}{\partial\beta} - \frac{\partial b}{\partial\alpha}\right]K_3, \quad (24)$$

гдѣ для сокращенія введены слѣдующія обозначенія

$$K_1 = \frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y},$$

$$K_2 = \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial y},$$

$$K_3 = \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

Замѣтивъ, что

$$\varepsilon p_\alpha = m_\beta n_\gamma - m_\gamma n_\beta, \quad \varepsilon p_\beta = m_\gamma n_\alpha - m_\alpha n_\gamma, \quad \varepsilon p_\gamma = m_\alpha n_\beta - m_\beta n_\alpha,$$

гдѣ $\varepsilon = \pm 1$, и замѣнивъ m_α, $m_\beta \ldots p_\gamma$ ихъ выраженіями (11), найдемъ

$$K_1 = \varepsilon \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad K_2 = \varepsilon \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad K_3 = \varepsilon \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Такимъ образомъ,

$$\omega_3 = A \frac{\partial \alpha}{\partial z} + B \frac{\partial \beta}{\partial z} + \Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

гдѣ

$$A = \varepsilon \frac{h_2 h_3}{h_1}\left[\frac{\partial b}{\partial \gamma} - \frac{\partial c}{\partial \beta}\right], \quad B = \varepsilon \frac{h_3 h_1}{h_2}\left[\frac{\partial c}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial \gamma}\right], \quad \Gamma = \varepsilon \frac{h_1 h_2}{h_3}\left[\frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{\partial b}{\partial \alpha}\right]. \quad (26)$$

Точно также получимъ

$$\omega_1 = A \frac{\partial \alpha}{\partial x} + B \frac{\partial \beta}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \omega_2 = A \frac{\partial \alpha}{\partial y} + B \frac{\partial \beta}{\partial y} + \Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial y}. \quad (25_1)$$

Такъ какъ правыя части уравненій (8_1) составлены изъ ω_i ($i = 1, 2, 3$) такъ, какъ ω_i изъ u, v и w, а сами ω_i составляются изъ A, B и Γ, какъ u, v и w изъ a, b и c [рав. (23)], то

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = P_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \beta}{\partial x} + P_3 \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = P_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + P_2 \frac{\partial \beta}{\partial y} + P_3 \frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = P_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} + P_2 \frac{\partial \beta}{\partial z} + P_3 \frac{\partial \gamma}{\partial z},$$

гдѣ

$$P_1 = \varepsilon \frac{h_2 h_3}{h_1}\left[\frac{\partial B}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta}\right], \quad P_2 = \varepsilon \frac{h_3 h_1}{h_2}\left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \gamma}\right], \quad P_3 = \varepsilon \frac{h_2 h_1}{h_3}\left[\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right].$$

Отсюда получаемъ слѣдующія уравненія равновѣсія въ ортогональныхъ координатахъ

$$\left.\begin{aligned} 2(k+1)\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} &= \frac{\partial B}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta}, \\ 2(k+1)\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial \theta}{\partial \beta} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \gamma}, \\ 2(k+1)\frac{h_3}{h_2 h_1}\frac{\partial \theta}{\partial \gamma} &= \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (27)$$

Въ выраженія P_1, P_2 и P_3 входитъ ε^2; можемъ положить $\varepsilon=1$, причемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2h_3}A=\frac{\partial\left(\frac{V}{h_2}\right)}{\partial\gamma}-\frac{\partial\left(\frac{W}{h_3}\right)}{\partial\beta},\quad \frac{h_2}{h_1h_3}B=\frac{\partial\left(\frac{W}{h_3}\right)}{\partial\alpha}-\frac{\partial\left(\frac{U}{h_1}\right)}{\partial\gamma},\\ \frac{h_3}{h_1h_2}\Gamma=\frac{\partial\left(\frac{U}{h_1}\right)}{\partial\beta}-\frac{\partial\left(\frac{V}{h_2}\right)}{\partial\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (28)$$

Изъ уравненій (27) непосредственно слѣдуетъ, что θ удовлетворяетъ такому уравненію въ частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma}\right)=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

что представляетъ, какъ извѣстно, преобразованіе къ ортогональнымъ координатамъ уравненія $\Delta_2\theta=0$.

II. Ортогональныя системы для тѣлъ вращенія.

§ 5.

Положимъ, требуется рѣшить вопросъ о равновѣсіи какого-либо упругаго изотропнаго тѣла подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ его поверхности, уравненіе которой

$$f(x\,,\,y\,,\,z)=\alpha\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

въ предположеніи, что на внутреннія его массы не дѣйствуетъ силъ. Строимъ такую ортогональную систему поверхностей параметровъ α, β и γ, чтобы къ семейству перваго изъ нихъ принадлежала и поверхность (30). Вопросъ о равновѣсіи тѣла приведется, такимъ образомъ, къ интегрированію уравненій (27) при условіи, что A_α, B_α и Γ_α имѣютъ заданныя значенія на поверхности (30).

При настоящихъ средствахъ анализа нѣтъ возможности проинтегрировать эти уравненія, не дѣлая никакихъ предположеній или относительно распредѣленія напряженій внутри даннаго тѣла (или даннаго класса тѣлъ), или относительно характера функцій, выражающихъ проекціи на координатныя оси перемѣщеній U, V и W. Дать соотвѣтствующую гипотезу относительно тѣхъ или другихъ столь же затруднительно, вообще говоря, какъ и проинтегрировать уравненія не зависимо отъ всякихъ гипотезъ; но для нѣкоторыхъ частныхъ видовъ тѣлъ возможно построить таковыя.

Примѣромъ могутъ служить гипотезы С. Венана и Клебша [1]) о напряженiяхъ внутри цилиндрическихъ тѣлъ.

Въ настоящей работѣ я обращаю вниманiе на другой обширный классъ тѣлъ, для которыхъ также не трудно дать гипотезу относительно перемѣщенiй U, V и W; для нѣкоторыхъ изъ этихъ тѣлъ получимъ опредѣленное рѣшенiе задачи, оправдывающее сдѣланное предположенiе. Я разумѣю тѣла вращенiя [2]).

Примемъ за ось z-овъ прямоугольной системы координатъ ось вращенiя такого тѣла и пересѣчемъ его какой либо плоскостью, проходящею черезъ эту ось. Эта плоскость пересѣчетъ поверхность тѣла по нѣкоторой кривой, вращенiемъ которой вокругъ оси z-овъ и можетъ быть образовано данное тѣло. Проведемъ въ одной изъ этихъ плоскостей прямую, перпендикулярную къ оси z-овъ, принявъ ее за ось y'-овъ прямоугольной системы координатъ съ осями z и y'. Строимъ въ этой плоскости ортогональную систему координатъ съ параметрами α и β такъ, чтобы къ семейству одного изъ нихъ (положимъ α) принадлежала и образующая кривая поверхности тѣла. При этомъ

$$z = f_1(\alpha, \beta), \qquad y' = f_2(\alpha, \beta) \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

Называя черезъ φ азимутальный уголъ, опредѣляющiй положенiе меридiанальной плоскости по отношенiю къ какой либо изъ нихъ, принятой за неподвижную, и принимая послѣднюю за плоскость zx-овъ прямоугольной системы координатъ, находимъ, что

$$x = f_2(\alpha, \beta)\cos\varphi, \quad y = f_2(\alpha, \beta)\sin\varphi, \quad z = f_1(\alpha, \beta) \, . \; . \; . \; (32)$$

Получается ортогональная система координатъ, состоящая изъ двухъ поверхностей вращенiя параметровъ α и β и меридiанальныхъ плоскостей параметра φ.

Такъ какъ

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)^2\right] d\alpha^2 + \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)^2\right] d\beta^2 + f_2{}^2 d\varphi^2,$$

то первые дифференцiальные параметры системы будутъ

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)^2}}, \quad h_3 = \frac{1}{f_2}, \; (33)$$

и не зависятъ отъ φ.

---

[1]) См. Clebsch, „Theorie d. Elasticität fester Körper". Leipzig, 1862.

[2]) Для нѣкоторыхъ тѣлъ вращенiя можно проинтегрировать уравненiя (27) независимо отъ какой бы то ни было гипотезы, но при этомъ встрѣчаются значительныя затрудненiя въ опредѣленiи произвольныхъ постоянныхъ по предѣльнымъ условiямъ задачи, вслѣдствiе чего я и не разсматриваю пока общаго рѣшенiя.

Предполагая, что въ общихъ уравненіяхъ равновѣсія (27) и (28) γ соотвѣтствуетъ φ, и допуская, что U, V и W не зависятъ отъ этой перемѣнной, получаемъ

$$\theta = h_1 h_2 h_3 \left(\frac{\partial \frac{U}{h_2 h_3}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \frac{V}{h_1 h_3}}{\partial \beta} \right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Равенства (28) обратятся въ такія

$$\left. \begin{aligned} &\frac{h_1}{h_2 h_3} A = \frac{\partial \left(\frac{W}{h_3} \right)}{\partial \beta}, \quad \frac{h_2}{h_1 h_3} B = \frac{\partial \left(\frac{W}{h_3} \right)}{\partial \alpha}, \\ &\frac{h_3}{h_1 h_2} \Gamma = \frac{\partial \left(\frac{U}{h_1} \right)}{\partial \beta} - \frac{\partial \left(\frac{V}{h_2} \right)}{\partial \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (35)$$

а самыя уравненія равновѣсія (27) дадутъ

$$\left. \begin{aligned} &2(k+1) \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta}, \quad 2(k+1) \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha}, \\ &\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned} \right\} \quad . \quad (36)$$

такъ какъ A, B, Γ и θ, очевидно, не зависятъ отъ φ.

Замѣтимъ, что A и B зависятъ только отъ W, а Γ только отъ U и V; первыя два изъ предыдущихъ уравненій и послужатъ для опредѣленія послѣднихъ.

Уравненіе (29) въ разсматриваемомъ случаѣ приведется къ такому

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_2}{h_1 h_2} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Найдя функцію θ, получимъ интеграціей двухъ первыхъ изъ уравненій (36) и функцію Γ, послѣ чего опредѣлимъ U и V при помощи уравненій

$$\frac{h_3}{h_1 h_2} \Gamma = \frac{\partial \left(\frac{U}{h_1} \right)}{\partial \beta} - \frac{\partial \left(\frac{V}{h_2} \right)}{\partial \alpha}, \quad \theta = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial \left(\frac{U}{h_2 h_3} \right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \left(\frac{V}{h_1 h_3} \right)}{\partial \beta} \right]. \quad (38)$$

Функція W опредѣлится независимо отъ θ и Γ по третьему изъ уравненій (36). Произвольныя же постоянныя, которыя войдутъ при интегрированіи, найдутся по предѣльнымъ условіямъ задачи: по заданнымъ силамъ, дѣйствующимъ на поверхности, ограничивающей тѣло.

Проекціи напряженій при сдѣланной гипотезѣ будутъ

$$A_\alpha = 2K\left\{k\theta + \left[\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\alpha} - \frac{1}{h_1}\left(Uh_1\frac{\partial h_1}{\partial\alpha} + Vh_2\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right)\right]\right\},$$

$$B_\beta = 2K\left\{k\theta + \left[\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\beta} - \frac{1}{h_2}\left(Uh_1\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + Vh_3\frac{\partial h_2}{\partial\beta}\right)\right]\right\},$$

$$\Gamma_\gamma = 2K\left[k\theta - \frac{1}{h_3}\left(Uh_1\frac{\partial h_3}{\partial\alpha} + Vh_2\frac{\partial h_3}{\partial\beta}\right)\right],$$

$$B_\gamma = \Gamma_\beta = K\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\beta}, \quad \Gamma_\alpha = A_\gamma = K\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\alpha},$$

$$A_\beta = B_\alpha = K\left[\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\beta} + \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\alpha}\right].$$

III. О тѣлахъ, ограниченныхъ поверхностями вращенія второго порядка.

§ 6.

Задача прежде всего приводится къ интегрированію уравненія (37). Наиболѣе удобная для вопросовъ упругости форма интеграла этого уравненія представится въ случаяхъ, когда θ можетъ быть выражено въ видѣ ряда, каждый членъ котораго есть произведеніе двухъ функцій, одна изъ которыхъ зависитъ лишь отъ α, а другая—отъ β. Частное рѣшеніе такого типа получится, если

$$\frac{h_1}{h_2h_3} = F(\alpha)F_1(\beta), \quad \frac{h_2}{h_1h_3} = \psi(\alpha)\psi_1(\beta),$$

или

$$\frac{h_1}{h_2h_3} = F(\alpha), \quad \frac{h_2}{h_1h_3} = F_1(\beta)\,^{1)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Очевидно, оба случая приводятся къ одному изъ нихъ и, чтобы остановиться на чемъ нибудь опредѣленномъ, найдемъ координатныя системы, при которыхъ выполняются условія (39). Выразимъ z и y' (см. предыдущій §) въ функціи α и β такъ, чтобы

$$y' = \frac{1}{h_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta} + \frac{\partial y'}{\partial\alpha}\frac{\partial y'}{\partial\beta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

при условіяхъ (39).

---

[1]) Или $\frac{h_1}{h_2h_3} = F(\beta)$, $\quad \frac{h_2}{h_1h_3} = F(\alpha)$.

Послѣднія даютъ

$$\frac{1}{h_3^2} = F(\alpha)F_1(\beta), \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{F(\alpha)}}{\sqrt{F_1(\beta)}}, \quad h_2 = f(\alpha, \beta). \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Назовемъ черезъ h'_1, h_2' и h_3' величины обратныя дифференціальнымъ параметрамъ h_1, h_2 и h_3 и, замѣнивъ $\sqrt{F_1(\beta)}$, $\sqrt{F(\alpha)}$, $\frac{1}{f(\alpha, \beta)}$ соотвѣтственно черезъ $\frac{1}{F_1(\beta)}$, $\frac{1}{F(\alpha)}$, $\sqrt{f(\alpha, \beta)}$, получимъ

$$h_1' = \sqrt{f(\alpha, \beta)}\,\frac{F(\alpha)}{F(\beta)}, \quad h_2' = \sqrt{f(\alpha, \beta)}, \quad h_3' = F(\alpha)F_1(\beta). \quad . \quad (43)$$

Функціи $F(\alpha)$, $F_1(\beta)$ и $f(\alpha, \beta)$ пока неопредѣленны. Рѣшеніе вопроса приводится къ отысканію этихъ функцій. Въ дальнѣйшемъ для краткости будемъ обозначать $F(\alpha)$, $F_1(\beta)$ и $f(\alpha, \beta)$ просто черезъ F, F_1 и f.

На основаніи извѣстныхъ свойствъ ортогональныхъ системъ [рав. (13)]

$$(h_1')^2 = \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2, \quad (h_2')^2 = \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2. \quad . \quad . \quad (44)$$

Принимая во вниманіе равенство (40) и послѣднее изъ (43), находимъ

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}F_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = f\frac{F^2}{F_1^2}, \quad \left(\frac{dF_1}{d\beta}F\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = f. \quad . \quad . \quad (45)$$

и сверхъ того [въ силу равенства (41)]

$$F_1 F \frac{dF}{d\alpha}\frac{dF_1}{d\beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Слѣдовательно [1]),

$$f\frac{F^2}{F_1^2} = \frac{F^4}{F_1^2}\left(\frac{dF_1}{d\beta}\right)^2 + F_1^2\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)^2.$$

Подставивъ опредѣленное отсюда выраженіе f въ (45), получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \pm \frac{F^2}{F_1}\frac{dF_1}{d\beta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = \pm \frac{F_1^2}{F}\frac{dF}{d\alpha}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Одинъ изъ знаковъ можетъ выбрать произвольно. Чтобы остановиться на чемъ нибудь опредѣленномъ, возьмемъ въ первомъ выраженіи $+$, во второмъ необходимо должно принять знакъ $-$.

[1]) По сокращеніи на f, которое отлично отъ нуля.

Представивъ равенства (47) въ видѣ

$$\frac{1}{F}\frac{dz}{d\alpha}=F\frac{1}{F_1}\frac{dF_1}{d\beta}\,,\quad \frac{1}{F_1}\frac{dz}{d\beta}=-F_1\frac{1}{F}\frac{dF}{d\alpha}\,,\quad .\;.\;.\;.\;.\;(48)$$

и введя вмѣсто перемѣнныхъ α и β двѣ другія α' и β', связанныя съ первыми соотношеніями

$$Fd\alpha=d\alpha'\,,\quad F_1d\beta=d\beta'\,,$$

получимъ

$$\frac{dz}{d\alpha'}=F\frac{dF_1}{d\beta'}\,,\quad \frac{dz}{d\beta'}=-F_1\frac{dF}{d\alpha'}\;{}^{1)}.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(49)$$

Предполагая F и F_1 выраженными въ α' и β' и опуская для простоты значки, имѣемъ

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2}\frac{1}{F}+\frac{d^2F_1}{d\beta^2}\frac{1}{F_1}=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(50)$$

т. е.

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2}-m^2F=0\,,\quad \frac{d^2F_1}{d\beta^2}+m^2F_1=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;(51)$$

гдѣ m произвольная постоянная.

Въ частности m можетъ быть равно нулю.

Въ первомъ случаѣ ($m=0$) можемъ положить $F=a'\alpha$, $F_1=b'\beta$, такъ что

$$\frac{dz}{d\alpha}=a\alpha\,,\quad \frac{dz}{d\beta}=-a\beta\,,$$

гдѣ черезъ a обозначено произведеніе $a'b'$, и

$$z=\frac{a}{2}(\alpha^2-\beta^2).\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(52)$$

Во второмъ случаѣ ($m \gtrless 0$)

$$F_1=A\cos m\beta+B\sin m\beta\,,$$

или

$$F_1=A_1\cos m(\beta-\beta_1)\;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(53)$$

и

$$F=A_2\,[e^{m(\alpha+\alpha_1)}+e^{-m(\alpha+\alpha_1)}].\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(54)$$

---

[1]) Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что

$$\frac{dz}{d\alpha'}=\frac{\partial y'}{\partial\beta'}\,,\quad \frac{dz}{d\beta'}=-\frac{\partial y'}{\partial\alpha'}\,,$$

т. е. искомыя координатныя системы изотермичны (или приводятся къ таковымъ).

Такимъ образомъ,

$$z = -A_1 A_2 [e^{m(\alpha+\alpha_1)} - e^{-m(\alpha+\alpha_1)}] \sin m(\beta-\beta_1) \,.\;.\;.\;.\;. (55)$$

Положивъ

$$m(\alpha+\alpha_1) = \alpha', \quad m(\beta-\beta_1) = -\beta', \quad A_1 A_2 = \frac{c}{2},$$

находимъ, опуская значекъ 1 при α и β

$$z = c\varepsilon(\alpha)\sin\beta \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (56)$$

гдѣ $\varepsilon(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$.

Далѣе, для $m = 0$

$$y' = a\alpha\beta \,, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (57)$$

а для m отличнаго отъ нуля

$$y' = cE(\alpha)\cos\beta \,, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (58)$$

гдѣ $E(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$.

Такимъ образомъ, условіямъ задачи удовлетворяютъ двѣ системы ортогональныхъ координатъ, для одной

$$x = a\,\alpha\beta\cos\varphi\,, \quad y = a\,\alpha\beta\sin\varphi\,, \quad z = \frac{a}{2}(\alpha^2 - \beta^2)\,. \quad (59)$$

для другой

$$x = cE(\alpha)\cos\beta\cos\varphi\,, \quad y = cE(\alpha)\cos\beta\sin\varphi\,, \quad z = c\varepsilon(\alpha)\sin\beta\,. \quad (60)$$

Обѣ представляютъ частные случаи эллиптической системы координатъ. Разсмотримъ сѣченіе первой какою-либо изъ меридіанальныхъ плоскостей.

По предыдущему

$$y' = a\alpha\beta\,, \quad z = \frac{a}{2}(\alpha^2 - \beta^2)\,.$$

Исключая параметръ β, находимъ

$$(y')^2 = 2a\alpha^2\left(\frac{a\alpha^2}{2} - z\right).$$

Положивъ

$$2a\alpha^2 = 2p\,, \quad \frac{a\alpha^2}{2} - z = z_1\,,$$

приведемъ предыдущее уравненіе къ виду

$$(y')^2 = 2pz_1 \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (61)$$

Это уравненіе параболы, ось которой направлена по отрицательному направленію оси z-овъ, а вершина (при данномъ α) находится въ точкѣ

$$z_в = \frac{a\alpha^2}{2}.$$

При $\alpha = 0$ имѣемъ $y' = 0$, $z_в = 0$.

Кривая обращается въ прямую, совпадающую съ отрицательнымъ направленіемъ оси z-овъ.

При возрастаніи α получается рядъ параболъ возрастающаго параметра съ вершиной, удаляющейся въ безконечность по положительному направленію оси z-овъ.

Точно также, исключивъ α, найдемъ

$$(y')^2 = 2p_1 z_1\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (62)$$

гдѣ

$$2p_1 = 2a\beta^2\,, \quad z_1 = z + \frac{a\beta^2}{2}.$$

Уравненіе (62) представляетъ также параболу, ось которой идетъ по положительному направленію оси z-овъ; при $\beta = 0$ эта кривая обращается въ прямую. Вершина ея всегда лежитъ на отрицательной части оси z-овъ; при $\beta = 0$ совпадаетъ съ началомъ прямоугольной системы zy', при возрастаніи β удаляется по отрицательному направленію оси z и достигаетъ $-\infty$ при $\beta = \infty$.

Для второй системы, въ сѣченіи ея какою-либо меридіанальной плоскостью, получаемъ

$$y' = cE(\alpha)\cos\beta\,, \qquad z = c\varepsilon(\alpha)\sin\beta\,,$$

откуда

$$\frac{(y')^2}{[E(\alpha)]^2} + \frac{z^2}{[\varepsilon(\alpha)]^2} = c^2 \quad \frac{(y')^2}{\cos^2\beta} - \frac{z^2}{\sin^2\beta} = c^2 \text{ [1]}). \quad . \ . \ . \quad (63)$$

Уравненія (63) представляютъ, какъ извѣстно, систему софокусныхъ эллипсовъ и гиперболъ.

Параметры α, β и φ опредѣляютъ, слѣдовательно, въ равенствахъ (59) ортогональную систему координатъ, состоящую изъ двухъ однофокусныхъ параболоидовъ вращенія и меридіанальныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ прямую ихъ осей, а въ равенствахъ (60) систему изъ двухъ софокусныхъ эллипсоидовъ и гиперболоидовъ вращенія и также меридіанальныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ ось z-овъ. Въ

---

[1]) См. Lamé, „Leçons sur les coordonées curvilignes“. P. 125.

этихъ случаяхъ (по предыдущему) возможно частное рѣшеніе уравненія (37) въ видѣ произведенія двухъ функцій, каждая изъ которыхъ зависитъ только отъ одного изъ параметровъ.

Понятно, что цилиндрическая и сферическая системы координатъ также удовлетворяютъ этому условію. Въ первомъ случаѣ функція $f(\alpha, \beta)$ въ выраженіяхъ (42) зависитъ отъ одного изъ параметровъ (α или β), во второмъ равна произведенію двухъ функцій $f_1(\alpha)$ и $f_2(\beta)$.

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что вообще для тѣлъ вращенія, ограниченныхъ поверхностями вращенія второго порядка, частнымъ рѣшеніемъ уравненія (27) будетъ функція $\theta_\alpha \theta_\beta$, гдѣ θ_α обозначаетъ функцію одного α, а θ_β — функцію одного β. Такими тѣлами мы и займемся въ настоящемъ изслѣдованіи.

Начнемъ съ простѣйшаго — прямого кругового цилиндра.

IV. Основныя соотношенія между функціями Бесселя различныхъ порядковъ и квадратуры съ произведеніями этихъ функцій.

§ 7.

Такъ какъ при изслѣдованіи вопроса о равновѣсіи этого тѣла, а также и параболоида вращенія придется имѣть дѣло съ различными свойствами Бесселевыхъ функцій и квадратурами, содержащими произведеніе ихъ, то, во избѣжаніе повтореній, я выпишу основныя соотношенія между этими функціями и разсмотрю нѣкоторыя изъ упомянутыхъ квадратуръ.

Всякая функція Бесселя, обозначаемая черезъ J_j, гдѣ j какая угодно постоянная, и обращающаяся въ Y_j при j цѣломъ отрицательномъ (функція второго рода), удовлетворяетъ, какъ извѣстно, дифференціальному уравненію

$$z \frac{d^2 J_j(z)}{dz^2} + \frac{dJ_j(z)}{dz} + z\left(1 - \frac{j^2}{z^2}\right) J_j(z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

и выражается абсолютно сходящимся рядомъ

$$J_j = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\mu \left(\frac{z}{2}\right)^{j+2\mu}}{\Gamma(j+\mu+1)\,\Gamma(\mu+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Если j цѣлое отрицательное число, то

$$\left.\begin{aligned} Y_j = -\sum_0^\infty \frac{\Gamma(j-\mu)}{\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-j+2\mu} + \\ + \sum_0^\infty \frac{(-1)^\mu \left(\frac{x}{2}\right)^{j+2\mu}}{\Gamma(j+\mu+1)\Gamma(\mu+1)} \left[2\log\frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \frac{\Gamma'(j+\mu+1)}{\Gamma(j+\mu+1)}\right]. \text{ [1]} \end{aligned}\right\} (66)$$

[1]) См. Jordan, „Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique". T. III, p. 238 etc.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{2j}{z} J_j = J_{j-1} + J_{j+1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (67)$$

$$2\frac{dJ_j}{dz} = J_{j-1} - J_{j+1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (68)$$

$$\frac{dJ_j}{dz} = J_{j-1} - \frac{j}{z} J_j \quad \ldots \ldots \ldots \quad (69)$$

и еще

$$\frac{dJ_j}{dz} = \frac{j}{z} J_j - J_{j+1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

Такой-же рядъ соотношенiй получится и для функцiй второго рода Y_j [1]). Уравненiе (64) и аналогичное ему для функцiи Y_j даютъ

$$\frac{dJ_j}{dz} Y_j - \frac{dJ_j}{dz} J_j = -\frac{1}{z}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

или

$$J_j Y_{j-1} - J_{j-1} Y_j = -\frac{1}{z} \text{ }^{2)}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (72)$$

Какъ извѣстно,

$$z\frac{d^2 J_j(kz)}{dz^2} + \frac{dJ_j(kz)}{dz} + z\left(k^2 - \frac{j^2}{z^2}\right) J_j(kz) = 0,$$

$$z\frac{d^2 J_j(lz)}{dz^2} + \frac{dJ_j(lz)}{dz} + z\left(l^2 - \frac{j^2}{z^2}\right) J_j(lk) = 0,$$

гдѣ k и l нѣкоторыя постоянныя.

Отсюда получаемъ

$$(k^2 - l^2) z J_j(kz) J_j(lz) = -\frac{d}{dz}\left[z\left(J_j(lz)\frac{dJ_j(kz)}{dz} - J_j(kz)\frac{dJ_j(lz)}{dz}\right)\right].$$

Интегрируя это выраженiе и опуская произвольную постоянную, находимъ

$$\int z J_j(kz) J_j(lz)\, dz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left[kJ_{j+1}(kz) J_j(lz) - lJ_j(kz) J_{j+1}(lz)\right]. \quad (73)$$

---

[1]) См. Lommel, „Zur Theorie d. Besselschen Functionen“. Mathem. Annalen, Bd. IV, S. 108.

[2]) Если j не цѣлое число, то

$$J_j(z) J_{-j+1}(z) + J_{-j}(z) J_{j-1}(z) = \frac{2}{\pi z} \sin j\pi$$

и

$$\frac{dJ_j}{dz} J_{-j} - \frac{dJ_{-j}}{dz} J_j = \frac{2}{\pi z} \sin j\pi .$$

См. Forsyth, „A treatise on differential equations“. London, 1888, p. 168.

При $k=l$ правая часть обращается въ неопредѣленность. Опредѣляя ее по извѣстнымъ правиламъ дифференціальнаго исчисленія, заключаемъ, что

$$\int zJ_j^2(kz)dz = \frac{z^2}{2}\left[J_j^2(kz) - J_{j-1}(kz)J_{j+1}(kz)\right]. \quad . \quad . \quad (74)$$

Точно также

$$\int zJ_j(kz)Y_j(lz)dz = \frac{z}{k^2-l^2}\left[kJ_{j+1}(kz)Y_j(lz) - lJ_j(kz)Y_{j+1}(lz)\right], \quad (75)$$

и при $k=l$

$$\int zJ_j(kz)Y_j(kz)dz = \frac{z^2}{2}\left[J_j(kz)Y_j(kz) - J_{j+1}(kz)Y_{j-1}(kz)\right], \quad (76)$$

или

$$\int zJ_j(kz)Y_j(kz)dz = \frac{z^2}{2}\left[J_j(kz)Y_j(kz) - J_{j-1}(kz)Y_{j+1}(kz)\right]. \quad (77)$$

Аналогичныя формулы получатся и для двухъ функцій Бесселя второго рода.

Какъ извѣстно,

$$\frac{d}{dz}\left[z^m J_j(z)J_\mu(z)\right] = -z^m\left[J_j(z)J_{\mu+1}(z) + J_\mu(z)J_{j+1}(z)\right] +$$
$$+ (m+j+\mu)z^{m-1}J_jJ_\mu .$$

Замѣнивъ j и μ черезъ $j+1$ и $\mu+1$, найдемъ, на основаніи равенства (67),

$$\frac{d}{dz}\left[z^m J_{j+1}(z)J_{\mu+1}(z)\right] = z^m\left(J_j(z)J_{\mu+1}(z) + J_\mu(z)J_{j+1}(z)\right) +$$
$$+ (m-j-\mu-2)J_{j+1}(z)J_{\mu+1}(z),$$

откуда, полагая $m=j+\mu+2$, получаемъ

$$\frac{d}{dz}\left[z^{j+\mu+2}\left(J_j(z)J_\mu(z) + J_{j+1}(z)J_{\mu+1}(z)\right)\right] = 2(j+\mu+1)z^{j+\mu+1}J_j(z)J_\mu(z).$$

Слѣдовательно,

$$\int z^{j+\mu+1}J_j(z)J_\mu(z)dz = \frac{z^{j+\mu+2}}{2(j+\mu+1)}\left[J_j(z)J_\mu(z) + J_{j+1}(z)J_{\mu+1}(z)\right]. \quad (78)$$

✝

Василій Григорьевичъ Имшенецкій.

Въ ночь на 24-е мая этого года скончался въ Москвѣ почетный членъ Харьковскаго Математическаго Общества, одинъ изъ его основателей и бывшій предсѣдатель, ординарный академикъ Императорской Академіи Наукъ Василій Григорьевичъ Имшенецкій. Насколько внезапно разразился этотъ ударъ надъ русскимъ ученымъ міромъ, настолько же тяжело его подавляющее дѣйствіе для лицъ, близко знавшихъ покойнаго и находившихся съ нимъ въ личныхъ или научныхъ отношеніяхъ. Для Харьковскаго Математическаго Общества эта утрата особенно чувствительна и невознаградима. Покойный Василій Григорьевичъ былъ главный его организаторъ и вдохновитель. Онъ помогъ ему стать, такъ сказать, на ноги, ободрялъ и руководилъ, былъ въ высшей степени внимателенъ ко всѣмъ хотя бы самымъ слабымъ проявленіямъ научной дѣятельности въ своихъ младшихъ сочленахъ, не пропускалъ ни одного засѣданія, выслушивалъ всѣ сообщенія и дѣлалъ на нихъ свои полныя глубокаго смысла замѣчанія. Въ то же время онъ самъ былъ первымъ и главнымъ дѣятелемъ Общества, увлекавшимъ всѣхъ своимъ примѣромъ. Благодаря, главнымъ образомъ, его стараніямъ возникло изданіе Общества.

Впослѣдствіи, будучи избранъ въ академики, онъ долженъ былъ перенести свою дѣятельность на болѣе широкое и видное поприще, но не смотря на это онъ не порывалъ своей связи съ Обществомъ, живо интересовался его дѣятельностью и время отъ времени присылалъ свои статьи для сообщенія и напечатанія. Въ послѣдній разъ В. Г. присутствовалъ въ засѣданіи Общества въ маѣ 1889 года, когда пріѣзжалъ въ Харьковъ въ качествѣ предсѣдателя первой физико-математической комиссіи для производства государственныхъ экзаменовъ. Всѣмъ памятно, какой живой интересъ возбудилъ онъ въ Обществѣ своимъ сравнительно простымъ, но талантливымъ и увлекательнымъ сообщеніемъ.

Научныя заслуги В. Г. весьма велики и его имя всегда будетъ стоять въ памяти послѣдователей на ряду съ наиболѣе крупными именами нашихъ первоклассныхъ ученыхъ. По мѣсту дѣятельности его полная трудовъ жизнь можетъ быть раздѣлена на три періода: періодъ казанскій, когда онъ былъ профессоромъ математики въ казанскомъ университетѣ (до 1871 г.), періодъ харьковскій, когда онъ былъ здѣсь профессоромъ на каѳедрѣ теоретической механики (до 1882 г.), и періодъ петербургскій, когда онъ былъ академикомъ. Въ послѣднее время онъ каждую весну принималъ на себя обязанности предсѣдателя испытательныхъ комиссій и по этому поводу въ прошедшемъ и настоящемъ году ѣздилъ въ Москву, гдѣ, между прочимъ, принималъ участіе въ дѣятельности нашего старѣйшаго Математическаго Общества и гдѣ пріобрѣлъ также не мало цѣнителей и друзей. Тамъ же среди научныхъ и педагогическихъ трудовъ застигла его преждевременная кончина. Онъ умеръ на 61-мъ году жизни, какъ полагаютъ, отъ разрыва сердца.

Въ настоящее время мы не можемъ входить въ разсмотрѣніе и оцѣнку его научныхъ трудовъ. На это намъ потребуется время и помощь другихъ лицъ, мнѣніями которыхъ мы могли бы провѣрить свое собственное. Равнымъ образомъ, какъ ни желали бы мы сдѣлать общеизвѣстными подробности научной, служебной и частной жизни нашего оплакиваемаго товарища и учителя, жизни, полной труда и представляющей глубоко назидательный примѣръ для послѣдователей, мы должны отложить это до будущаго, дабы памятникъ былъ болѣе соотвѣтственнымъ высокимъ качествамъ вспоминаемаго. Въ этихъ видахъ, желая запастись наиболѣе обширнымъ матеріаломъ, мы позволяемъ себѣ обратиться ко всѣмъ, знавшимъ покойнаго В. Г. и входившимъ съ нимъ въ какія бы то ни было сношенія, съ просьбою доставить намъ все, что у нихъ можетъ найтись изъ напоминающаго о какихъ-либо подробностяхъ его жизни и дѣятельности, напримѣръ переписку съ нимъ, его лекціи литографированныя или записанныя, его помѣтки на книгахъ или тетрадяхъ, наконецъ, личныя воспоминанія о немъ, о какихъ-либо фактахъ его жизни и т. п. Всѣ эти матеріалы просимъ адресовать на имя предсѣдателя или секретаря Харьковскаго Математическаго Общества.

Если не ошибаемся, первая научная работа В. Г. была напечатана въ „Ученыхъ запискахъ“ казанскаго университета въ 1862 году. Такимъ образомъ, годъ смерти нашего много потрудившагося для науки талантливаго ученаго есть срокъ, когда по справедливости долженъ былъ быть отпразднованъ юбилей его 30-лѣтней ученой дѣятельности. Пусть же всѣ, кто пожелалъ бы при его жизни откликнуться на призывъ къ юбилейному чествованію, отзовутся теперь посмертнымъ воспоминаніемъ.

К. Андреевъ.

1-го Сентября
1892 г.

Полагая $j = \mu$, имѣемъ

$$\int z^{2\mu+1}\Big(J_\mu(z)\Big)^2 dz = \frac{z^{2\mu+2}}{2(2\mu+1)}\Big[J_\mu^2(z) + J_{\mu+1}^2(z)\Big]. \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Подобныя же формулы будутъ имѣть мѣсто и для функцій второго рода Y_j и Y_μ; выписывать ихъ я не буду. Тоже должно сказать и о случаѣ, когда одна изъ функцій перваго, другая второго рода, такъ что

$$\int z^{j+\mu+1} J_j(z)\, Y_\mu(z)\, dz = \frac{z^{j+\mu+2}}{2(j+\mu+1)}\Big[J_j(z)\, Y_\mu(z) + J_{j+1}(z)\, Y_{\mu+1}(z)\Big]. (80)$$

Эти формулы и другія, подобныя имъ, получены Lommel'емъ въ его статьѣ: „Zur Theorie der Besselschen Functionen", помѣщенной въ XIV томѣ Math. Annalen. Изъ самаго уравненія, опредѣляющаго функцію Бесселя, замѣчу кстати, можемъ получить рядъ другихъ квадратуръ болѣе общаго типа, не указанныхъ Lommel'емъ, но для нашей цѣли это не представляется необходимымъ.

Выраженія (78), (79), и (80) справедливы для всякихъ j и μ. Полагая $j = \mu = 0$, имѣемъ

$$\int z J_0^2(z)\, dz = \frac{z^2}{2}\Big[J_0^2(z) + J_1^2(z)\Big], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

$$\int z J_0(z) Y_0(z) dz = \frac{z^2}{2}\Big[J_0(z)\, Y_0(z) + J_1(z)\, Y_1(z)\Big]. \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Формулами этого параграфа мы и воспользуемся впослѣдствіи.

V. О равновѣсіи кругового цилиндра подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ его боковой поверхности.

§ 8.

Обращаемся къ вопросу о равновѣсіи кругового цилиндра.

Принимая за координатныя оси α, β, γ направленіе r радіуса вектора цилиндрической системы координатъ, прямую параллельную оси z (оси цилиндра) и перпендикуляръ ψ къ меридіанальной плоскости въ разсматриваемой точкѣ (направленный въ сторону возрастающаго угла ψ), назовемъ черезъ U, V и W проекціи перемѣщеній точекъ тѣла на направленія r, z и ψ.

Такъ какъ

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = \frac{1}{r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

то уравненія (36) представятся въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} & 2(k+1)r\frac{\partial\theta}{\partial r}=-\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\,, \quad 2(k+1)r\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\partial \Gamma}{\partial r}\,, \\ & \frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial B}{\partial r}=0\,, \end{aligned}\right\}\ldots (84)$$

а уравненія (35) дадутъ

$$rA=-\frac{\partial(Wr)}{\partial z}\,,\qquad rB=\frac{\partial(Wr)}{\partial r}\,,\qquad \frac{1}{r}\Gamma=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial r}\,;\ \ldots (85)$$

кромѣ того

$$\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial(Ur)}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial z}\ \ldots\ldots (86)$$

При помощи равенствъ (85) и (86) легко привести первыя два изъ уравненій (84) къ такимъ

$$\left.\begin{aligned} & (2k+1)\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(Ur)}{\partial r}\right)=0\,, \\ & (2k+1)r\frac{\partial\theta}{\partial z}+r\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)=0\,. \end{aligned}\right\}\ldots (87)$$

Уравненіе (37) даетъ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0\ \ldots\ldots (88)$$

Проинтегрировавъ это уравненіе и принимая θ за извѣстную, опредѣлимъ по уравненіямъ (87) U и V. Полученныя выраженія, конечно, должны отождествлять равенство (86).

Послѣднее изъ уравненій (84) въ силу первыхъ двухъ изъ (85) приведется къ виду

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rW)}{\partial r}\right)=0\ \ldots\ldots (89)$$

§ 9.

Опредѣлимъ состояніе равновѣсія сплошного цилиндра, находящагося подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ, приложенныхъ къ его боковой поверхности.

Частнымъ рѣшеніемъ уравненія (88) будетъ функція

$$\theta^k=\theta_r^k\theta_z\,,$$

гдѣ θ_r зависитъ только отъ r, а θ_z — только отъ z.

Подставивъ это выраженіе въ упомянутое уравненіе и раздѣливъ обѣ части на произведеніе $\theta_r\theta_z$, найдемъ

$$\frac{\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[r\dfrac{d\theta_r^k}{dr}\right]}{\theta_r^k}+\frac{\dfrac{d^2\theta_z^k}{dz^2}}{\theta_z^k}=0,$$

откуда необходимо

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\theta_r^k}{dr}\right]+m_k^2r\theta_r^k=0,\\ &\frac{d^2\theta_z^k}{dz^2}-m_k^2\theta_r^k=0,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(90)$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\theta_r^k}{dr}\right]-m_k^2r\theta_r^k=0,\\ &\frac{d^2\theta_z^k}{dz^2}+m_k^2\theta_z^k=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(91)$$

Остановимся на послѣднихъ уравненіяхъ, интеграція которыхъ даетъ

$$\theta_r^k=A_{\theta r}^kJ_0(im_kr)+B_{\theta r}^kY_0(im_kr),$$

$$\theta_z^k=A_{\theta z}^k\cos(m_kz)+B_{\theta z}^k\sin(m_kz),$$

гдѣ $A_{\theta r}^k$, $B_{\theta r}^k$, $A_{\theta z}^k$, $B_{\theta z}^k$ и m_k нѣкоторыя (пока произвольныя) постоянныя. Такъ какъ $Y_0(im_kr)$ при $r=0$ обращается въ безконечность, а θ предполагается непрерывной функцiей для всѣхъ точекъ тѣла, то $B_{\theta r}^k=0$, и

$$\theta^k=\left[A_{\theta z}^k\cos m_kz+B_{\theta z}^k\sin m_kz\right]J_0(im_kr)\ldots\ldots\ldots(92)$$

гдѣ $A_{\theta z}^k$ и $B_{\theta z}^k$ обозначаютъ произведенiе прежнихъ постоянныхъ того же обозначенія на $A_{\theta r}^k$.

Общее рѣшеніе уравненія (88) будетъ

$$\theta=\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[A_{\theta z}^k\cos m_kz+B_{\theta z}^k\sin m_kz\right]J_0(im_kr)\ldots\ldots\ldots(93)$$

§ 10.

Положивъ

$$U=\sum_0^\infty U_r^kU_z^k,\quad V=\sum_0^\infty V_r^kV_z^k$$

*

и принявъ во вниманіе выраженіе (93), получимъ изъ уравненій (87)

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{d^2U_r^k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_r^k}{dr}-\frac{1}{r^2}U_r^k\right]U_z^k+U_r^k\frac{d^2U_z^k}{dz^2}+(2k+1)\frac{d\theta_r}{dr}\theta_z=0\,,\\ \left[\frac{d^2V_r^k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV_r^k}{dr}\right]V_z^k+V_r^k\frac{d^2V_z^k}{dz^2}+(2k+1)\theta_r\frac{d\theta_z}{dz}=0\,.\end{aligned}\right\}\quad(94)$$

Первое изъ этихъ уравненій будетъ удовлетворено, если положимъ $U_z^k=\theta_z^k$ и опредѣлимъ U_r^k изъ уравненія

$$\frac{d^2U_r^k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_r^k}{dr}-\left(m_k^2+\frac{1}{r^2}\right)U_r^k=-(2k+1)\frac{d\theta_r}{dr},\;.\;.\quad(95)$$

интеграломъ котораго будетъ выраженіе

$$U_r^k=A_{ur}^kJ_1(im_kr)+B_{ur}^kY_1(im_kr)\,,$$

гдѣ

$$A_{ur}^k=(A_{ur}^k)+(2k+1)im_k\frac{m_k^2r^2}{2}\Big[J_1(im_kr)Y_1(im_kr)-J_0(im_kr)Y_2(im_kr)\Big],$$

$$B_{ur}^k=(B_{ur}^k)-(2k+1)im_k\frac{m_k^2r^2}{2}\Big[J_1^2(im_kr)-J_0(im_kr)J_2(im_kr)\Big].$$

(A_{ur}^k) и (B_{ur}^k) произвольныя постоянныя. Въ дальнѣйшемъ будемъ обозначать ихъ просто черезъ A_{ur}^k и B_{ur}^k.

Помноживъ первое изъ этихъ равенствъ на $J_1(im_kr)$, второе на $Y_1(im_kr)$ и сложивъ, получимъ

$$U_r^k=A_{ur}^kJ_1(im_kr)+B_{ur}^kY_1(im_kr)+(2k+1)\frac{m_k^2r}{2}J_0(im_kr)\,,$$

для чего стоитъ только воспользоваться равенствомъ (72) § 7.

Предполагая U непрерывной функцiей координатъ, должны положить $B_{ur}^k=0$, такъ что

$$U_r^k=A_{ur}^kJ_1(im_kr)+(2k+1)\frac{m_k^2r}{2}J_0(im_kr)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(96)$$

§ 11.

Переходимъ къ опредѣленію функціи V.

Положивъ

$$V_z^k=\frac{d\theta_z^k}{dz}=m_k\Big[B_{\theta r}^k\cos m_kz-A_{\theta z}^k\sin m_kz\Big],$$

имѣемъ

$$\frac{d^2 V_z^k}{dz^2} = -m_k^2 \frac{d\theta_z^k}{dz},$$

а для опредѣленія V_r^k получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2 V_r^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d V_r^k}{dr} - m_k^2 V_r = -(2k+1)\theta_r^k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

интегралъ котораго будетъ

$$V_r^k = K_1^k J_0(im_k r) + K_2^k Y_0(im_k r),$$

гдѣ

$$K_1^k = A_{vr}^k - \frac{2k+1}{m_k^2}\int J_0(z) Y_0(z) z dz,$$

$$K_2^k = B_{vr}^k + \frac{2k+1}{m_k^2}\int J_0^2(z) z dz,$$

$$z = im_k r,$$

или [на основаніи формулъ (82) и (83)]

$$K_1^k = A_{vr}^k + \frac{(2k+1)r^2}{2}\Big[J_0(im_k r) Y_0(im_k r) + J_1(im_k r) Y_1(im_k r)\Big],$$

$$K_2^k = B_{vr}^k - \frac{(2k+1)r^2}{2}\Big[J_0^2(im_k r) + J_1^2(im_k r)\Big].$$

A_{vr}^k и B_{vr}^k произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ,

$$V_r^k = A_{vr}^k J_0(im_k r) + B_{vr}^k Y_0(im_k r) + \frac{(2k+1)ri}{2m_k} J_1(im_k r).$$

Функція V непрерывна, т. е. $B_{vr}^k = 0$, и

$$V_r^k = A_{vr}^k J_0(im_k r) + \frac{(2k+1)ri}{2m_k} J_1(im_k r). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

На основаніи этого равенства и (96) заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^\infty \Big(A_{\theta z}^k \cos m_k z + B_{\theta z}^k \sin m_k z\Big)\Big(A_{ur}^k J_1(im_k r) + \frac{(2k+1)m_k^2 r}{2} J_0(im_k r)\Big), \\ V &= \sum_0^\infty m_k \Big(B_{\theta z}^k \cos m_k z - A_{\theta z}^k \sin m_k z\Big)\Big(A_{vr}^k J_0(im_k r) + \frac{(2k+1)ri}{2m_k} J_1(im_k r)\Big). \end{aligned}\right\} (99)$$

§ 12.

Подставивъ эти выраженія U, V и θ (рав. 93) въ (86), получимъ, по сокращеніи на θ_r,

$$J_0(im_kr)=\left[A^k_{ur}\frac{dJ_1(im_kr)}{dr}+\frac{(2k+1)m_k^2}{2}J_0(im_kr)+\frac{(2k+1)m_k^2r}{2}\frac{dJ_0(im_kr)}{dr}\right]+$$
$$+\left[A^k_{ur}\frac{J_1(im_kr)}{r}+\frac{(2k+1)m_k^2}{2}J_0(im_kr)\right]-m_k^2\left[A^k_{vr}J_0(im_kr)+\frac{(2k+1)ri}{m_k}J_1(im_kr)\right],$$

или

$$J_0(im_kr)=\frac{A^k_{ur}}{r}\left[r\frac{dJ_1(im_kr)}{dr}+J_1(im_kr)\right]-m_k^2A^k_{vr}J_0(im_kr)+$$
$$+\frac{2k+1}{2i}m_kr\left[im_k\frac{dJ_0(im_kr)}{dr}+J_1(im_kr)\right].$$

Отсюда

$$J_0(im_kr)\left[1-A^k_{ur}im_k+m_k^2A^k_{vr}\right]=0,$$

т. е.

$$A^k_{ur}=-\frac{i(1+m_k^2A^k_{vr})}{m_k}.$$

U и V вещественныя функціи r, $J_0(im_kr)$ также вещественная функція этой перемѣнной, а $J_1(im_kr)=i\psi(r)$, гдѣ $\psi(r)$ вещественная функція r. Отсюда слѣдуетъ, что A^k_{vr} вещественная постоянная, а A^k_{ur} мнимая, вслѣдствіе чего первый членъ выраженія $U^k=U^k_rU^k_z$ будетъ вещественной функціей перемѣнныхъ.

И такъ, окончательно,

$$\left.\begin{aligned}U=\sum_0^\infty\left[A^k_{\theta z}\cos m_kz+B^k_{\theta z}\sin m_kz\right]&\left[-\frac{1+m_k^2A^k_{vr}}{m_k}iJ_1(im_kr)+\right.\\&\left.+\frac{(2k+1)m_k^2r}{2}J_0(im_kr)\right],\\V=\sum_0^\infty\left[B^k_{\theta z}\cos m_kz-A^k_{\theta z}\sin m_kz\right]&\left[m_kA^k_{vr}J_0(im_kr)+\frac{(2k+1)ri}{2}J_1(im_kr)\right].\end{aligned}\right\}\quad(100)$$

§ 13.

Представивъ уравненіе (89) въ видѣ

$$\frac{\partial^2W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{1}{r^2}W+\frac{\partial^2W}{\partial z^2}=0$$

и положивъ

$$W = \sum_{0}^{\infty} W_r^k W_z^k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

получимъ для опредѣленія W_r^k и W_z^k уравненія

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 W_r^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_r^k}{dr} - \left(n_k^2 + \frac{1}{r^2}\right) W_r^k = 0, \\ &\frac{d^2 W_z^k}{dz^2} + n_k^2 W_z^k = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (102)$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 W_r^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_r^k}{dr} + \left(n_k^2 - \frac{1}{r^2}\right) W_r^k = 0, \\ &\frac{d^2 W_z^k}{dz^2} - n_k^2 W_z^k = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (103)$$

Послѣдними воспользуемся впослѣдствіи, а теперь остановимся на первыхъ. Интеграція перваго изъ нихъ даетъ

$$W_r^k = A_{wr}^k J_1(in_k r) + B_{wr}^k Y_1(in_k r).$$

При условіи непрерывности функціи W имѣемъ $B_{wr}^k = 0$, такъ что

$$W_r^k = A_{wr}^k J_1(in_k r), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

гдѣ A_{wr}^k произвольная постоянная. Изъ второго же слѣдуетъ, что

$$W_z^k = A_{wz}^k \cos n_k z + B_{wz}^k \sin n_k z. \quad \ldots\ldots \quad (105)$$

Такимъ образомъ,

$$W = \sum_{0}^{\infty} \left[A_{wz}^k \cos n_k z + B_{wz}^k \sin n_k z \right] J_1(in_k r), \quad \ldots \quad (106)$$

гдѣ подъ A_{wz}^k и B_{wz}^k разумѣются произведенія постоянныхъ равенства (105) на A_{wr}^k.

§ 14.

Остается опредѣлить постоянныя по предѣльнымъ условіямъ задачи. Принимая во вниманіе послѣднія формулы § 3, имѣемъ для даннаго случая

$$\left.\begin{aligned}
&R_r = 2K\left[k\theta + \frac{\partial U}{\partial r}\right], \quad Z_z = 2K\left[k\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\right], \\
&\Psi_\psi = 2K\left[k\theta + \frac{U}{r}\right], \\
&Z_\psi = \Psi_z = K\frac{\partial W}{\partial z}, \quad \Psi_r = R_\psi = Kr\frac{\partial\left(\dfrac{W}{r}\right)}{\partial r}, \\
&R_z = Z_r = K\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r}\right).
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (107)$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}
R_r &= 2K\sum_0^\infty\left[\psi_{1k}(\xi) + A^k_{vr}\psi_{2k}(\xi)\right]\left[A^k_{z}\cos m_k z + B^k_{\theta z}\sin m_k z\right], \\
Z_z &= K\sum_0^\infty\left[\varphi_{1k}(\xi) + A^k_{vr}\varphi_{2k}(\xi)\right]\left[B^k_{\theta z}\cos m_k z - A^k_{\theta z}\sin m_k z\right], \\
\Psi_r &= K\sum_0^\infty J_2(\xi)\left[A^{1k}_{wz}\cos n_k z + B^{1k}_{wz}\sin n_k z\right],
\end{aligned}\right\} (108)$$

гдѣ

$$\xi = im_k r, \quad \zeta = in_k r$$

$$\psi_{1k}(\xi) = kJ_0(\xi) + \frac{d}{dr}\left[\frac{(2k+1)m_k^2 r}{2}J_0(\xi) - \frac{iJ_1(\xi)}{m_k}\right],$$

$$\psi_{2k}(\xi) = -m_k i\frac{dJ_1(\xi)}{dr}$$

$$\varphi_{1k}(\xi) = \frac{(2k+1)m_k^3 r}{2}J_0(\xi) - iJ_1(\xi) + \frac{2k+1}{2}i\frac{d}{dr}\left[rJ_1(\xi)\right],$$

$$\varphi_{2k}(\xi) = m_k\left[\frac{dJ_0(\xi)}{dr} - m_k iJ_1(\xi)\right] = -2im_k^2 J_1(\xi),$$

$$A^{1k}_{wz} = \frac{A^k_{zw}n_k}{i}, \quad B^{1k}_{wr} = \frac{B^k_{zw}n_k}{i}.$$

ψ_{ik}, $\varphi_{ik} (i = 1, 2)$ суть вещественныя функціи r.

Назовемъ черезъ a радіусъ основанія цилиндра, а черезъ $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ три пока произвольныхъ функціи перемѣнной z. Пусть на поверхности

$$(R_r)_{r=a} = f_1(z), \quad (Z_r)_{r=a} = f_2(z), \quad (\Psi_r)_{r=a} = f_3(z),$$

или

$$\left.\begin{aligned} 2K\sum_0^\infty\left[\psi_{1k}(\xi_0)+A^k_{vr}\psi_{2k}(\xi_0)\right]\left[A^k_{\theta z}\cos m_kz+B^k_{\theta z}\sin m_kz\right]&=f_1(z)\,,\\ K\sum_0^\infty\left[\varphi_{1k}(\xi_0)+A^k_{vr}\varphi_{2k}(\xi_0)\right]\left[B^k_{\theta z}\cos m_kz-A^k_{\theta z}\sin m_kz\right]&=f_2(z)\,,\\ K\sum_0^\infty J_2(\xi_0)\left[A^{1k}_{wz}\cos n_kz+B^{1k}_{wz}\sin n_kz\right]&=f_3(z)\,, \end{aligned}\right\}\quad(109)$$

гдѣ $\xi_0=im_ka$, $\zeta_0=in_ka$.

Постоянныя m_k и $n_k(k=0,1,2\ldots\infty)$ произвольны, также какъ и $A^k_{\theta z}$, $B^k_{\theta z}$ и A^k_{vr}.

Назовемъ высоту цилиндра черезъ l. Положимъ

$$z=\frac{l}{2\pi}z_1\,.$$

При измѣненіи z отъ 0 до l, z_1 измѣняется отъ 0 до 2π.

Первыя два изъ равенствъ (109) даютъ

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^\infty\left[M'_k\cos\frac{m_klz_1}{2\pi}+M''_k\sin\frac{m_klz_1}{2\pi}\right]&=\frac{1}{2K}f_1\left(\frac{lz_1}{2\pi}\right),\\ \sum_0^\infty\left[N'_k\cos\frac{m_klz_1}{2\pi}-N''_k\sin\frac{m_klz_1}{2\pi}\right]&=\frac{1}{K}f_2\left(\frac{lz_1}{2\pi}\right), \end{aligned}\right\}\quad\ldots\,(110)$$

гдѣ

$$M'_k=A^k_{\theta z}\left[\psi_{1k}(\xi_0)+A^k_{vr}\psi_{2k}(\xi_0)\right],$$

$$M''_k=B^k_{\theta z}\left[\psi_{1k}(\xi_0)+A^k_{vr}\psi_{2k}(\xi_0)\right],$$

$$N'_k=B^k_{\theta z}\left[\varphi_{1k}(\xi_0)+A^k_{vr}\varphi_{2k}(\xi_0)\right],$$

$$N''_k=A^k_{\theta z}\left[\varphi_{1k}(\xi_0)+A^k_{vr}\varphi_{2k}(\xi_0)\right].$$

Выберемъ постоянныя m_k такъ, чтобы

$$\frac{m_kl}{2\pi}=k\,,\quad\text{т. е.}\quad m_k=\frac{2\pi k}{l}.$$

Обозначивъ $\dfrac{1}{2K\pi}f_1\left(\dfrac{l}{2\pi}z_1\right)$, $\dfrac{1}{K\pi}f_2\left(\dfrac{l}{2\pi}z_1\right)$ просто черезъ f_1 и f_2, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}\sum_0^\infty\Big[M_k'\cos kz_1+M_k''\sin kz_1\Big]&=\pi f_1,\\ \sum_0^\infty\Big[N_k'\cos kz_1-N_k''\sin kz_1\Big]&=\pi f_2.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(110_1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$M_k'=\int_0^{2\pi}f_1\cos kz_1dz_1\qquad M_k''=\int_0^{2\pi}f_1\sin kz_1dz_1,$$

$$N_k'=\int_0^{2\pi}f_2\cos kz_1dz_1,\quad N_k''=-\int_0^{2\pi}f_2\sin kz_1dz_1,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned}A_{\theta z}^k\psi_{1k}(\xi_0)+A_{\theta z}^kA_{vr}^k\psi_{2k}(\xi_0)&=\int_0^{2\pi}f_1\cos kz_1dz_1,\\ A_{\theta z}^k\varphi_{1k}(\xi_0)+A_{\theta z}^kA_{vr}^k\varphi_{2k}(\xi_0)&=-\int_0^{2\pi}f_2\sin kz_1dz_1,\\ B_{\theta z}^k\psi_{1k}(\xi_0)+B_{\theta z}^kA_{vr}^k\psi_{2k}(\xi_0)&=\int_0^{2\pi}f_1\sin kz_1dz_1,\\ B_{\theta z}^k\varphi_{1k}(\xi_0)+B_{\theta z}^kA_{vr}^k\varphi_{2k}(\xi_0)&=\int_0^{2\pi}f_2\cos kz_1dz_1.\end{aligned}\right\}\quad..(111)$$

Функціи f_1 и f_2, какъ показываютъ эти равенства, не вполнѣ произвольны, ибо, по исключеніи произвольныхъ постоянныхъ, получается соотношеніе

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f_1\cos kz_1dz_1.\int_0^{2\pi}f_2\cos kz_1dz_1+\int_0^{2\pi}f_1\sin kz_1dz_1.\int_0^{2\pi}f_2\sin kz_1dz_1=0\\ (k=1,\,2\ldots\infty).\end{aligned}\right\}(112)$$

Сверхъ того онѣ должны разлагаться въ сходящіеся ряды Фурье, т. е. должны быть функціями ограниченной варіаціи (fonctions à variation limitée) [1]). Условіе (112) будетъ выполнено, если положимъ, напримѣръ, $f_2=0$, или $f_1=0$, т. е. допустимъ, что на поверхность цилиндра дѣйствуютъ силы, лежащія въ плоскостяхъ нормальныхъ сѣченій, или въ плоскостяхъ, касательныхъ къ его поверхности.

---

[1]) См. Jordan. „Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique". T. II, p. 216.

Замѣтимъ еще, что f_2 при разложеніи въ рядъ Фурье не должна содержать члена, независящаго отъ z_1.

Рѣшая уравненія (111), получаемъ

$$\left.\begin{aligned} A_{\theta z}^{k} &= \frac{\varphi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_1 \sin kz_1 dz_1 + \psi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_2 \sin kz_1 dz_1}{\varDelta_k}, \\ B_{\theta z}^{k} &= \frac{\varphi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_1 \sin kz_1 dz_1 - \psi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_2 \cos kz_1 dz_1}{\varDelta_k}, \\ A_{vr}^{k} &= \frac{-\psi_{1k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_2 \sin kz_1 dz_1 + \varphi_{1k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_1 \cos kz_1 dz_1}{\varphi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2} f_1 \cos kz_1 dz_1 + \psi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_2 \sin kz_1 dz_1}, \end{aligned}\right\} . \quad (113)$$

гдѣ

$$\varDelta_k = \psi_{1k}(\xi_0)\varphi_{2k}(\xi_0) - \varphi_{1k}(\xi_0)\psi_{2k}(\xi_0)$$

постоянной, не равной нулю.

Если $f_2 = 0$, то

$$A_{\theta z}^{k} = P\int_0^{2\pi} f_1 \cos kz_1 dz_1, \quad B_{\theta z}^{k} = P\int_0^{2\pi} f_1 \sin kz_1 dz_1$$

$$A_{vr}^{k} = \frac{\varphi_{1k}(\xi_0)}{\varphi_{2k}(\xi_0)}.$$

Послѣдняя постоянная, какъ видимъ, не зависитъ отъ произвольной функціи $f_1(z)$. Тотъ-же результатъ получимъ, положивъ $f_1 = 0$.

Формулы (113) справедливы для всякаго k, начиная отъ 1. При $k = 0$ имѣемъ

$$A_{\theta z}^{0} = \frac{1}{4\pi K k}\int_0^{\frac{1}{2\pi}} f_1\left(\frac{l}{2\pi} z_1\right) dz_1,$$

а постоянная A_{vr}^{0} выключается сама собою, такъ какъ входитъ въ выраженія U, V и въ проекціи напряженій или съ множителемъ m_k, или съ коэффиціентомъ при функціи, обращающейся въ нуль при $m_k = 0$.

Вводя, подобно предыдущему, перемѣнную z_1 въ послѣднее изъ равенствъ (109) и полагая

$$n_k = \frac{2\pi k}{l} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

находимъ

$$A_{wz}^{1k} = \frac{1}{D_k}\int_0^{2\pi} f_3 \cos kz_1 dz_1, \quad B_{wz}^{1k} = \frac{1}{D_k}\int_0^{2\pi} f_3 \sin kz_1 dz_1, \quad . \ . \ (114)$$

гдѣ

$$D_k = KJ_2(\xi_0)\,,\quad f_3 = \frac{1}{\pi} f_3\left(\frac{l}{2\pi} z_1\right)$$

$$k = (1, 2 \ldots \infty).$$

Всѣ постоянныя опредѣлены.

§ 15.

Второе, третье и четвертое изъ равенствъ (107) даютъ

$$\left.\begin{aligned} Z_z &= 2K \sum_0^{\infty} \left(X_{1k} + A_{vr}^k X_{2k}\right)\left[A_{\theta z}^k \cos kz_1 + B_{\theta z}^k \sin kz_1\right], \\ \Psi_\varphi &= 2K \sum_0^{\infty} \left(Y_{1k} + A_{vr}^k Y_{2k}\right)\left[A_{\theta z}^k \cos kz_1 + B_{\theta z}^k \sin kz_1\right], \\ Z_\varphi &= \Psi_z = K \sum_0^{\infty} \left[B_{wz}^{1k} \cos kz_1 - A_{wz}^{1k} \sin kz_1\right] Z_k, \end{aligned}\right\} . \quad (115)$$

гдѣ

$$X_{1k} = kJ_0\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right) - \frac{2\pi k(2k+1)}{2l} irJ_1\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right),$$

$$X_{2k} = -\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2 J_0\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right),$$

$$Y_{1k} = \left[k + \frac{2k+1}{r}\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2\right] J_0\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right) - \frac{l}{2\pi k} \frac{iJ_1\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right)}{r},$$

$$Y_{2k} = -\frac{2\pi k}{l} \frac{iJ_1\left(\frac{2\pi k}{l} r\right)}{r}, \quad Z_k = \frac{2\pi k}{l} iJ_1\left(\frac{2\pi k}{l} r\right),$$

а $A_{\theta z}^k \ldots A_{wz}^{1k}$ постоянныя, опредѣленныя равенствами (113) и (114).

Если $f_3(z) = 0$, т. е. силы, приложенныя къ поверхности цилиндра, лежатъ въ меридіанальныхъ плоскостяхъ, то $A_{wz}^{1k} = B_{wz}^{1k} = 0$ и, на основаніи послѣднихъ изъ равенствъ (106) и (115), $\Psi_r = Z_\varphi = \Psi_z = 0$ для всѣхъ точекъ тѣла.

Если $f_2(z)$ разлагается въ рядъ, содержащій только sinus'ы кратныхъ дугъ, то $B_{\theta z}^k = 0$ и $Z_r = 0$ на основаніяхъ цилиндра (т. е. при $z_1 = 0$ и 2π); въ этомъ случаѣ $f_1(z)$ должно разлагаться въ рядъ по cosinus'амъ кратныхъ дугъ. Если послѣднему условію удовлетворяетъ $f_2(z)$, то $A_{\theta z}^k = 0$ и на основаніяхъ цилиндра $Z_z = 0$, f_1 при этомъ должно разлагаться въ рядъ по sinus'амъ кратныхъ дугъ. Функція Ψ_φ убываетъ по мѣрѣ приближенія точекъ къ основаніямъ цилиндра и для точекъ безконечно близкимъ къ нимъ обращается въ нуль.

Ряды (100_1) и (106), сходящіеся для $r=a$ (рад. основ. цилиндра), будутъ сходиться и для всѣхъ вещественныхъ значеній $r<a$, ибо mod. U_r^k, V_r^k и W_r^k суть возрастающія функціи r [1]).

VI. О равновѣсіи полаго цилиндра подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ его основаніямъ.

§ 16.

Рѣшимъ теперь вопросъ о равновѣсіи полаго кругового цилиндра подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ, приложенныхъ къ его основаніямъ, предполагая, что на его боковую поверхность не дѣйствуетъ силъ.

Полагая, по прежнему,

$$\theta=\sum_0^\infty \theta^k,\quad \theta^k=\theta_z^k\theta_z^k,$$

получаемъ для опредѣленія θ_r^k и θ_z^k уравненія (91), интеграція которыхъ даетъ

$$\left.\begin{aligned}\theta_r^k&=A_{\theta r}^k J_0(m_k r)+B_{\theta r}^k Y_0(m_k r),\\ \theta_z^k&=A_{\theta z}^k e^{m_k z}+B_{\theta z}^k e^{-m_k z}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(116)$$

Слѣдовательно,

$$\theta=\sum_0^\infty\left[A_{\theta r}^k J_0(m_k r)+B_{\theta z}^k Y_0(m_k r)\right]\left[A_{\theta z}^k e^{m_k z}+B_{\theta z}^k e^{-m_k z}\right],\ldots(117)$$

гдѣ $A_{\theta r}^k$, $B_{\theta r}^k$, $A_{\theta z}^k$, $B_{\theta z}^k$ постоянныя, не равныя нулю.

Положивъ, какъ и прежде,

$$U=\sum_0^\infty U_r^k U_z^k,\quad V=\sum_0^\infty V_r^k V_z^k,$$

получимъ

$$U_z^k=A_{\theta z}^k e^{m_k z}+B_{\theta z}^k e^{-m_k z}=\theta_z^k,\ldots\ldots\ldots(118)$$

$$\frac{d^2U_r^k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_r^k}{dr}+\left(m_k^2-\frac{1}{r}\right)U_r^k=-(2k+1)\frac{d\theta_r^k}{dr},\ldots(119)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$U_r^k=K_{1k}J_1(m_k r)+K_{2k}Y_1(m_k r),\ldots\ldots(120)$$

гдѣ

---

[1]) По крайней мѣрѣ для значеній r, не превосходящихъ нѣкотораго предѣла.

$$K_{1k} = A^k_{ur} - (2k+1) m_k A^k_{\theta r} \frac{r^2}{2} \Big[J_1(m_k r) Y_1(m_k r) - J_0(m_k r) Y_2(m_k r) \Big] -$$

$$- (2k+1) m_k B^k_{\theta r} \frac{r^2}{2} \Big[Y_1^2(m_k r) - Y_0(m_k r) Y_2(m_k r) \Big],$$

$$K_{2k} = B^k_{ur} + (2k+1) m_k A^k_{\theta r} \frac{r^2}{2} \Big[J_1^2(m_k r) - J(m_k r) J_2(m_k r) \Big] +$$

$$+ (2k+1) m_k B^k_{\theta r} \frac{r^2}{2} \Big[J_1(m_k r) Y_1(m_k r) - J_2(m_k r) Y_0(m_k r) \Big],$$

такъ что

$$\left. \begin{aligned} U^k_r = A^k_{ur} J_1(m_k r) + B^k_{ur} Y_1(m_k r) - (2k+1) \frac{r}{2} \Big[A^k_{\theta r} J_0(m_k r) + \\ + B^k_{\theta r} Y_0(m_k r) \Big], \end{aligned} \right\} \qquad (121)$$

въ чемъ легко убѣдиться при помощи фурмулъ § 7.

A^k_{ur} и B^k_{ur} новыя произвольныя постоянныя.

Далѣе,

$$V^k_z = m_k \Big[A^k_{\theta z} e^{m_k z} - B^k_{\theta z} e^{-m_k z} \Big] = \frac{d\theta^k_z}{dz} \quad \ldots\ldots (122)$$

и

$$\frac{d^2 V^k_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d V^k_r}{dr} + m_k^2 V^k_r = -(2k+1) \theta^k_r. \quad \ldots\ldots (123)$$

Отсюда

$$V^k_r = M_{1k} J_0(m_k r) + M_{2k} Y_0(m_k r), \quad \ldots\ldots (124)$$

гдѣ

$$M_{1k} = A^k_{vr} + \frac{(2k+1) r^2}{2} \Big\{ A^k_{\theta r} \Big[J_0(m_k r) Y_0(m_k r) + J_1(m_k r) Y_1(m_k r) \Big] +$$

$$+ B^k_{\theta r} \Big[Y_0^2(m_k r) + Y_1^2(m_k r) \Big] \Big\},$$

$$M_{2k} = B^k_{vr} - \frac{(2k+1) r^2}{2} \Big\{ A^k_{\theta r} \Big[J_0^2(m_k r) + J_1^2(m_k r) \Big] +$$

$$+ B^k_{\theta r} \Big[J_0(m_k r) Y_0(m_k r) + J_1(m_k r) Y_1(m_k r) \Big] \Big\}.$$

A^k_{vr} и B^k_{vr} произвольныя постоянныя.

Слѣдовательно,

$$V_r^k = A_{vr}^k J_0(m_k r) + B_{vr}^k Y_0(m_k r) - \frac{(2k+1)r}{2m_k}\left[A_{\theta r}^k J_1(m_k r) + B_{\theta r}^k Y_1(m_k r)\right]. \quad (125)$$

Равенства (118), (121), (122) и (125) даютъ слѣдующія выраженія для U и V

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^\infty \left[A_{\theta z}^k e^{m_k z} + B_{\theta z}^k e^{-m_k z}\right]\left[\varepsilon_{m_k u} - \frac{(2k+1)r}{2}\varrho_{m_k \theta}\right], \\ V &= \sum_0^\infty \left[A_{\theta z}^k e^{m_k z} - B_{\theta z}^k e^{-m_k z}\right]\left[m_k \varrho_{m_k v} - \frac{(2k+1)r}{2}\varepsilon_{m_k \theta}\right] \end{aligned}\right\}. \quad (126)$$

гдѣ ε_{m_k} и ϱ_{m_k} суть интегралы уравненій

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \left(m_k^2 - \frac{1}{r^2}\right)F = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + m_k^2 F = 0.$$

Значки u, v и θ указываютъ на постоянныя, отъ которыхъ зависятъ эти интегралы.

Изъ уравненій (103) § 13 получаемъ

$$\left.\begin{aligned} W_z^k &= A_{wr}^k e^{n_k z} + B_{wz}^k e^{-n_k z}, \\ W_r^k &= A_{wr}^k J_1(n_k r) + B_{wr}^k Y_1(n_k r), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (127)$$

гдѣ A_{wz}^k, B_{wz}^k, A_{wr}^k и B_{wr}^k произвольныя постоянныя, и

$$W = \sum_0^\infty \left[A_{wz}^k e^{n_k z} + B_{wz}^k e^{-n_k z}\right]\varepsilon_{n_k w} \quad \ldots\ldots \quad (128)$$

Подставивъ найденныя выраженія U, V и θ въ равенство (85), получимъ (по сокращеніи на θ_z)

$$A_{\theta r}^k J_0 + B_{\theta r}^k Y_0 = A_{ur}^k\left[\frac{dJ_1}{dr} + \frac{J_1}{r}\right] + B_{ur}^k\left[\frac{dY_1}{dr} + \frac{Y_1}{r}\right] -$$

$$-(2k+1)\left[A_{\theta r}^k J_0 + B_{\theta r}^k Y_0\right] + m_k^2\left[A_{vr}^k J_0 + B_{vr}^k Y_0\right] -$$

$$-\frac{2k+1}{2}r\left[A_{\theta r}^k\left(\frac{dJ_0}{dr} + m_k J_1\right) + B_{\theta r}^k\left(\frac{dY_0}{dr} + m_k Y_1\right)\right]^{1)}.$$

[1]) Въ дальнѣйшемъ будемъ вмѣсто $J_0(m_k r)$ и т. д. писать просто J_0 и т. д.

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} 2(k+1)\,A^k_{\theta r} &= m_k A^k_{ur} + m_k^2 A^k_{vr}\,,\\ 2(k+1)\,B^k_{\theta r} &= m_k B^k_{ur} + m_k^2 B^k_{vr}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (129)$$

Такимъ образомъ, каждый членъ рядовъ, выражающихъ U и V, содержитъ только по четыре произвольныхъ постоянныхъ.

§ 17.

Положимъ

$$\varepsilon_{m_k} = \left(2A^k_{ur} - \frac{2(k+1)}{m} A^k_{\theta r}\right) J_0 + \left(2B^k_{ur} - \frac{2(k+1)}{m_k} B^k_{\theta r}\right) Y_0 +$$

$$+ (2k+1)\, r \left(A^k_{\theta r} J_1 + B^k_{\theta r} Y_1\right).$$

Функція ε_{m_k} удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{d^2\varepsilon_{m_k}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varepsilon_{m_k}}{dr} + m_k^2 \varepsilon_{m_k} = 2(2k+1) m_k \varrho_{m_k\theta}. \quad \ldots \quad (130)$$

Легко видѣть, что

$$U_r = -\frac{1}{2m_k}\left(\varepsilon_{m_k}\right)' - \frac{k+1}{m_k^2}\left(\varrho_{m_k\theta}\right)',$$

$$V_r = \frac{1}{2m_k}\left[\frac{2(k+1)}{m_k}\varrho_{m_k\theta} - \varepsilon_{m_k}\right].$$

Такимъ образомъ,

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^\infty -\theta^k_z \left[\frac{1}{2m_k}\left(\varepsilon_{m_k}\right)' + \frac{k+1}{m_k^2}\left(\varrho_{m_k\theta}\right)'\right],\\ V &= \sum_0^\infty \frac{d\theta^k_z}{dz}\frac{1}{2m_k}\left[\frac{2(k+1)}{m_k}\varrho_{m_k\theta} - \varepsilon_{m_k}\right],\\ W &= \sum_0^\infty -W^k_z \frac{1}{n_k}\left(\varrho_{n_k w}\right)',\\ \theta &= \sum_0^\infty \theta^k_z \varrho_{m_k\theta}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (131)$$

Составляя выраженія проекцій на координатныя оси напряженій [равенства (107)], получаемъ

$$k\theta^k+\frac{\partial U^k}{\partial r}=\left[k\varrho_{m_k\theta}-\frac{1}{2m_k}(\varepsilon_{m_k})''-\frac{k+1}{m_k^2}(\varrho_{m_k\theta})''\right]\theta_z,$$

или, на основаніи уравненій (130) и перваго изъ (91),

$$k\theta^k+\frac{\partial U^k}{\partial r}=\left[\frac{1}{2m_k r}(\varepsilon_{m_k})'+\frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k}+\frac{k+1}{m_k^2}\frac{1}{r}(\varrho_{m_k\theta})'\right]\theta_z.$$

Далѣе,

$$k\theta^k+\frac{\partial V^k}{\partial z}=k\varrho_{m_k\theta}+\frac{m_k^2}{2}\left[\frac{2(k+1)}{m_k^2}\varrho_{m_k\theta}-\frac{\varepsilon_{m_k}}{m_k}\right]=$$

$$=\left[(2k+1)\varrho_{m_k\theta}-\frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k}\right]\theta_z,$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial r}=\frac{W_z^k}{r^2 n_k}\left[2(\varrho_{n_k w})'+rn_k^2\varrho_{n_k w}\right],$$

$$\frac{\partial U^k}{\partial z}+\frac{\partial V^k}{\partial r}=-(\varepsilon_{m_k})'\frac{d\theta_z^k}{dz}\frac{1}{m_k}.$$

Такимъ образомъ,

$$\left.\begin{aligned}
R_r&=2K\sum_0^\infty\theta_z\left[\frac{1}{2m_k r}(\varepsilon_{m_k})'+\frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k}+\frac{k+1}{m_k^2}\frac{1}{r}(\varrho_{m_k\theta})'\right],\\
Z_z&=2K\sum_0^\infty\theta_z\left[(2k+1)\varrho_{m_k\theta}-\frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k}\right],\\
\Psi_\varphi&=2K\sum_0^\infty\theta_z\left[k\varrho_{m_k\theta}-\frac{1}{2m_k r}(\varepsilon_{m_k})'-\frac{k+1}{m_k^2 r}(\varrho_{m_k\theta})'\right],
\end{aligned}\right\}\quad (132)$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_\varphi=\Psi_z&=K\sum_0^\infty-\frac{dW_z^k}{dz}\frac{1}{n_k}(\varrho_{n_k w})',\\
\Psi_r=R_\varphi&=K\sum_0^\infty\frac{W_z^k}{rn_k}\left[2(\varrho_{n_k w})'+rn_k^2\varrho_{n_k w}\right],\\
R_z=Z_r&=K\sum_0^\infty-\frac{1}{m_k}\frac{d\theta_z^k}{dz_k}(\varepsilon_{m_k})'.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (133)$$

§ 18.

Переходимъ къ опредѣленію произвольныхъ постоянныхъ. Пусть R_1 и R_2 радіусы внутренней и внѣшней поверхностей. По условіямъ задачи

$$R_r = 0\,, \qquad Z_r = 0\,, \qquad \Psi_r = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (134)$$

при $r = R_1$ и R_2. Первыя два изъ этихъ равенствъ даютъ

$$\left[\frac{m_k}{2}\,\varepsilon_{m_k} + \frac{k+1}{m_k^2}\,\frac{1}{r}\,(\varrho_{m_k0})'\right]_{r=R_1} = 0\,,$$

$$\left[\frac{m_k}{2}\,\varepsilon_{m_k} + \frac{k+1}{m_k^2}\,\frac{1}{r}\,(\varrho_{m_k0})'\right]_{r=R_2} = 0\,,$$

$$\left[\varepsilon'_{m_k}\right]_{r=R_1} = 0\,, \quad \left[\varepsilon'_{m_k}\right]_{r=R_2} = 0\,.$$

Положивъ

$$A^k_{0r} = \frac{m_k K^k}{k+1}\,, \quad B^k_{0r} = \frac{m_k L^k}{k+1}\,,$$

$$2A^k_{ur} - \frac{2(k+1)}{m_k}\,A^k_{0r} = 2M^k\,,$$

$$2B^k_{ur} - \frac{2(k+1)}{m_k}\,B^k_{0r} = 2N^k\,,$$

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{m_k} = M^k J_0 + N^k Y_0 + \frac{2k+1}{2(k+1)}\,m_k(K^k J_1 + L^k Y_1)r = \varepsilon_k\,,$$

$$\frac{k+1}{m_k}\,(\varrho_{m_k0})' = \varrho'_k = K^k (J_0)' + L^k (Y_0)'\,,$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} &[m_k^2 r\varepsilon_k + \varrho'_k]_{r=R_1} = 0\,, \quad [m_k^2 r\varepsilon_k + \varrho'_k]_{r=R_2} = 0\,, \\ &\qquad [\varepsilon'_k]_{r=R_1} = 0\,, \quad [\varepsilon'_k]_{r=R_2} = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (135)$$

или

$$\left.\begin{aligned} M^k(m_k^2 r J_0)_{R_1} + N^k(m_k^2 r Y_0)_{R_1} + K^k(\psi_{k1})_{R_1} + L^k(\psi_{k2})_{R_1} = 0\,, \\ M^k(m_k^2 r J_0)_{R_2} + N^k(m_k^2 r Y_0)_{R_2} + K^k(\psi_{k1})_{R_2} + L^k(\psi_{k2})_{R_2} = 0\,, \\ M^k(J'_0)_{R_1} + N^k(Y'_0)_{R_1} + K^k(\varphi_{k1})_{R_1} + L^k(\varphi_{k2})_{R_1} = 0\,, \\ M^k(J'_0)_{R_2} + N^k(Y'_0)_{R_2} + K^k(\varphi_{k1})_{R_2} + L^k(\varphi_{k2})_{R_2} = 0\,, \end{aligned}\right\} \; . \quad (136)$$

гдѣ

$$\psi_{k1} = J_0' + m_k^3 \frac{2k+1}{2(k+1)} r^2 J_1, \quad \psi_{k2} = Y_0' + m_k^3 \frac{2k+1}{2(k+1)} r^2 Y_1,$$

$$\varphi_{k1} = \frac{2k+1}{2(k+1)} m_k J_1 r, \quad \varphi_{k2} = \frac{2k+1}{2(k+1)} m_k Y_1 r.$$

Такъ какъ M^k, N^k, K^k и L^k не всѣ нули, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m_k^2 r J_0)_{R_1}, & (m_k^2 r Y_0)_{R_1}, & (\psi_{k1})_{R_1}, & (\psi_{k2})_{R_1}, \\ (m_k^2 r J_0)_{R_2}, & (m_k^2 r Y_0)_{R_2}, & (\psi_{k1})_{R_2}, & (\psi_{k2})_{R_2}, \\ (J_0')_{R_1}, & (Y_0')_{R_1}, & (\varphi_{k1})_{R_1}, & (\varphi_{k2})_{R_1}, \\ (J_0')_{R_2}, & (Y_0')_{R_2}, & (\varphi_{k1})_{R_2}, & (\varphi_{k2})_{R_2}, \end{vmatrix} = 0 \;.\;. \;(137)$$

Это трансцендентное уравненіе, опредѣляющее m_k; оно имѣетъ безчисленное множество положительныхъ вещественныхъ корней.

Предполагая m_k извѣстнымъ, найдемъ по уравненіямъ (136) и отношенія $\frac{M^k}{L^k}$, $\frac{N^k}{L^k}$, $\frac{K^k}{L^k}$. Постоянная L^k останется неопредѣленной.

Послѣднее изъ уравненій (134) даетъ

$$[2(\varrho_{n_k w})' + r n_k^2 \varrho_{n_k w}]_{r=R_1} = 0, \quad [2(\varrho_{n_k w})' + r n_k^2 \varrho_{n_k w}]_{r=R_2} = 0,$$

или

$$A_{wr}^k U_1 + B_{wr}^k V_1 = 0, \quad A_{wr}^k U_2 + B_{wr}^k V_2 = 0\ ^{1)}, \;.\;.\;.\; (138)$$

гдѣ

$$U = 2\frac{dJ_0(\xi)}{d\xi} + \xi J_0, \quad V = 2\frac{dY_0(\xi)}{d\xi} + \xi Y_0,$$

$$\xi = n_k r.$$

Постоянная n_k будетъ корнемъ уравненія

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} U_1, & V_1 \\ U_2, & V_2 \end{vmatrix} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (139)$$

Одно изъ уравненій (138) опредѣлитъ отношеніе $\frac{A_{wr}^k}{B_{wr}^k}$, а постоянная B_{wr}^k останется неопредѣленной.

---

[1]) U и V со значками 1 и 2 суть значенія этихъ функцій при $r = R_1$ и $r = R_2$.

*

§ 19.

Уравненіе (139), какъ и (137), имѣетъ безчисленное множество положительныхъ вещественныхъ корней.

Всѣ корни уравненій

$$J_0 = 0\,, \quad \frac{dJ_0}{d\xi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (140)$$

вещественны, положительны и раздѣляютъ другъ друга.

При значеніяхъ ξ, равныхъ корнямъ одного изъ этихъ уравненій, получимъ одинъ изъ слѣдующихъ двухъ рядовъ значеній U

$$\left.\begin{array}{r} (\xi J_0)_k\,, \\ 2\left(\dfrac{dJ_0}{d\xi}\right)_k\,, \end{array}\right| (k = 1\,,\,2\,,\,3\ldots\infty)\,,$$

гдѣ $(\xi J_0)_k$ и $2\left(\dfrac{dJ_0}{d\xi}\right)_k$ представляютъ значенія заключенныхъ въ скобкахъ функцій при разсматриваемыхъ значеніяхъ ξ.

Слѣдовательно, корни уравненія

$$U = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (141)$$

вещественны, положительны и раздѣляютъ корни каждаго изъ уравненій (140).

Уравненія

$$U_1 = 0\,, \qquad U_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (141_1)$$

даютъ два ряда положительныхъ, пропорціональныхъ между собою, значеній n_k, обращающихъ въ нуль функціи U_1 и U_2.

По предыдущему (см. § 7)

$$\frac{dJ_0}{d\xi}Y_0 - \frac{dY_0}{d\xi}J_0 = -\frac{1}{\xi}\,.$$

При ξ равномъ одному изъ корней уравненія (131) имѣемъ

$$\left(\xi Y_0 + 2\frac{dY_0}{d\xi}\right) = (V) = \left(\frac{2}{\xi J_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (142)$$

При n_k равномъ корню перваго изъ уравненій (141_1) знакъ $\varDelta_1$ одинаковъ со знакомъ произведенія $(J_0)_{R_1} U_2$, при n_k равномъ корню второго изъ этихъ уравненій знакъ $\varDelta_1$ одинаковъ со знакомъ произведенія $[J_0]_{R_2} U_1$.

Въ ряду значеній n_k, обращающихъ въ нуль U_1 и U_2, найдется безчисленное множество такихъ смежныхъ значеній этой перемѣнной, что, если для одного изъ нихъ $(J_0)_{R_1}$ и U_2 имѣютъ одинаковые знаки, то для другаго $(J_0)_{R_2}$ и U_1 имѣютъ знаки противоположные, или наоборотъ.

Иначе говоря, существуетъ безчисленное множество такихъ вещественныхъ положительныхъ значенiй n_k, что знаки Δ_1 для какихъ либо двухъ смежныхъ изъ этихъ значенiй n_k противоположны. Слѣдовательно, уравненiе (139) имѣетъ безчисленное множество положительныхъ вещественныхъ корней. Что и требовалось доказать. Тоже самое можно сказать и объ уравненiи (137).

§ 20.

Назовемъ черезъ $2l$ высоту цилиндра. Допустимъ, что за плоскость xy принята плоскость его средняго сѣченiя. Проекцiи на координатныя оси напряженiй, дѣйствующихъ на основанiя цилиндра, будутъ

$$(R_z)_{z=l},\ (R_z)_{z=-l},\ (Z_z)_{z=l},\ (Z_z)_{z=-l},\ (\Psi_z)_{z=l},\ (\Psi_z)_{z=-l}.$$

Обозначимъ черезъ f_1, f_2; φ_1, φ_2; ψ_1, ψ_2 шесть заданныхъ функцiй r, черезъ A^k, B^k произведенiя $A^k_{0z}L^k$, $B^k_{0z}L^k$ и положимъ

$$[R_z]_{z=l} = -2f_1,\ [R_z]_{z=-l} = -2f_2,$$

$$\left[\int_0^z \frac{\partial Z_z}{\partial r}\,dz\right]_{z=l} = \varphi_1,\quad \left[\int_0^z \frac{\partial Z_z}{\partial r}\,dz\right]_{z=-l} = \varphi_2,$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&K\sum_0^\infty\left[A^k e^{m_k l} - B^k e^{-m_k l}\right]\varepsilon'_k = f_1,\\
&K\sum_0^\infty\left[A^k e^{-m_k l} - B^k e^{m_k l}\right]\varepsilon'_k = f_2,\\
&2K\sum_0^\infty\left[A^k e^{m_k l} - B^k e^{-m_k l}\right]\left[\frac{2k+1}{k+1}\varrho'_k - \varepsilon'_k\right] = \varphi_1,\\
&2K\sum_0^\infty\left[A^k e^{-m_k l} - B^k e^{m_k l}\right]\left[\frac{2k+1}{k+1}\varrho'_k - \varepsilon'_k\right] = \varphi_2,
\end{aligned}\right\}\quad \ldots (143)$$

гдѣ ϱ_k и ε_k зависятъ отъ извѣстныхъ отношенiй $\dfrac{M^k}{L^k}$, $\dfrac{N^k}{L^k}$, $\dfrac{K^k}{L^k}$ и постоянной m_k. Эти равенства приводятся къ виду

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_0^\infty\left[A^k e^{m_k l} - B^k e^{-m_k l}\right]\varepsilon'_k = F_1,\\
&\sum_0^\infty\left[A^k e^{-m_k l} - B^k e^{m_k l}\right]\varepsilon'_k = F_2,\\
&\sum_0^\infty\left[A^k e^{m_k l} - B^k e^{-m_k l}\right]\varrho'_k = \Phi_1,\\
&\sum_0^\infty\left[A^k e^{-m_k l} - B^k e^{m_k l}\right]\varrho'_k = \Phi_2,
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (144)$$

гдѣ

$$F_1=\frac{f_1}{K}\,,\ F_2=\frac{f_2}{K}\,,\ \Phi_1=\varphi_1+2f_1\,,\ \ \Phi_2=\varphi_2+2f_2\,,$$

и послужатъ для опредѣленія постоянныхъ A^k и B^k.

Положимъ далѣе

$$[\Psi_z]_{z=l}=\psi_1 K\,,\ [\Psi_z]_{z=-l}=-\psi_2 K.$$

Обозначивъ черезъ C^k и D^k произведенія $A^k_{wz}\,B^k_{wr}$, $B^k_{wz}\,B^k_{wr}$, получимъ равенства

$$\left.\begin{aligned}&\sum_0^\infty\Big[C^k e^{n_k l}-D^k e^{-n_k l}\Big](\varrho_{n_k w})'=\psi_1\,,\\&\sum_0^\infty\Big[C^k e^{-n_k l}-D^k e^{n_k l}\Big](\varrho_{n_k w})'=\psi_2\,,\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (145)$$

которыми воспользуемся для опредѣленія постоянныхъ C^k и D^k.

§ 21.

Покажемъ, что при данныхъ условіяхъ задачи

$$\int_{R_1}^{R_2} r\Big(\varrho_k'\varepsilon_i'+\varrho_i'\varepsilon_k'\Big)\,dr=0\,,\quad \int_{R_1}^{R_2} r(\varrho_{n_k w})'(\varrho_{n_i w})'\,dr=0\,.\ ^{1)}.\ \ .\ (146)$$

Легко убѣдиться, что

$$\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_i\varrho_k'\,dr=\varepsilon_i r\varrho_k'\Big|_{R_1}^{R_2}-\int_{R_1}^{R_2}\varepsilon_i(r\varrho_k')'\,dr=\varepsilon_i r\varrho_k'\Big|_{R_1}^{R_2}+m_k^2\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_i\varrho_k\,dr\,,$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_k\varrho_i'\,dr=\varepsilon_k r\varrho_i'\Big|_{R_1}^{R_2}-\int_{R_1}^{R_2}\varepsilon_k(r\varrho_i')'\,dr=\varepsilon_k r\varrho_i'\Big|_{R_1}^{R_2}+m_i^2\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_k\varrho_i\,dr\,,$$

откуда

$$m_i^2\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_i'\varrho_k'-m_k^2\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_k'\varrho_i'\,dr=m_i^2 m_k^2\int_{R_1}^{R_2} r(\varepsilon_i\varrho_k-\varepsilon_k\varrho_i)\,dr\,.\ ^{2)}\ \ .\ (147)$$

Точно также

$$\left.\begin{aligned}&\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_k'\varepsilon_i'\,dr=\varepsilon_i' r\varrho_k\Big|_{R_1}^{R_2}-\int_{R_1}^{R_2}\varrho_k(r\varepsilon_i')'\,dr=m_i^2\int_{R_1}^{R_2}\varepsilon_i\varrho_k r\,dr-\frac{2k+1}{k+1}m_i^2\int_{R_1}^{R_2}\varrho_k\varrho_i r\,dr,\\&\int_{R_1}^{R_2} r\varrho_i'\varepsilon_k'\,dr=\varepsilon_k' r\varrho_i\Big|_{R_1}^{R_2}-\int_{R_1}^{R_2}\varrho_i(r\varepsilon_k')'\,dr=m_k^2\int_{R_1}^{R_2}\varepsilon_k\varrho_i r\,dr-\frac{2k+1}{k+1}m_k^2\int_{R_1}^{R_2}\varrho_k\varrho_i r\,dr,\end{aligned}\right\}(148)$$

---

[1]) См. о томъ же Schiff, „Sur l'equilibre d'un cylindre élastique". Journal de Liouville. T. IX, 1883.

[2]) Выраженіе

$$r(\varepsilon_i\varrho_k' m_i^2-\varepsilon_k\varrho_i' m_k^2)=0$$

въ силу первыхъ двухъ изъ равенствъ (135).

такъ какъ

$$(r\varepsilon_i')' = -m_i^2 \varepsilon_i r + \frac{2k+1}{k+1} m_i^2 \varrho_i r \text{ (для всякаго } i).$$

Изъ равенствъ (148) получаемъ

$$m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r\varrho_k' \varepsilon_i' dr - m_i^2 \int_{R_1}^{R_2} r\varrho_i' \varepsilon_k' dr = m_i^2 m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r(\varepsilon_i \varrho_k - \varepsilon_k \varrho_i) dr. \quad . (149)$$

Вычитая это равенство изъ (147), находимъ

$$(m_i^2 - m_k^2) \int_{R_1}^{R_2} r(\varrho_k' \varepsilon_i' - \varrho_i' \varepsilon_k') dr = 0.$$

Такимъ образомъ, при всякомъ i не равномъ k

$$\int_{R_1}^{R_2} r(\varrho_k' \varepsilon_i' + \varrho_i' \varepsilon_k') dr = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (150)$$

Для $i = k$ этого заключенія сдѣлать нельзя.

Обозначивъ $\varrho_{n_k w}$ и $\varrho_{n_i w}$ соотвѣтственно черезъ ξ_k и ξ_i, находимъ

$$\int_{R_1}^{R_2} r\xi_k' \xi_i' dr = r\xi_k' \xi_i \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} (r\xi_k')' \xi_i dr = r\xi_k' \xi_i \Big|_{R_1}^{R_2} + m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r\xi_k \xi_i dr.$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r\xi_k' \xi_i' dr = r\xi_i' \xi_k \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} (r\xi_i')' \xi_k dr = r\xi_i' \xi_k \Big|_{R_1}^{R_2} + m_i^2 \int_{R_1}^{R_2} r\xi_k \xi_i dr.$$

Отсюда

$$(m_i^2 - m_k^2) \int_{R_1}^{R_2} r\xi_k' \xi_i' dr = \Big[r(\xi_k' \xi_i m_i^2 - \xi_i' \xi_k m_k^2) \Big]_{R_1}^{R_2} = 0.$$

Итакъ, при всякомъ i не равномъ k

$$\int_{R_1}^{R_2} r(\varrho_{n_k w})' (\varrho_{n_i w})' dr = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (151)$$

Что и требовалось доказать.

§ 22.

Положимъ

$$\gamma_i = 2 \int_{R_1}^{R_2} r\varrho_i' \varepsilon_i' dr, \quad \delta_i = \int_{R_1}^{R_2} r[(\varrho_{n_i w})']^2 dr.$$

Изъ равенствъ (144), при помощи (150), получаемъ

$$A^i e^{m_i l} - B^i e^{-m_i l} = \frac{\lambda_i}{\gamma_i}, \quad A^i e^{-m_i l} - B^i e^{m_i l} = \frac{\mu_i}{\gamma_i},$$

гдѣ

$$\lambda_i = \int_{R_1}^{R_2} r[F_1 \varrho_i' + \Phi_1 \varepsilon_i'] \, dr, \quad \mu_i = \int_{R_1}^{R_2} r[F_2 \varrho_i' + \Phi_2 \varepsilon_i'] \, dr.$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{array}{c} A^i = \dfrac{\lambda_i e^{m_i l} - \mu_i e^{-m_i l}}{\gamma_i \Delta_i}, \quad B^i = \dfrac{\lambda_i e^{-m_i l} - \mu_i e^{m_i l}}{\gamma_i \Delta_i}, \\ \Delta_i = e^{2m_i l} - e^{-2m_i l}. \\ {\scriptstyle (i = 1, 2, \ldots \infty)} \end{array}\right\} \ldots (152)$$

Постоянныя A^i и B^i опредѣлены.

Подобнымъ же образомъ найдемъ [рав. (145) и (151)], что

$$C^i e^{n_i l} - D^i e^{-n_i l} = \frac{\lambda_i'}{\delta_i}, \quad C^i e^{-n_i l} - D^i e^{n_i l} = \frac{\mu_i'}{\delta_i},$$

и

$$C^i = \frac{\lambda_i' e^{n_i l} - \mu_i' e^{-n_i l}}{\delta_i \Delta_i'}, \quad D^i = \frac{\lambda_i' e^{-n_i l} - \mu_i' e^{n_i l}}{\delta_i \Delta_i'}, \ldots . (153)$$

гдѣ

$$\lambda_i' = \int_{R_1}^{R_2} r\psi_1(\varrho_{n_i w})' dr, \quad \mu_i' = \int_{R_1}^{R_2} r\psi_2(\varrho_{n_i w})' dr,$$

$$\Delta_i' = e^{2n_i l} - e^{-2n_i l}.$$

Формулы (131), (132), (136), (138), (152) и (153) и рѣшаютъ разсматриваемый вопросъ. Не трудно убѣдиться, что ряды, опредѣляющіе u, v, w и θ, сходящіеся для $z = l$ и $z = -l$, будутъ сходиться и для всѣхъ значеній z, численное значеніе которыхъ заключается между 0 и l.

VII. О равновѣсіи упругихъ тѣлъ вращенія, ограниченныхъ сферами и коническими поверхностями.

§ 23.

Разсмотримъ теперь сферическую систему координатъ. Положеніе точки въ пространствѣ опредѣлится: радіусомъ векторомъ r, угломъ φ, составляемымъ этимъ радіусомъ съ плоскостью xy и угломъ ψ, отсчитываемымъ отъ неподвижной плоскости, проходящей черезъ ось z,—плоскости zx. Направленія радіуса r и перпендикуляровъ къ этому радіусу и къ меридіанальной плоскости (отсчитываемыхъ въ сторону возрастающихъ r, φ и ψ) примемъ за координатныя оси.

Въ такомъ случаѣ

$$x = rcc', \quad y = rcs', \quad z = rs$$

и

$$h_1 = 1\,, \quad h_2 = \frac{1}{r}\,, \quad h_3 = \frac{1}{rc}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$c = \cos\varphi\,, \quad s = \sin\varphi\,, \quad c' = \cos\psi\,, \quad s' = \sin\psi\,.$$

При помощи сферическихъ координатъ можно рѣшить различныя задачи о равновѣсіи упругихъ тѣлъ, ограниченныхъ сферами и коническими поверхностями. Къ числу такихъ принадлежитъ сферическая оболочка. Вопросъ о равновѣсіи этого тѣла рѣшенъ Lamé въ общемъ видѣ [1]) (независимо отъ какихъ бы то ни было гипотезъ) и не можетъ представить интереса для нашихъ изслѣдованій [2]). Я разсмотрю тѣла, ограниченныя двумя концентрическими сферами данныхъ радіусовъ и двумя конусами широтъ данныхъ угловъ раствoренія. Если конусы, ограничивающіе тѣло, лежатъ по одну сторону плоскости xy, то получится особаго рода полый конусъ, усѣченный двумя концентрическими сферами, который условимся называть полымъ сферически-усѣченнымъ конусомъ; если одинъ изъ конусовъ находится по одну сторону упомянутой плоскости другой по другую, получится тѣло, которое будемъ называть поясомъ сферической оболочки. Мы разберемъ подобно тому, какъ въ вопросѣ о равновѣсіи кругового цилиндра, два случая: 1) когда задаются силы, дѣйствующія на сферическія поверхности тѣла, и 2) когда задаются силы, приложенныя къ коническимъ поверхностямъ тѣла. Начнемъ съ послѣдняго.

Примѣняя общія формулы § 5 къ данной системѣ координатъ, получаемъ уравненія равновѣсія

$$\left.\begin{aligned} 2(k+1)cr^2\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi} &= 0\,, \\ 2(k+1)c\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Gamma}{\partial r} &= 0\,, \\ \frac{\partial A}{\partial\varphi} - \frac{\partial B}{\partial r} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (155)$$

гдѣ

[1]) См. Lamé, „Leçons sur les coordonnées curvilignes“. Paris, 1859.

[2]) Спустя почти десять лѣтъ W. Thomson далъ новое рѣшеніе той же задачи въ phylosophical Transactions. of the R. S. of Edinb.

$$\left.\begin{aligned}A=-\frac{1}{r^2c}\frac{\partial(rcW)}{\partial\varphi},\quad B=\frac{\partial(rW)}{\partial r},\\ \Gamma=c\left[\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rV)}{\partial r}\right],\\ \theta=\frac{1}{r^2c}\left[\frac{\partial(r^2cU)}{\partial r}+\frac{\partial(rcV)}{\partial\varphi}\right],\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(156)$$

а проекціи напряженій на координатныя оси выразятся слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}R_r=2K\left[k\theta+\frac{\partial U}{\partial r}\right],\\ \Phi_\varphi=2K\left[k\theta+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right],\\ \Psi_\psi=2K\left[k\theta+\frac{U}{r}-\frac{s}{c}\frac{V}{r}\right],\\ \Phi_\psi=\Psi_\varphi=K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}+\frac{s}{c}\frac{W}{r}\right],\\ \Psi_r=R_\psi=K\left[\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r}\right],\\ R_\varphi=\Phi_r=K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(157)$$

Функція θ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial\left(r\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial\left(c\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi}=0.\quad\ldots\ldots(158)$$

§ 24.

Пусть

$$\theta=\sum_0^\infty\theta^k,\quad \theta^k=\theta_r^k\theta^k,$$

гдѣ θ_r^k и θ_φ^k соотвѣтственно суть функціи r и φ. Предыдущее уравненіе принимаетъ слѣдующій видъ

$$\frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta_r^k}{dr}\right)}{dr}\theta_\varphi^k+\frac{1}{c}\frac{d\left(c\dfrac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}\right)}{d\varphi}\theta_r^k=0,$$

откуда получаемъ такія уравненія для опредѣленія θ_r^k и θ_φ^k

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\left(r^2\frac{d\theta_r}{dr}\right)}{dr}-m_k^2\theta_r=0\ ^{1)},\\ \frac{d\left(c\frac{d\theta_\varphi}{d\varphi}\right)}{d\varphi}+m_k^2c\theta_\varphi=0,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(159)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\left(r^2\frac{d\theta_r}{dr}\right)}{dr}+m_k^2\theta_r=0,\\ \frac{d\left(c\frac{d\theta_\varphi}{d\varphi}\right)}{d\varphi}-m_k^2c\theta_\varphi=0.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(160)$$

Остановимся на послѣднихъ.

Положивъ $r=e^t$, получимъ

$$\frac{d^2\theta_t}{dt^2}+\frac{d\theta_t}{dt}+m_k^2\theta_t=0\ldots\ldots\ldots\ldots(161)$$

Корни характеристическаго уравненія

$$s^2+s+m_k^2=0$$

суть

$$h_k=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-m_k^2},\quad g_k=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-m_k^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\theta_t^k=A_{t\theta}^k e^{h_kt}+B_{t\theta}^k e^{g_kt},\ \ldots\ldots\ldots\ldots(162)$$

гдѣ $A_{t\theta}$, $B_{t\theta}$ произвольныя постоянныя.

Полагая $x=\sin\varphi$, приводимъ второе изъ уравненій (160) къ виду

$$(1-x^2)\frac{d^2\theta_x}{dx^2}-2x\frac{d\theta_x}{dx}-m_k^2\theta_x=0.\ \ldots\ldots\ (163)$$

Это уравненіе аналогично Лежандрову.

Пусть

$$\theta_x=a_0x^\alpha+a_2x^{\alpha+2}+a_4x^{\alpha+4}\ldots a_{2\mu}x^{\alpha+2\mu}.$$

---

[1]) Для простоты опускаемъ значекъ k.

Коэффиціенты $a_{2\mu}$ опредѣлятся формулой

$$a_{2\mu+2} = a_{2\mu} \frac{(\alpha+2\mu)(\alpha+2\mu+1)+m_k^2}{(\alpha+2\mu+1)(\alpha+2\mu+2)},$$

гдѣ α одинъ изъ корней характеристическаго уравненія

$$\alpha(\alpha-1)=0.$$

При $\alpha=0$

$$a_{2\mu+2} = a_{2\mu} \frac{2\mu(2\mu+1)+m_k^2}{(2\mu+2)(2\mu+1)},$$

такъ что

$$a_{2\mu+2} = \frac{m_k^2[2.3+m_k^2][4.5+m_k^2]\ldots[2\mu(2\mu+1)+m_k^2]}{1.2\ldots(2\mu+1)(2\mu+2)}.$$

При $\alpha=1$

$$a_{2\mu+2} = a_{2\mu} \frac{(2\mu+1)(2\mu+2)+m_k^2}{(2\mu+2)(2\mu+3)}$$

или

$$a_{2\mu+2} = \frac{[1.2+m_k^2][3.4+m_k^2]\ldots[(2\mu+1)(2\mu+2)+m_k^2]}{1.2.3\ldots(2\mu+2)(2\mu+3)}\ ^{1)}.$$

Обозначивъ частныя рѣшенія уравненія (163) соотвѣтственно черезъ S_k и T_k, имѣемъ

$$S_k = 1+\frac{m_k^2}{2!}x^2+\frac{m_k^2(2.3+m_k^2)}{4!}x^4+\ldots,$$

$$T_k = x\left(1+\frac{1.2+m_k^2}{3!}x^2+\frac{(1.2+m_k^2)(3.4+m_k^2)}{5!}x^4+\ldots\right.$$

Такъ какъ въ обоихъ случаяхъ $\lim \left.\frac{a_{2\mu+2}}{a_{2\mu}}\right|_{\mu=\infty}=1$, а отношеніе послѣдующаго члена къ предыдущему равно $\frac{a_{2\mu+2}}{a_{2\mu}}x^2$, то оба ряда сходятся для всѣхъ значеній x, заключенныхъ между -1 и $+1$, что и имѣетъ мѣсто въ разсматриваемомъ случаѣ.

Такимъ образомъ,

$$\theta_x^k = A_{x\theta}^k S_k + B_{x\theta}^k T_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (164)$$

и

$$\theta = \sum_0^\infty [A_{t\theta}^k e^{h_k t} + B_{t\theta}^k e^{g_k t}][A_{x\theta}^k S_k + B_{x\theta}^k T_k]. \quad \ldots (165)$$

$A_{x\theta}^k$ и $B_{x\theta}^k$ произвольныя постоянныя.

---

[1]) Полагаемъ $a_0 = 1$.

§ 25.

Первыя два изъ уравненій (155) даютъ

$$\Gamma = -\sum_0^\infty \frac{2(k+1)}{m_k^2} r^2 \frac{d\theta_r^k}{dr} c \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}.$$

Функціи U и V удовлетворяютъ, слѣдовательно, уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^\infty \theta_r^k \theta_\varphi^k &= \frac{1}{r^2 c}\left[\frac{\partial(Ur^2c)}{\partial r} + \frac{\partial(Vrc)}{\partial\varphi}\right], \\ \frac{2(k+1)}{m_k^2} r^2 \frac{d\theta_r^k}{dr} c \frac{\partial\theta_\varphi^k}{d\varphi} &= c\left[\frac{\partial(rV)}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial\varphi}\right]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (166)$$

Положимъ

$$U = \sum_0^\infty U^k, \quad V = \sum_0^\infty V^k,$$

$$U^k = U_r^k U_\varphi^k, \quad V^k = V_r^k V_\varphi^k,$$

гдѣ U и V со значками r и φ обозначаютъ функціи отъ одной изъ перемѣнныхъ, соотвѣтствующей значку. Исключая изъ уравненій (166) путемъ дифференцированія послѣдовательно V и U, получаемъ

$$\sum_0^\infty \left[\frac{d(r^2\theta_r^k)}{dr} - 2(k+1)r^2\frac{d\theta_r^k}{dr}\right] c\theta_\varphi^k = \frac{\partial^2(Ur^2c)}{\partial r^2} + \frac{\partial\left(c\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi},$$

$$\sum_0^\infty \left[r^2\theta_r^k + \frac{2(k+1)}{m_k^2}\frac{d\left(r^4\dfrac{d\theta_r^k}{dr}\right)}{dr}\right]\frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi} = \frac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial(V_r)}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(Vrc)}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi},$$

откуда

$$\psi_1^k c\theta_\varphi^k = \frac{d^2(U_r^k r^2)}{dr^2} cU_\varphi^k + U_r^k \frac{d\left(c\dfrac{dU_\varphi^k}{d\varphi}\right)}{d\varphi},$$

$$\psi_2^k \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi} = \frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d(V_r^k r)}{dr}\right] V_\varphi^k + rV_r^k \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{c}\frac{d(V_\varphi^k c)}{d\varphi}\right].$$

$(k = 0, 1, 2 \ldots \infty).$

Пусть

$$U_\varphi^k = \theta_\varphi^k, \quad V_\varphi^k = \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}.$$

На основаніи второго изъ уравненій (160) получимъ

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{d^2(U_r^k r^2)}{dr^2} + m_k^2 U_r^k, \\ \psi_2 &= \frac{d\left(r^2 \dfrac{dV_{r_1}^k}{dr}\right)}{dr} + m_k^2 V_{r_1}^k, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (167)$$

гдѣ $V_{r_1} = rV_r$. Вводя перемѣнную t, находимъ

$$\left.\begin{aligned} (\psi_1)_t &= \frac{d^2 U_t^k}{dt^2} + 3\frac{dU_t^k}{dt} + n_k^2 U_t^k, \\ (\psi_2)_t &= \frac{d^2 V_{t_1}^k}{dt^2} + \frac{\partial V_{t_1}^k}{dt} + m_k^2 V_{t_1}^k,) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (167_1)$$

гдѣ

$$n_k^2 = m_k^2 + 2$$

$$(\psi_1)_t = e^t \left[2\theta_t^k - (2k+1)\frac{d\theta_t}{dt} \right],$$

$$(\psi_2)_t = e^{2t} \left[\frac{4(k+1)}{m_k^2}\frac{d\theta_t^k}{dt} - (2k+1)\theta_t^k \right],$$

или

$$(\psi_1)_t = A^k e^{\alpha_k t} + B^k e^{\beta_k t},$$

$$(\psi_2)_t = C^k e^{(\alpha_k+1)t} + D^k e^{(\beta_k+1)t},$$

гдѣ

$$A^k = A_{t0}^k[2 - (2k+1)h_k], \qquad B^k = B_{t0}^k[2 - (2k+1)g_k],$$

$$C^k = A_{t0}^k \left[\frac{4(k+1)}{m_k^2} h_k - (2k+1) \right],$$

$$D^k = B_{t0}^k \left[\frac{4(k+1)}{m_k^2} g_k - (2k+1) \right],$$

$$\alpha_k = h_k + 1, \quad \beta_k = g_k + 1.$$

Уравненія (167_1) примутъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 U_t^k}{dt^2} + 3\frac{dU_t^k}{dt} + n_k^2 U_t^k &= A^k e^{\alpha_k t} + B^k e^{\beta_k t}, \\ \frac{d^2 V_{t_1}^k}{dt^2} + \frac{dV_{t_1}^k}{dt} + m_k^2 V_{t_1}^k &= C^k e^{(\alpha_k+1)t} + D^k e^{(\beta_k+1)t}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (167_2)$$

---

[1]) Обозначенія ψ_j^k, ψ_j, $(j = 1, 2)$ понятны безъ объясненій.

Положимъ

$$U_t^k = L^k e^{\lambda_k t} + M^k e^{\mu_k t}, \quad V_t^k = P^k e^{\sigma_k t} + Q^k e^{\tau_k t},$$

гдѣ L^k, M^k, P^k, Q^k, λ_k, μ_k, σ_k, τ_k постоянныя, которыя опредѣляются при помощи уравненій

$$L^k = \frac{A^k}{\lambda_k^2 + 3\lambda_k + n_k^2}, \quad M^k = \frac{B^k}{\mu_k^2 + 3\mu_k + n_k^2},$$

$$\lambda_k = \alpha_k, \quad \mu_k = \beta_k,$$

$$P^k = \frac{C^k}{\sigma_k^2 + \sigma_k + m_k^2}, \quad Q^k = \frac{D^k}{\tau_k^2 + \tau_k + m_k^2},$$

$$\sigma_k = \alpha_k + 1, \quad \tau_k = \beta_k + 1.$$

При этомъ

$$U_t^k = A_{tu}^k e^{\gamma_k t} + B_{tu}^k e^{\delta_k t} + L^k e^{\lambda_k t} + M^k e^{\mu_k t},$$

$$V_{t_1}^k = A_{tv}^k e^{h_k t} + B_{tv}^k e^{g_k t} + P^k e^{\sigma_k t} + Q^k e^{\tau_k t},$$

гдѣ γ_k и δ_k корни уравненія

$$s^2 + 3s + n_k^2 = 0,$$

такъ что

$$\gamma_k = \alpha_k - 2, \quad \delta_k = \beta_k - 2.$$

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} U_t^k &= A_{tu}^k e^{(\alpha_k - 2)t} + B_{tu}^k e^{(\beta_k - 2)t} + L^k e^{\alpha_k t} + M^k e^{\beta_k t}, \\ V_t^k &= A_{tv}^k e^{(\alpha_k - 2)t} + B_{tv}^k e^{(\beta_k - 2)t} + P^k e^{\alpha_k t} + Q^k e^{\beta_k t}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (168)$$

A_{tu}^k, B_{tu}^k, A_{tv}^k, B_{tv}^k постоянныя, изъ которыхъ двѣ произвольны.

§ 26.

Подставивъ полученныя выраженія θ_t^k, U_t^k и V_t^k въ равенство (87), найдемъ

$$\left.\begin{aligned} A_{t\theta}^k e^{h_k t} + B_{t\theta}^k e^{g_k t} &= [L^k(\alpha_k + 2) + m_k^2 P^k] e^{(\alpha_k - 1)t} + \\ &+ [M^k(\beta_k + 2) + m_k^2 Q^k] e^{(\beta_k - 1)t} + \\ + [A_{tv}^k \alpha_k + m_k^2 A_{tv}^k] e^{(\alpha_k - 3)t} &+ [B_{tu}^k \beta_k + m_k^2 B_{tv}^k] e^{(\beta_k - 3)t}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (169)$$

гдѣ

$$L^k(\alpha_k+2)+m_k^2P^k=A_{t\theta}^k\left\{\frac{[2-(2k+1)h_k](\alpha_k+2)}{\lambda_k^2+3\lambda_k+n_k^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_k^2\left[\frac{4(k+1)}{m_k^2}h_k-(2k+1)\right]}{\sigma_k^2+\sigma_k+m_k^2}\right\},$$

$$M^k(\beta_k+2)+m_k^2Q^k=B_{t\theta}^k\left\{\frac{[2-(2k+1)g_k](\beta_k+2)}{\mu_k^2+3\mu_k+n_k^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_k^2\left[\frac{4(k+1)}{m_k^2}g_k-(2k+1)\right]}{\tau_k^2+\tau_k+m_k^2}\right\}.$$

Такъ какъ

$$\lambda_k^2+3\lambda_k+n_k^2=\sigma_k^2+\sigma_k+m_k^2,$$

$$\mu_k^2+3\mu_k+n_k^2=\tau_k^2+\tau_k+m_k^2,$$

$$4h_k-2h_k(\alpha_k+2)-2m_k^2=-\alpha_k^2+\alpha_k-m_k^2=0,$$

$$4g_k-2g_k(\beta_k+2)-2m_k^2=-\beta_k^2+\beta_k-m_k^2=0,$$

$$2(\alpha_k+2)+4h_k-m_k^2-h_k(\alpha_k+2)=2(\beta_k+2)+$$

$$+4g_k-m_k^2-g_k(\beta_k+2)=\lambda_k^2+3\lambda_k+n_k^2,$$

то равенство (169) удовлетворится тождественно при

$$A_{tu}^k\alpha_k+m_k^2A_{tv}^k=0,\quad B_{tu}^k\beta_k+m_k^2B_{tv}^k=0.\quad\ldots\quad(170)$$

На основаніи всего сказаннаго заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned}U=\sum_0^\infty[A_{x\theta}^kS_k+B_{x\theta}^kT_k][L^ke^{\alpha_kt}+M^ke^{\beta_kt}-\\-\frac{m_k^2}{\alpha_k}A_{tv}^ke^{(\alpha_k-2)t}-\frac{m_k^2}{\beta_k}B_{tv}^ke^{(\beta_k-2)t}],\\V=\sum_0^\infty\sqrt{1-x^2}[A_{x\theta}^k\frac{dS_k}{dx}+B_{x\theta}^k\frac{dT_k}{dx}][P^ke^{\alpha_kt}+Q^ke^{\beta_kt}+\\+A_t^ke^{(\alpha_k-2)t}+B_{tv}^ke^{(\beta_k-2)t}].\end{aligned}\right\}.\quad(171)$$

§ 27.

Опредѣлимъ теперь функцію W, удовлетворяющую уравненію

$$r^2\frac{\partial^2(rW)}{\partial r^2}+\frac{\partial\left(\frac{1}{c}\frac{\partial(crW)}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (172)$$

Положивъ

$$rW=W_1 \quad \text{и} \quad W_1=\sum_0^\infty W_{1r}^k W_\varphi^k,$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} & r^2\frac{d^2(W_{1r}^k)}{dr^2}+l_k^2W_{1r}^k=0, \\ & \frac{d\left(\frac{1}{c}\frac{d(cW_\varphi^k)}{d\varphi}\right)}{d\varphi}-l_k^2W_\varphi^k=0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (173)$$

или

$$\left.\begin{aligned} & r^2\frac{d^2(W_{1r}^k)}{dr^2}-l_k^2W_{1r}^k=0, \\ & \frac{d\left(\frac{1}{c}\frac{d(cW_\varphi^k)}{d\varphi}\right)}{d\varphi}+l_k^2W_\varphi^k=0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (174)$$

Воспользуемся первыми изъ этихъ уравненій.

Вводя перемѣнную t, находимъ

$$\frac{d^2W_{t_1}^k}{dt^2}-\frac{dW_{t_1}^k}{dt}+l_k^2W_{t_1}^k=0,$$

откуда

$$W_{t_1}^k=A_{tw}^k e^{p'_k t}+B_{tw}^k e^{q'_k t},$$

гдѣ p_k' и q_k' корни уравненія

$$s^2-s+l_k^2=0,$$

а A_{tw}^k и B_{tw}^k произвольныя постоянныя.

Слѣдовательно,

$$W_t^k=A_{tw}^k e^{p_k t}+B_{tw}^k e^{q_k t},$$

гдѣ p_k и q_k корни уравненія

$$s^2+s+l_k^2=0.$$

Представимъ второе изъ уравненій (174) въ видѣ

$$\frac{d\left(\frac{1}{c}\frac{dW_{\varphi 1}}{d\varphi}\right)}{d\varphi} - l_k^2 W_{\varphi 1} = 0\,^{1)},$$

гдѣ

$$W_{\varphi 1} = c\,W_\varphi\,.$$

Преобразуя послѣднее введеніемъ перемѣнной $x = \sin\varphi$, получаемъ

$$(1-x^2)\frac{d^2 W_x}{dx^2} - l_k^2 W_x = 0\,,$$

откуда

$$(1-x^2)\frac{d^2 W'_x}{dx^2} - 2x\frac{dW'_x}{dx} - l_k^2 W'_x = 0\,.$$

Слѣдовательно,

$$W'_x = A_{xw} S_k + B_{xw} T_k\,,$$

гдѣ S_k и T_k функціи x, выражающіяся такими же рядами, какъ и въ § 24; только вмѣсто m_k^2 въ выраженія коэффиціентовъ входитъ постоянная l_k. Интегрируя это равенство, заключаемъ, что

$$W_x = \frac{A_{xw}}{l_k^2}(1-x^2)\frac{dS_k}{dx} + \frac{B_{xw}}{l_k^2}(1-x^2)\frac{dT_k}{dx}\,,$$

и, наконецъ,

$$W_x^k = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,W_x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{l_k^2}\left[A_{xw}^k\frac{dS_k}{dx} + B_{xw}^k\frac{dT_k}{dx}\right].$$

A_{xw}^k и B_{xw}^k произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ

$$W = \sum_0^\infty \frac{1}{l_k^2}\sqrt{1-x^2}\left[A_{xw}^k\frac{dS_k}{dx} + B_{xw}^k\frac{dT_k}{dx}\right]\left[A_{tw}^k e^{p_k t} + B_{tw}^k e^{q_k t}\right]. \quad (175)$$

§ 28.

Составивъ выраженія (157), получимъ

---

[1]) Опускаемъ пока значекъ k.

$$\left.\begin{aligned}
R_r &= 2K\sum_0^\infty \theta_\varphi^k [A_r^k e^{(\alpha_k-1)t} + B_r^k e^{(\beta_k-1)t} - \frac{m_k^2(\alpha_k-2)}{\alpha_k} A_{tv}^k e^{(\alpha_k-2)t} - \\
&\qquad - \frac{m_k^2(\beta_k-2)}{\beta_k} B_{tv}^k e^{(\beta_k-2)t}], \\
\Phi_\varphi &= 2K\sum_0^\infty \theta_\varphi^k [A_\varphi^k e^{(\alpha_k-1)t} + B_\varphi^k e^{(\beta_k-1)t} - \frac{m_k^2}{\alpha_k} A_{tv}^k e^{(\alpha_k-3)t} - \\
&\qquad - \frac{m_k^2}{\beta_k} B_{tv}^k e^{(\beta_k-3)t}] + \frac{d^2\theta_\varphi^k}{d\varphi^2}[P^k e^{(\alpha_k-1)t} + Q^k e^{(\beta_k-1)t} + \\
&\qquad + A_{tv}^k e^{(\alpha_k-3)t} + B_{tv}^k e^{(\beta_k-3)t}], \\
\Psi_\psi &= 2K\sum_0^\infty \theta_\varphi^k [A_\varphi^k e^{(\alpha_k-1)t} + B_\varphi^k e^{(\beta_k-1)t} - \frac{m_k^2}{\alpha_k} A_{tv}^k e^{(\alpha_k-3)t} - \\
&\qquad - \frac{m_k^2}{\beta_k} B_{tv}^k e^{(\beta_k-3)t}] - \frac{s}{c}\frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}[P^k e^{(\alpha_k-1)t} + Q^k e^{(\beta_k-1)t} + \\
&\qquad + A_{tv}^k e^{(\alpha_k-3)t} + B_{tv}^k e^{(\beta_k-3)t}], \\
\Phi_\psi &= \Psi_\varphi = K\sum_0^\infty \frac{d\left(\frac{1}{c}W_\varphi^k\right)}{d\varphi}[A_{tw}^k e^{(p_k-1)t} + B_{tw}^k e^{(q_k-1)t}], \\
\Psi_r &= R_\psi = K\sum_0^\infty \frac{dW_\varphi^k}{d\varphi}[A_{tw}^k(p_k-1)e^{(p_k-1)t} + B_{tw}^k(q_k-1)e^{(q_k-1)t}] \\
R_\varphi &= \Phi_r = K\sum_0^\infty \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}[C_r^k e^{(\alpha_k-1)t} + D_r^k e^{(\beta_k-1)t}] + \\
&\qquad + 2[A_{tv}^k(\alpha_k-2)e^{(\alpha_k-3)t} + B_{tv}^k(\beta_k-2)e^{(\beta_k-3)t}],
\end{aligned}\right\} \quad (176)$$

гдѣ θ_φ и W_φ линейныя однородныя функціи постоянныхъ $A_{x\theta}$, $B_{x\theta}$, и A_{xw}^k, B_{xw}^k, а

$$A_r^k = kA_{t\theta}^k + L^k\alpha_k, \qquad B_r^k = kB_{t\theta}^k + M_{\beta_k}^k,$$

$$A_\varphi^k = kA_{t\theta}^k + L^k, \qquad B_\varphi = kB_{t\theta}^k + M^k,$$

$$C_r^k = L^k + (\alpha_k - 1)P^k, \quad D_r^k = M^k + (\beta_k - 1)Q^k.$$

Вынося за скобки въ каждомъ членѣ выраженій (176), зависящемъ отъ θ_φ, постоянную $B_{t\theta}^k$, а въ членахъ выраженій (76), зависящихъ отъ W_φ, постоянную B_{xw}^k, будемъ разумѣть подъ $A_{x\theta}^k$ и A_{xw}^k отношенія прежнихъ постоянныхъ того же обозначенія къ $B_{x\theta}^k$ и B_{xw}^k, а подъ $A_{t\theta}^k$, $B_{t\theta}^k$, A_{tv}^k, B_{tv}^k, A_{tw}^k и B_{tw}^k произведенія прежнихъ на $B_{x\theta}^k$ и B_{xw}^k.

Въ восьми постоянныхъ $A^k_{x\theta}$, A^k_{xw}, $A^k_{t\theta} \dots A^k_{tw}$ выразятся всѣ искомыя величины. Нужно опредѣлить эти постоянныя по предѣльнымъ условiямъ задачи.

§ 29.

Пусть при измѣненiи r отъ r_0 до r_1 (радiусы концентрическихъ сферъ, ограничивающихъ данное тѣло) t измѣняется отъ t_0 до t_1.

Положимъ

$$\xi = 2\pi \frac{t_0 - t}{t_0 - t_1}.$$

ξ измѣняется отъ 0 до 2π. Пусть далѣе

$$m_k^2 = \frac{4\pi^2 k^2}{(t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{4},$$

гдѣ k цѣлое число ($k = 0, 1, 2, \dots \infty$).

Въ такомъ случаѣ

$$A^k_{t\theta} e^{h_k t} + B^k_{t\theta} e^{g_k t} = e^{-\frac{t_1 - t_0}{4\pi}\xi} [A^k_{t\theta} e^{h_k t_0} e^{ik\xi} + B^k_{t\theta} e^{g_k t_0} e^{-ik\xi}] =$$
$$= e^{\alpha\xi} [A^k \cos k\xi + B^k \sin k\xi],$$

гдѣ α нѣкоторая опредѣленная постоянная и

$$\theta = e^{\alpha\xi} \sum_0^\infty [A^k_{x\theta} S_k + T_k][A^k \cos k\xi + B^k \sin k\xi]. \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

Обозначимъ черезъ $f_1(\xi)e^{\alpha\xi}$ и $f_2(\xi)e^{\alpha\xi}$ двѣ заданныя функцiи ξ (или r) и допустимъ, что на коническихъ поверхностяхъ тѣла, т. е. для двухъ значенiй $\varphi = \varphi_0$ и φ_1

$$(\theta)_{x=x_0} = f_1(\xi)e^{\alpha\xi}, \qquad (\theta)_{x=x_1} = f_2(\xi)e^{\alpha\xi},$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\sum_0^\infty \{[H^k(S_k)_0 + A^k(T^k)_0] \cos k\xi + [G^k(S_k)_0 + B^k(T_k)_0] \sin k\xi\} = f_1(\xi), \\ &\sum_0^\infty \{[H^k(S_k)_1 + A^k(T_k)_1] \cos k\xi + [G^k(S_k)_1 + B^k(T_k)_1] \sin k\xi\} = f_2(\xi), \end{aligned}\right\} (178)$$

гдѣ

$$H^k = A^k_{x\theta} A^k, \quad G^k = A^k_{x\theta} B^k.$$

Изъ равенствъ (178) слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned}
H^k(S_k)_0+A^k(T_k)_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(\xi)\cos k\xi\,d\xi\,,\\
G^k(S_k)_0+B^k(T_k)_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi\,,\\
H^k(S_k)_1+A^k(T_k)_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_2(\xi)\cos k\xi\,d\xi\,,\\
G^k(S_k)_1+B^k(T_k)_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_2(\xi)\sin k\xi\,d\xi\,.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(178_1)$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}
H^k&=\frac{1}{\pi}\,\frac{(T_k)_1\int_0^{2\pi}f_1(\xi)\cos k\xi\,d\xi-(T_k)_0\int_0^{2\pi}f_2(\xi)\cos k\xi\,d\xi}{\varDelta}\,,\\
A^k&=\frac{1}{\pi}\,\frac{(S_k)_1\int_0^{2\pi}f_1(\xi)\cos k\xi\,d\xi-(S_k)_0\int_0^{2\pi}f_2(\xi)\cos k\xi\,d\xi}{\varDelta}\,,\\
G^k&=\frac{1}{\pi}\,\frac{(T_k)_1\int_0^{2\pi}f_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi-(T_k)_0\int_0^{2\pi}f_2(\xi)\sin k\xi\,d\xi}{\varDelta}\,,\\
B^k&=\frac{1}{\pi}\,\frac{(S_k)_1\int_0^{2\pi}f_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi-(S_k)_0\int_0^{2\pi}f_2(\xi)\sin k\xi\,d\xi}{\varDelta}\,,
\end{aligned}\right\}\,.\,(179)$$

гдѣ

$$\varDelta=(S_k)_0(T_k)_1-(S_k)_1(T_k)_0.$$

Постоянныя $A^k_{l\vartheta}$, $B^k_{l\vartheta}$ и $A^k_{x\vartheta}$, такимъ образомъ, опредѣлены по заданному на коническихъ поверхностяхъ коэффиціенту кубическаго измѣненія объема въ функціи ξ (или r).

Функціи f_1 и f_2 не вполнѣ произвольны; между ними существуетъ соотношеніе

$$\int_0^{2\pi}f_2(\xi)\cos k\xi\,d\xi\cdot\int_0^{2\pi}f_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi=\int_0^{2\pi}f_2(\xi)\sin k\xi\,d\xi\cdot\int_0^{2\pi}f_1(\xi)\cos k\xi\,d\xi\,,\quad(180)$$

такое же, какъ и между функціями $f_1(z_1)$ и $f_2(z_1)$ въ § 14 при рѣшеніи вопроса о равновѣсіи кругового цилиндра, Равенство (180) удовлетворится само собою при $f_1 = 0$, или $f_2 = 0$, т. е. когда предполагается, что на одной изъ ограничивающихъ тѣло коническихъ поверхностей коэффиціентъ кубическаго измѣненія объема равенъ нулю. Всѣ заключенія, сдѣланныя относительно $f_1(z_1)$ и $f_2(z_1)$ въ § 14, имѣютъ мѣсто и въ данномъ случаѣ.

Остаются неопредѣленными еще пять постоянныхъ A^k_{tv}, B^k_{tv}, A^k_{xw}, A^k_{tw} и B^k_{tw}. Обозначивъ черезъ $f_3(\xi)$ [или $f_4(\xi)$] новую произвольную функцію, положимъ

$$(\Phi_r)_{\varphi=\varphi_0} = f_3(\xi)\,,\ \text{или}\ (\Phi_r)_{\varphi=\varphi_1} = f_4(\xi) \quad \ldots\ldots (181)$$

Такъ какъ $\Phi_r = \Phi_{r1} + \Phi_{r2}$, гдѣ Φ_{r1} уже вполнѣ опредѣленная функція ξ (ибо постоянныя $A^k_{\theta t}$, $B^k_{t\theta}$, $A^k_{x\theta}$ опредѣлены), то равенства (181) равносильны такимъ

$$(\Phi_{r2})_{\varphi=\varphi_0} = f_3^{(1)}(\xi)\,,\ \text{или}\ (\Phi_{r2})_{\varphi=\varphi_1} = f_4^{(1)}(\xi)\,,$$

гдѣ $f_3^{(1)}$ и $f_4^{(1)}$ по прежнему произвольно заданныя функціи ξ. Вводя въ выраженіе Φ_{r2} перемѣнную ξ, имѣемъ

$$\Phi_{r2} = 2K\sum_0^{\infty}[L_1^k e^{ik\xi} + M_1^k e^{-ik\xi}]e^{\beta\xi}\frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi}\,,$$

гдѣ L_1^k, M_1^k и β постоянныя. Отсюда

$$\Phi_{r2} = \sum_0^{\infty}[L^k\cos k\xi + M^k\sin k\xi]\frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} = F_0(\xi)\,,$$

или

$$\Phi_{r2} = \sum_0^{\infty}[L^k\cos k\xi + M^k\sin k\xi]\frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_1} = F_1(\xi)\,.$$

$F_0(\xi)$ и $F_1(\xi)$ извѣстныя функціи ξ.

Слѣдовательно,

$$L^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\xi)\cos k\xi\,d\xi\,,\quad M^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi \quad \ldots (182)$$

Всѣ постоянныя, входящія въ выраженія U, V и θ, найдены.

Можно задать только на одной изъ коническихъ поверхностей функцію θ. Два первыя или два послѣднія изъ равенствъ (178_1) опредѣлятъ отношеніе $\frac{A^k}{B^k}$ и дадутъ выраженіе постоянныхъ $A^k_{x\theta}$ черезъ $\frac{1}{B^k}$. Затѣмъ задать значеніе (Φ_r) для двухъ значеній $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$ въ функціяхъ ξ. Совокупность равенствъ (181) опредѣлитъ отношенія $\frac{A^k_{tv}}{B^k}$, $\frac{B^k_{tv}}{B^k}$ и $\frac{1}{B^k}$.

Между упомянутыми функціями также получится соотношеніе, подобное (180).

Для U, V и θ получаемъ слѣдующія выраженія

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^\infty [A_{x\theta}^k S_k + T_k] e^{-\frac{t}{2}} \{[L_u^k + P_u^k e^{-2t}] \cos\gamma_k t + \\ &\qquad + [M_u^k + Q_u^k e^{-2t}] \sin\gamma_k t\}, \\ V &= \sum_0^\infty \sqrt{1-x^2} \left[A_{x\theta}^k \frac{dS_k}{dx} + \frac{dT_k}{dx} \right] e^{-\frac{t}{2}} \{[L_v^k + P_v^k e^{-2t}] \cos\gamma_k t + \\ &\qquad + [M_v^k + Q_v^k e^{-2t}] \sin\gamma_k t\}, \\ \theta &= \sum_0^\infty [A_{k\theta}^k S_k + T_k] e^{-\frac{t}{2}} [L_\theta^k \cos\gamma_k t + M_\theta^k \sin\gamma_k t], \end{aligned}\right\} \quad (183)$$

гдѣ L^k, M^k со значками u, v, θ; P^k, Q^k со значками u, v и $A_{x\theta}^k$ опредѣленныя постоянныя, а

$$\gamma_k = \frac{2\pi k}{t_1 - t_0}, \quad t = \log r, \quad x = \sin\varphi.$$

§ 30.

Остается опредѣлить постоянныя A_{xw}^k, A_{tw}^k и B_{tw}^k, входящія въ выраженіе W.

Положивъ, подобно предыдущему,

$$l_k^2 = \frac{1}{4} + \frac{2\pi k}{t_1 - t_0}$$

и введя перемѣнную ξ, получимъ

$$\Psi_\varphi = \sum_0^\infty \sqrt{1-x^2} \left[A_{xw}^k \frac{d^2 S_k}{dx^2} + \frac{d^2 T_k}{dx^2} \right] e^{\alpha\xi} [A_w^k \cos k\xi + B_w^k \sin k\xi],$$

гдѣ A_w^k и B_w^k постоянныя, выражающіяся линейно однородно черезъ A_{tw}^k и B_{tw}^k.

Пусть для двухъ значеній φ_0 и φ_1 перемѣнной φ

$$(\Psi_\varphi)_{\varphi=\varphi_0} = f_1(\xi), \quad (\Psi_\varphi)_{\varphi=\varphi_1} = f_2(\xi),$$

гдѣ $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ заданныя функціи ξ, или

$$\sum_0^\infty (H)_0 [A_w^k \cos k\xi + B_w^k \sin k\xi] = \psi_1(\xi),$$

$$\sum_0^\infty (H)_1 [A_w^k \cos k\xi + B_w^k \sin k\xi] = \psi_2(\xi),$$

гдѣ ψ_1 и ψ_2 также опредѣленныя функціи ξ, и

$$H=\sqrt{1-x^2}\left[A^k_{xw}\frac{d^2S_k}{dx^2}+\frac{d^2T_k}{dx^2}\right].$$

Изъ предыдущихъ равенствъ получаемъ

$$\left.\begin{aligned}(H)_0A^k_w&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_1(\xi)\cos k\xi\,d\xi\,,\ (H)_0B^k_w=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi\,,\\(H)_1A^k_w&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_2(\xi)\cos k\xi\,d\xi\,,\ (H)_1B^k_w=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_2(\xi)\sin k\xi\,d\xi\,.\end{aligned}\right\}\quad(184)$$

Эти уравненія опредѣлятъ A^k_{xw}, A^k_w и B^k_w. Функціи ψ_1 и ψ_2 не вполнѣ произвольны: между ними должно существовать соотношеніе вида (180), которое будетъ само собою удовлетворено при всякомъ k, если одна изъ этихъ функцій равна нулю.

Для W получится слѣдующее выраженіе

$$W=K\sum_0^\infty\frac{1}{l_k^2}\sqrt{1-x^2}\left(A^k_{xw}\frac{dS_k}{dx}+\frac{dT_k}{dx}\right)e^{\alpha_1t}[A^k_w\cos\gamma_kt+B^k_w\sin\gamma_kt]\,,\ .\ (185)$$

гдѣ $\gamma_k=\dfrac{2\pi k}{t_1-t_0}$, α_1 нѣкоторая постоянная.

Подобнымъ же образомъ можетъ быть рѣшена задача другого рода: опредѣлить условія равновѣсія даннаго тѣла при заданныхъ на коническихъ поверхностяхъ деформаціяхъ U, V, W и θ въ функціяхъ r.

Характеръ рѣшенія въ существѣ дѣла не измѣнится.

VIII. О равновѣсіи тѣлъ, ограниченныхъ коническими поверхностями и сферами, подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ послѣднимъ.

§ 31.

Переходимъ къ вопросу о равновѣсіи даннаго тѣла подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ сферическимъ поверхностямъ, его ограничивающимъ. Не опредѣляя пока характера этихъ силъ, разсмотримъ второе рѣшеніе уравненія (158), когда θ^k_r и θ^k_φ опредѣляются уравненіями (159). Частнымъ рѣшеніемъ перваго изъ нихъ будетъ

$$\theta^k_r=r^n,$$

гдѣ n корень уравненія

$$n^2+n-m_k^2=0.$$

Полагая $m_k^2=p_k(p_k+1)$, находимъ

$$\theta^k_r=A^k_{r\theta}r^{p_k}+\frac{B^k_{r\theta}}{r^{p_k+1}}\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (186)$$

$A^k_{r\theta}$ и $B^k_{r\theta}$ произвольныя постоянныя.

Вводя перемѣнную $x = \sin\varphi$, приводимъ второе изъ уравненій (159) къ виду

$$(1-x^2)\frac{d^2\theta_x^k}{dx^2} - 2x\frac{d\theta_x^k}{dx} + p_k(p_k+1)\theta_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

Это уравненіе Лежандра.

Положимъ

$$\theta_x^k = x^\alpha + a_2 x^{\alpha+2} + a_4 x^{\alpha+4} \ldots + a_{2\mu} x^{\alpha+2\mu}.$$

Характеристическое уравненіе даетъ для α два значенія

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = 1.$$

Такъ какъ

$$a_{2\mu+2} = -a_{2\mu}\frac{(p_k-\alpha-2\mu)(p_k+\alpha+1+2\mu)}{(\alpha+2\mu+1)(\alpha+2\mu-1)},$$

то, положивъ сначала $\alpha = 0$, потомъ $\alpha = 1$, получимъ два частныхъ рѣшенія уравненія (187), которыя обозначимъ черезъ P_{p_k} и Q_{p_k}. Рѣшенія эти будутъ

$$\left.\begin{aligned}
P_{p_k} &= 1 - \frac{p_k(p_k+1)}{\Gamma(3)} + \frac{p_k(p_k-2)(p_k+1)(p_k+3)}{\Gamma(5)}x^4 - \\
&- \frac{p_k(p_k-2)(p_k-4)(p_k+1)(p_k+3)(p_k+5)}{\Gamma(7)}x^6 + \ldots, \\
Q_{p_k} &= x\Big[1 - \frac{(p_k-1)(p_k+2)}{\Gamma(4)}x^2 + \frac{(p_k-1)(p_k-3)(p_k+2)(p_k+4)}{\Gamma(6)}x^4 - \\
&- \frac{(p_k-1)(p_k-3)(p_k-5)(p_k+2)(p_k+4)(p_k+6)}{\Gamma(8)}x^6 + \ldots\,^{1)}
\end{aligned}\right\} (188)$$

Ряды эти будутъ сходится для всѣхъ значеній x, заключенныхъ между -1 и $+1$. Если p_i цѣлое четное число, первый изъ рядовъ содержитъ конечное число членовъ, если нечетное цѣлое, —второй. При $x = \pm 1$ въ первомъ случаѣ $Q_{p_k}(\pm 1) = \infty$, во второмъ $P_{p_k}(\pm 1) = \infty$. Не трудно видѣть, что ряды эти представляютъ частные случаи гипергеометрическаго ряда, общій типъ котораго, какъ извѣстно, слѣдующій

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\xi + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}\xi^2 + $$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\xi^3 + \ldots$$

---

[1]) См. Heine, „Handbuch d. Kugelfunctionen". Berlin, 1861, S. 72.

Полагая

$$\alpha = -\frac{p_k}{2}, \quad \beta = \frac{p_k+1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \xi = x^2,$$

находимъ

$$P_{p_k} = F\left(-\frac{p_k}{2}, \ \frac{p_k+1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ x^2\right),$$

а положивъ

$$\alpha = -\frac{p_k-1}{2}, \qquad \beta = \frac{p_k+2}{2}, \qquad \gamma = \frac{3}{2}, \qquad \xi = x^2,$$

заключаемъ, что

$$Q_{p_k} = xF\left(-\frac{p_k-1}{2}, \ \frac{p_k+2}{2}, \ \frac{3}{2}, \ x^2\right). \ . \ . \ . \ (190)$$

Такимъ образомъ,

$$\theta_x = A^k_{\theta x} P_{p_k} + B^k_{\theta x} Q_{p_k}, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (191)$$

гдѣ $A^k_{\theta x}$ и $B^k_{\theta x}$ произвольныя постоянныя.

§ 32.

Интеграція первыхъ двухъ изъ уравненій (155) даетъ

$$\Gamma = \sum_0^\infty \frac{2(k+1)r^2 \frac{d\theta^k_r}{dr}}{p_k(p_k+1)} c \frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi}.$$

Слѣдовательно,

$$\sum_0^\infty \frac{2(k+1)r^2 \frac{d\theta^k_\varphi}{dr}}{p_k(p_k+1)} c \frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi} = c\left[\frac{\partial U}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rV)}{\partial r}\right],$$

$$\sum_0^\infty r^2 \theta^k_r c \theta^k_\varphi = \frac{\partial(r^2 cU)}{\partial r} + \frac{\partial(rcV)}{d\varphi}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{d(r^2\theta^k_r)}{dr} - 2(k+1)r^2 \frac{d\theta_r}{dr}\right]\theta^k_\varphi = \frac{1}{c}\,\frac{d\left(c\frac{dU^k_\varphi}{d\varphi}\right)}{d\varphi} U^k_r + \frac{d^2(r^2 U^k_r)}{dr^2}\, U^k_\varphi, \\ &\left[r_2\theta^k_r - \frac{2(k+1)}{p_k(p_k+1)}\,\frac{d\left(r^4 \frac{d\theta_r}{dr}\right)}{dr}\right]\frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi} = \frac{d\left(r^2\frac{dV^k_{r1}}{dr}\right)}{dr} V^k_\varphi + \frac{d\left(\frac{d(cV^k_\varphi)}{d\varphi}\right)}{d\varphi} V^k_{r1}, \end{aligned}\right\} \ (192)$$

гдѣ $V^k_{r1} = rV^k_r$.

Этимъ уравненiямъ можно удовлетворить, полагая, подобно предыдущему,

$$U_\varphi^k = \theta_\varphi^k\,, \qquad V_\varphi^k = \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}$$

и опредѣливъ U_r^k и V_{r1}^k изъ уравненiй

$$K_r = -\,U_r^k p_k(p_k+1) + \frac{d^2(r^2 U_r^k)}{dr^2}\,,$$

$$L_r = -\,V_r^k p_k(p_k+1) + \frac{d\left(r^2 \dfrac{dV_{r1}^k}{dr}\right)}{dr}\,,$$

гдѣ черезъ K_r и L_r обозначены выраженiя, заключенныя въ скобкахъ лѣвыхъ частей уравненiй (192).

При помощи этого рѣшенiя легко опредѣлить состоянiе равновѣсiя упругой сферической оболочки подъ дѣйствiемъ данныхъ силъ, приложенныхъ къ ея поверхностямъ. Проекцiи напряженiй будутъ выражаться черезъ θ_φ^k такъ же, какъ и въ предыдущемъ вопросѣ, а $\theta_\varphi = P_{pk}$, ибо Q_{pk} обратится въ ∞, если будемъ разумѣть подъ p_k рядъ цѣлыхъ четныхъ чиселъ. Останавливаться на этой задачѣ не будемъ.

Разсмотримъ другое рѣшенiе уравненiй (192), при помощи котораго опредѣлимъ состоянiе равновѣсiя полаго сферически-усѣченнаго конуса, или пояса сферической оболочки въ предположенiи, что на ихъ коническiя поверхности не дѣйствуетъ силъ.

Положивъ

$$\theta^k = r^{p_k}\theta_\varphi^k\,, \quad U^k = r^{p_k+1} U_\varphi^k\,, \quad V^k = r^{p_k+1} V_\varphi^k\,, \ldots \quad (193)$$

гдѣ U_φ и V_φ функцiи одного φ, получимъ слѣдующiя уравненiя для опредѣленiя U_φ^k и V_φ^k

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(c\,\dfrac{dU_\varphi^k}{d\varphi}\right)}{d\varphi} + (p_k+2)(p_k+3)\,c\,U_\varphi^k = c\theta_\varphi^k l\,, \\ &\frac{d\left(\dfrac{1}{c}\,\dfrac{d(cV_\varphi^k)}{d\varphi}\right)}{d\varphi} + (p_k+2)(p_k+3)\,V_\varphi^k = \frac{d\theta_\varphi}{d\varphi}\,l_1\,, \end{aligned}\right\} \quad . . (194)$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\left.\begin{aligned} l &= (p_k+2) - 2p_k(k+1)\,, \\ l_1 &= 1 - \frac{2(k+1)}{p_k+1}(p_k+3)\,. \end{aligned}\right\} \quad . . . . (195)$$

§ 33.

Прежде чѣмъ перейти къ отысканію U_φ и V_φ, выведемъ нѣкоторыя свойства функцій P_{p_k} и Q_{p_k}, представляющихъ, какъ замѣчено, частныя рѣшенія уравненія

$$(1-x^2)\frac{d^2F}{dx^2}-2x\frac{dF}{dx}+p_k(p_k+1)F=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (196)$$

По формулѣ Liouville'я основной детерминантъ

$$\Delta(F)=ce^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}.$$

Въ данномъ случаѣ $c=1$ и, слѣдовательно,

$$Q_{p_k}\frac{dP_{p_k}}{dx}-P_{p_k}\frac{dQ_{p_k}}{dx}=\frac{1}{x^2-1}\ [1]\ .\ .\ .\ .\ (197)$$

Возьмемъ четыре функціи P_{p_k}, Q_{p_k}, P_{p_k+2}, Q_{p_k+2}, изъ которыхъ первыя двѣ удовлетворяютъ уравненію (196), а двѣ послѣднія уравненію

$$(1-x^2)\frac{d^2F_1}{dx^2}-2x\frac{dF_1}{dx}+(p_k+2)(p_k+3)F_1=0\ .\ .\ .\ (198)$$

Легко видѣть, что

$$2[2p_k+3]\,FF_1=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(F_1\frac{dF}{dx}-F\frac{dF_1}{dx}\right)\right]$$

откуда, интегрируя и опуская произвольную постоянную, получаемъ

$$\int FF_1dx=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[F_1\frac{dF}{dx}-F\frac{dF_1}{dx}\right]$$

Замѣняя F черезъ P_{p_k}, Q_{p_k} и F_1 черезъ P_{p_k+2}, Q_{p_k+2}, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}
\int P_{p_k}P_{p_k+2}dx&=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[P_{p_k+2}\frac{dP_{p_k}}{dx}-P_{p_k}\frac{dP_{p_k+2}}{dx}\right],\\
\int P_{p_k}Q_{p_k+2}dx&=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[Q_{p_k+2}\frac{dP_{p_k}}{dx}-P_{p_k}\frac{dQ_{p_k+2}}{dx}\right],\\
\int Q_{p_k}P_{p_k+2}dx&=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[P_{p_k+2}\frac{dQ_{p_k}}{dx}-Q_{p_k}\frac{dP_{p_k+2}}{dx}\right],\\
\int Q_{p_k}Q_{p_k+2}dx&=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[Q_{p_k+2}\frac{dQ_{p_k}}{dx}-Q_{p_k}\frac{dQ_{p_k+2}}{dx}\right].
\end{aligned}\right\}\ .\ (199)$$

---

[1]) См. Forsyth, „A treatise on differential equations“. London, 1883, p. 143 etc.

Обозначимъ черезъ θ_x^k и Φ_x^k общiе интегралы уравненiй (196) и (198). Такъ какъ

$$p_k(p_k+1)\int_{-1}^{+1}\theta_x^k\theta_x^i dx = -\int_{-1}^{+1}\theta_x^i((1-x^2)(\theta_x^k)')dx = -p_i(p_i+1)\int_{-1}^{+1}\theta_x^k\theta_x^i dx\,,$$

то

$$\int_{-1}^{+1}\theta_x^k\theta_x^i dx = 0\,,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (200)$$

если только $i \gtrless k$.

Слѣдовательно,

$$\int_{-1}^{+1}\Phi_x^k\theta_x^i dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (201)$$

при всякихъ k и i.

Этими формулами мы и воспользуемся впослѣдствiи.

§ 34.

Переходимъ теперь къ опредѣленiю функцiй U_φ^k и V_φ^k. Преобразуя уравненiя (194) къ перемѣнной x, получаемъ для перваго изъ нихъ

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dU_x^k}{dx}\right] + (p_k+2)(p_k+3)U_x^k = l\theta_x^k\,. \quad \ldots \quad (202)$$

Интегралъ подобнаго уравненiя безъ правой части будетъ

$$A_u^k P_{p_k+2} + B_u^k Q_{p_k+2}\,,$$

гдѣ A_u^k и B_u^k произвольныя постоянныя, а P_{p_k+2}, Q_{p_k+2} функцiи Лежандра порядка (p_k+2). [1])

Пользуясь методомъ измѣненiя произвольныхъ постоянныхъ, получимъ слѣдующiя уравненiя для опредѣленiя A_u^k и B_u^k въ функцiяхъ x

$$\frac{dA_u^k}{dx} = \frac{l[A_\theta^k P_{p_k} + B_\theta^k Q_{p_k}]}{(1-x^2)\varDelta}\,Q_{p_k+2}\,,$$

$$\frac{dB_u^k}{dx} = -\frac{l[A_\theta^k P_{p_k} + B_\theta^k Q_{p_k}]}{(1-x^2)\varDelta}\,P_{p_k+2}\,,$$

гдѣ

$$\varDelta = \frac{1}{x^2-1}\,.$$

---

[1]) Всякую функцiю, удовлетворяющую уравненiю

$$(1-x^2)\frac{d^2E}{dx^2} - 2x\frac{dF}{dx} + n(n+1)F = 0\,,$$

какова бы ни была постоянная n, я буду называть Лежандровой функцiей n-аго порядка.

Интегрируя эти уравненія, находимъ [при помощи формулъ (199)]

$$A_u^k = (A_u^k) - lA_\theta^k \frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[Q_{p_k+2}\frac{dP_{p_k}}{dx} - P_{p_k}\frac{dQ_{p_k+2}}{dx}\right] -$$

$$- lB_\theta^k \frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[Q_{p_k+1}\frac{dQ_{p_k}}{dx} - Q_{p_k}\frac{dQ_{p_k+2}}{dx}\right],$$

$$B_u^k = (B_\theta^k) + lA_\theta^k \frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[P_{p_k+2}\frac{dP_{p_k}}{dx} - P_{p_k}\frac{dP_{p_k+1}}{dx}\right] +$$

$$+ lB_\theta^k \frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[P_{p_k+2}\frac{dQ_{p_k}}{dx} - Q_{p_k}\frac{dP_{p_k+2}}{dx}\right],$$

гдѣ (A_u^k) и (B_u^k) новыя произвольныя постоянныя.

Помноживъ первое изъ этихъ равенствъ на P_{p_k+2}, второе на Q_{p_k+2} и сложивъ, получимъ

$$U_x^k = A_u^k P_{p_k+2} + B_u^k Q_{p_k+2} + \frac{l}{2(2p_k+3)} A_\theta^k P_{p_k} + \frac{l}{2(2p_k+3)} B_\theta^k Q_{p_k}. \quad (203)$$

Для простоты опускаемъ скобки у постоянныхъ A_u^k и B_u^k.

Полагая

$$V_{1\varphi}^k = cV_\varphi^k$$

и преобразуя второе изъ уравненій (194) къ перемѣнной x, имѣемъ

$$(1-x^2)\frac{d^2V_{1x}^k}{dx^2} + (p_k+2)(p_k+3)V_{1x}^k = (1-x^2)\frac{d\theta_x^k}{dx} l_1.$$

Дифференцируя это уравненіе по x и обозначая $\frac{dV_{1x}^k}{dx}$ черезъ V'_{1x}, получаемъ

$$(1-x^2)\frac{d^2V'_{1x}}{dx^2} - 2x\frac{dV'_{1x}}{dx} + (p_k+2)(p_k+3)V'_{1x} = \theta_x l_2, \quad . \; (204)$$

гдѣ

$$l_2 = -l_1 p_k(p_k+1) = -p_k(p_k+1)\left[1 - \frac{2(k+1)}{p_k+1}(p_k+3)\right]. \; (205)$$

Уравненіе (203) отличается отъ (202) только постоянной l_2. Слѣдовательно,

$$V'_{1x} = A_v^k P_{p_k+2} + B_v^k Q_{p_k+2} + \frac{l_2 A_\theta^k}{2(2p_k+3)} P_{p_k} + \frac{l_2 B_\theta^k}{2(2p_k+3)} Q_{p_k}.$$

Отсюда

$$V_{1x}^k = \sqrt{1-x^2}\, V_x^k = A_v^k \int P_{p_k+2}\,dx + B_v^k \int Q_{p_k+2}\,dx + \frac{l_2 A_\theta^k}{2(2p_k+3)} \int P_{p_k}\,dx + \frac{l_2 B_\theta^k}{2(2p_k+3)} \int Q_{p_k}\,dx$$

и

$$\left.\begin{aligned} V_x^k = -\sqrt{1-x^2}\Big[& \frac{A_v^k}{(p_k+2)(p_k+3)} \frac{dP_{p_k+2}}{dx} + \frac{B_v^k}{(p_k+2)(p_k+3)} \frac{dQ_{p_k+2}}{dx} + \\ & + \frac{l_2 A_\theta^k}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} \frac{dP_{p_k}}{dx} + \frac{l_2 B_\theta^k}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} \frac{dQ_{p_k}}{dx} \Big]. \end{aligned}\right\} \quad (206)$$

§ 35.

Полученныя выраженія U_x^k, V_x^k и θ_x^k содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ

$$A_\theta^k,\ B_\theta^k,\ A_u^k,\ B_u^k,\ A_v^k \text{ и } B_v^k.$$

Между четырьмя послѣдними изъ нихъ должно существовать два соотношенія, выражающихъ A_u^k и B_u^k соотвѣтственно черезъ A_v^k и B_v^k (или наоборотъ).

Подставивъ U_x, V_x и θ_x въ равенство (87) и замѣтивъ, что

$$\frac{(p_k+3)\,l + l_2}{2(2p_k+3)} - 1 = 0,$$

мы отождествимъ упомянутое равенство, полагая

$$\left.\begin{aligned} (p_k+3)\,A_u^k + A_v^k = 0, \\ (p_k+3)\,B_u^k + B_v^k = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

Такимъ образомъ,

$$\left.\begin{aligned} \theta_x^k &= A_\theta^k P_{p_k} + B_\theta^k Q_{p_k}, \\ U_x^k &= A_u^k P_{p_k+2} + B_u^k Q_{p_k+2} + \frac{l A_\theta^k}{2(2p_k+3)} P_{p_k} + \frac{l B_\theta^k}{2(2p_k+3)} Q_{p_k}, \\ V_x^k &= \sqrt{1-x^2}\Big[\frac{A_u^k}{p_k+2} \frac{dP_{p_k+2}}{dx} + \frac{B_u^k}{p_k+2} \frac{dQ_{p_k+2}}{dx} - \\ & - \frac{l_2 A_\theta^k}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} \frac{dP_{p_k}}{dx} - \frac{l_2 B_\theta^k}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} \frac{dQ_{p_k}}{dx} \Big], \end{aligned}\right\} \quad (208)$$

и

$$\theta = \sum_0^{\infty} r^{p_k}\theta_x^k\,,\quad U = \sum_0^{\infty} r^{p_k+1} U_x^k\,,\quad V = \sum_0^{\infty} r^{p_k+1} V_x^k \;.\;.\;.\;(209)$$

гдѣ подъ θ_x^k, U_x^k и V_x^k разумѣются предыдущія выраженія.

Согласно обозначеніямъ § 33, можно представить эти равенства въ такомъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^{\infty} r^{p_k+1}\left[\Phi_x^k + \frac{l}{2(2p_k+3)}\,\theta_x^k\right],\\ V &= \sum_0^{\infty} r^{p_k+1}\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{p_k+2}\,\Phi_x^k - \frac{l_2}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)}\,\theta_x^k\right].\end{aligned}\right\}\;(210)$$

Замѣтимъ, что кромѣ полученнаго можно найти и другое рѣшеніе, полагая

$$\theta_r^k = \frac{\theta_\varphi^k}{r^{p_k+1}}\,,\qquad U_r^k = \frac{U_\varphi^k}{r^{p_k}}\,,\qquad V_r^k = \frac{V_\varphi^k}{r^{p_k}}\,;$$

болѣе общее рѣшеніе будетъ

$$\left.\begin{aligned} \theta^k &= \left(C_\theta^k r^{p_k} + D_\theta^k \frac{1}{r^{p_k+1}}\right)\theta_\varphi^k\,,\\ U^k &= \left(C_\theta^k r^{p_k+1}\, U_{\varphi 1}^k + \frac{D_\theta^k}{r^{p_k}}\right) U_{\varphi 2}^k\,,\\ V^k &= \left(C_\theta^k r^{p_k+1}\, V_{\varphi 1}^k + \frac{D_\theta^k}{r^{p_k}}\right) V_{\varphi 2}^k\,,\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(211)$$

гдѣ C_θ^k и D_θ^k произвольныя постоянныя.

Сущность анализа не измѣнится, если положимъ $C_\theta^k = 1$, $D_\theta^k = 0$. Въ послѣднемъ случаѣ можно, какъ увидимъ далѣе, опредѣлить состояніе равновѣсія разсматриваемаго тѣла при извѣстнымъ образомъ заданныхъ силахъ, дѣйствующихъ на одной изъ сферическихъ поверхностей, ограничивающихъ его. Если же возьмемъ болѣе общее рѣшеніе (211), можемъ задать силы на обѣихъ сферическихъ поверхностяхъ. Число заданныхъ функцій увеличится вдвое и въ столько же разъ увеличится число условій, которымъ должны удовлетворять эти функціи. Ходъ же рѣшенія задачи, какъ сказано, въ существѣ дѣла не измѣнится. Я ограничусь этимъ замѣчаніемъ и остановлюсь на предположеніи, что

$$C_\theta^k = 1\,,\qquad D_\theta^k = 0\,.$$

§ 36.

Остается опредѣлить функцію W, удовлетворяющую уравненію

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2(rcW)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial(rcW)}{\partial\varphi}\right]=0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (212)$$

Положивъ

$$W=\sum W^k \quad \text{и} \quad cW^k=r^{n_k}W^k_\varphi \, , \ . \ . \ . \ . \ . \ (213)$$

гдѣ n_k произвольная постоянная, получимъ

$$\frac{d\left(\frac{1}{c}\frac{dW^k_\varphi}{d\varphi}\right)}{d\varphi}+n_k(n_k+1)\frac{1}{c}\frac{dW^k_\varphi}{d\varphi}=0 \, , \ . \ . \ . \ (212_1)$$

или

$$(1-x^2)\frac{d^2W^k_x}{dx^2}+n_k(n_k+1)\,W^k_x=0 \, , \ . \ . \ . \ . \ . \ (212_2)$$

гдѣ, какъ и прежде, $x=\sin\varphi$.

Такъ какъ

$$(1-x^2)\frac{d^2W'_x}{dx^2}-2x\frac{dW'_x}{dx}+n_k(n_k+1)\,W'_x=0 \, , \text{ [1]}$$

то

$$W^k_x=A^k_w P_{n_k}+B^k_w Q_{n_k} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (214)$$

и

$$W^k_x=-(1-x^2)\left[\frac{A^k_w}{n_k(n_k+1)}\frac{dP_{n_k}}{dx}+\frac{B^k_w}{n_k(n_k+1)}\frac{dQ_{n_k}}{dx}\right].$$

Отсюда получаемъ

$$W^k=-\sqrt{1-x^2}\left[\frac{A^k_w}{n_k(n_k+1)}\frac{dP_{n_k}}{dx}+\frac{B^k_w}{n_k(n_k+1)}\frac{dQ_{n_k}}{dx}\right]r^{n_k} . \ . \ (215)$$

Обозначивъ черезъ Ψ^k_x общій интегралъ уравненія

$$(1-x^2)\frac{d^2F}{dx^2}-2x\frac{dF}{dx}+n_k(n_k+1)F=0 \, ,$$

представимъ предыдущее равенство въ видѣ

$$W^k_x=-\sqrt{1-x^2}\,[\Psi^k_x]'\,\frac{r^{n_k}}{n_k(n_k+1)} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (216)$$

[1]) Черезъ W'_x обозначено $\dfrac{dW^k_x}{dx}$.

Слѣдовательно,

$$W = -\sum_0^\infty \frac{r^{n_k}}{n_k(n_k+1)} \sqrt{1-x^2}\,[\Psi_x^k]' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

§ 37.

Вводя перемѣнную x въ выраженія (157), получаемъ

$$R_r = 2K\left[k\theta + \frac{\partial U}{\partial r}\right],$$

$$\Phi_\varphi = 2K\left[k\theta + \frac{U}{r} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{r}\frac{\partial V}{\partial x}\right],$$

$$\Psi_\psi = 2K\left[k\theta + \frac{U}{r} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{V}{r}\right],$$

$$\Phi_\psi = \Psi_\varphi = K\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{r}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{W}{r}\right],$$

$$\Psi_r = R_\psi = K\left[\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r}\right],$$

$$R_\varphi = \Phi_r = K\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{r}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right].$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}
R_r &= 2K\sum_0^\infty r^{p_k}\left[f_k\theta_x^k + (p_k+1)\Phi_x^k\right],\\
\Phi_\varphi &= 2K\sum_0^\infty r^{p_k}\left[g_k\theta_x^k - (p_k+2)\Phi_x^k + x\left(\frac{1}{p_k+2}(\Phi_x^k)' - j_k(\theta_x^k)'\right)\right],\\
\Psi_\psi &= 2K\sum_0^\infty r^{p_k}\left[h_k\theta_x^k + \Phi_x^k - x\left(\frac{1}{p_k+2}(\Phi_x^k)' - j_k(\theta_x^k)'\right)\right],\\
\Phi_\psi &= \Psi_\varphi = K\sum_0^\infty r^{n_k-1}\left[\Psi_x^k - \frac{2x}{n_k(n_k+1)}(\Psi_x^k)'\right],\\
\Psi_r &= R_\psi = K\sum_0^\infty r^{n_k-1}\frac{1-n_k}{n_k(n_k+1)}\sqrt{1-x^2}\,(\Psi_x^k)'.\\
R_\varphi &= \Phi_r = K\sum_0^\infty r^{p_k}\sqrt{1-x^2}\left[m_k(\Phi_x^k)' + q_k(\theta_x^k)'\right],
\end{aligned}\right\} . \quad (218)$$

гдѣ

$$
\left.
\begin{aligned}
f_k &= k + \frac{l(p_k+1)}{2(2p_k+3)}, \\
g_k &= k + \frac{1}{2(2p_k+3)}(l+l_2), \\
j_k &= \frac{l_2}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)}, \\
h_k &= \frac{2(p_k+1)}{p_k+2}, \\
m_k &= 1 + \frac{p_k+1}{p_k+2} - \frac{1}{p_k+2} = \frac{2(p_k+1)}{p_k+2}, \\
q_k &= \frac{l}{2(2p_k+3)} - \frac{l_2}{2p_k(2p_k+2)} + \frac{l_2}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} = \\
&= \frac{1}{2(2p_k+3)}\left[l - \frac{l_2}{p_k+1}\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (219)
$$

§ 38.

Предыдущій анализъ даетъ, такимъ образомъ, выраженія четырехъ функцій U, V, W и θ и проекцій на координатныя оси напряженій въ извѣстныхъ функціяхъ отъ $x = \sin\varphi$ и восьми группъ произвольныхъ постоянныхъ

$$
A_u^k,\ B_u^k,\ A_\theta^k,\ B_\theta^k,\ A_w^k,\ B_w^k,\ p_k,\ n_k
$$

$$
(k = 0, 1, 2 \ldots \infty).
$$

Задача будетъ вполнѣ рѣшена, если опредѣлимъ эти постоянныя по предѣльнымъ условіямъ задачи.

Пусть на коническихъ поверхностяхъ (т. е. для двухъ значеній $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$)

$$
\left.
\begin{aligned}
[R_\varphi]_{\varphi=\varphi_0} &= 0, & [R_\varphi]_{\varphi=\varphi_1} &= 0, \\
[\Phi_\varphi]_{\varphi=\varphi_0} &= 0, & [\Phi_\varphi]_{\varphi=\varphi_1} &= 0, \\
[\Psi_\varphi]_{\varphi=\varphi_0} &= 0, & [\Psi_\varphi]_{\varphi=\varphi_1} &= 0.
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots (220)
$$

Эти равенства, удовлетворяющіяся при всякомъ r, разобьются на безконечное число таковыхъ (каждое).

Обозначивъ черезъ x_0 и x_1 два значенія x, соотвѣтствующія φ_0 и φ_1 получимъ для $k^{\underline{\text{таго}}}$ изъ нихъ

*

$$\left.\begin{array}{l}[m_k(\Phi_x^k)'+q_k(\theta_x^k)']_{x=x_0}=0\,,\quad [m(\Phi_x^k)'+q_k(\theta_x^k)']_{x=x_1}=0\,,\\ \left\{g_k\theta_x^k-(p_k+2)\,\Phi_x^k+x\left(\dfrac{1}{p_k+2}(\Phi_x^k)'-j_k(\theta_x^k)'\right)\right\}_{x=x_0}=0\,,\\ \left\{g_k\theta_x^k-(p_k+2)\,\Phi_x^k+x\left(\dfrac{1}{p_k+2}(\Phi_x^k)'-j_k(\theta_x^k)'\right)\right\}_{x=x_1}=0\,,\end{array}\right\}. \quad (221)$$

$$[\Psi_x^k-\frac{2x}{n_k(n_k+1)}(\Psi_x^k)']_{x=x_0}=0\,,\quad [\Psi_x^k-\frac{2x}{n_k(n_k+1)}(\Psi_x^k)']_{x=x_1}=0\,. \quad (222)$$

Лѣвыя части этихъ равенствъ линейны однородны относительно постоянныхъ A и B со значками; равенства (221) содержатъ A и B со значками u и θ, а (222) — A и B со значкомъ w и опредѣлятъ соотвѣтственно отношенія

$$\frac{A_u^k}{B_\theta^k}\,,\quad \frac{B_u^k}{B_\theta^k}\,,\quad \frac{A_\theta^k}{B_\theta^k}\ \text{и}\ \frac{A_w^k}{B_w^k}.$$

Результатъ исключенія A_u^k, B_u^k, A_θ^k и B_θ^k даетъ уравненіе (трансцендентное) для опредѣленія p_k, а результатъ исключенія A_{wx}^k и B_{wx}^k — подобное же уравненіе для n_k.

Замѣнивъ θ_x^k и Ψ_x^k соотвѣтственно черезъ

$$A_\theta^k P_{p_k}+B_\theta^k Q_{p_k}\,,\quad A_u^k P_{p_k+2}+B_u^k Q_{p_k+2}\,,$$

приведемъ (221) къ виду

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_u^k m_k(P_{p_k+2})_i+\beta_u^k m_k(Q_{p_k+2})_i+\alpha_\theta^k q_k(P_{p_k})_i=-\,q_k(Q_{p_k})_i\,,\\ \alpha_u^k\left[\dfrac{x_i}{p_k+2}(P_{p_k+2})_i'-(p_k+2)(P_{p_k+2})_i\right]+\beta_u^k\left[\dfrac{x_i}{p_k+2}(Q_{p_k+2})_i'-\right.\\ \left.-(p_k+2)(Q_{p_k+2})_i\right]+\alpha_\theta^k[g_k(P_{p_k})_i-j_k(P_{p_k})_i']=j_k(Q_{p_k})_i'-g_k(Q_{p_k})_i\,,\end{array}\right\}. \quad (223)$$

гдѣ вообще

$$(F)_i\,,\quad (F)_i' \quad (i=0,\,1)$$

обозначаютъ значеніе функціи F или ея производной соотвѣтственно при $x=x_0$, $x=x_1$, и

$$\alpha_u^k=\frac{A_u^k}{B_\theta^k}\quad \beta_u^k=\frac{B_u^k}{B_\theta^k}\quad \alpha_\theta^k=\frac{A_\theta^k}{B_\theta^k}\quad .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (224)$$

Исключая изъ предыдущихъ уравненій постоянныя α_u^k, β_u^k и α_θ^k, получаемъ такое уравненіе для опредѣленія p_k

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (225)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначения

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{x_0}{p_k+2}(P_{p_k+2})'_0 - (p_k+2)(P_{p_k+2})_0\,,\\
a_{12} &= \frac{x_0}{p_k+2}(Q_{p_k+2})'_0 - (p_k+2)(Q_{p_k+2})_0\,,\\
a_{13} &= g_k(P_{p_k})_0 - j_k(P_{p_k})'_0\,,\\
a_{14} &= g_k(Q_{p_k})_0 - j_k(Q_{p_k})'_0\,,\\
a_{21} &= \frac{x_1}{p_k+2}(P_{p_k+2})'_1 - (p_k+2)(P_{p_k+2})_1\,,\\
a_{22} &= \frac{x_1}{p_k+2}(Q_{p_k+2})'_1 - (p_k+2)(Q_{p_k+2})_1\,,\\
a_{23} &= g_k(P_{p_k})_1 - j_k(P_{p_k})'_1\,, \quad a_{24} = g_k(Q_{p_k})_1 - j_k(Q_{p_k})'_1\,,\\
a_{31} &= m_k(P_{p_k+2})'_0\,, \quad a_{32} = m_k(Q_{p_k+2})'_0\,,\\
a_{33} &= q_k(P_{p_k})'_0\,, \quad a_{34} = q_k(Q_{p_k})'_0\,,\\
a_{41} &= m_k(P_{p_k+2})'_1\,, \quad a_{42} = m_k(P_{p_k+2})'_1\,,\\
a_{43} &= q_k(P_{p_k})'_1\,, \quad a_{44} = q_k(Q_{p_k})'_1\,.
\end{aligned}\right\} (226)$$

Уравненіе (225) имѣетъ безконечное множество вещественныхъ корней.

§ 39.

Замѣнивъ Ψ^k_x черезъ $A^k_w P_{p_k} + B^k_w Q_{p_k}$ и обозначивъ черезъ α^k_w отношеніе $\frac{A^k_w}{B^k_w}$, получимъ изъ уравненій (222)

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^k_w[n_k(n_k+1)(P_{n_k})_0 - 2x_0(P_{n_k})'_0] + [n_k(n_k+1)(Q_{n_k})_0 - 2x_0(Q_{n_k})'_0] &= 0\,,\\
\alpha^k_w[n_k(n_k+1)(P_{n_k})_1 - 2x_1(P_{n_k})'_1] + [n_k(n_k+1)(Q_{n_k})_1 - 2x_1(Q_{n_k})'_1] &= 0.
\end{aligned}\right\} (227)$$

Отсюда получаемъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія постоянной n_k

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} [n_k(n_k+1)(P_{n_k})_0 - 2x_0(P_{n_k})_0'], & [n_k(n_k+1)(Q_{n_k})_0 - 2x_0(Q_{n_k})_0'] \\ [n_k(n_k+1)(P_{n_k})_1 - 2x_1(P_{n_k})_1'], & [n_k(n_k+1)(Q_{n_k})_1 - 2x_1(Q_{n_k})_1'] \end{vmatrix} = 0 . \quad (228)$$

Это уравненіе, также какъ и (223), имѣетъ безчисленное множество вещественныхъ положительныхъ корней. Допустимъ для простоты, что тѣло симметрично относительно плоскости xy, т. е $x_0 = -x_1$. Обозначивъ черезъ $b_{ik}(i, k = 1, 2)$ элементы опредѣлителя Δ_2, имѣемъ

$$b_{11} = b_{21}, \qquad b_{12} = -b_{22},$$

такъ какъ P_{n_k} четная, а Q_{n_k} нечетная функція x. Уравненіе (228) приведется къ такому

$$\Delta_2 = b_{11} b_{22} = 0 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (228_1)$$

Дадимъ n_k значенія послѣдовательныхъ четныхъ чиселъ и обозначимъ соотвѣтствующія имъ значенія P_{n_k} (при данномъ $x = a$) черезъ $(P_{n_k})_{2i}$ $(i = 0, 1, 2, 3 \ldots \infty)$. Знаки послѣднихъ членовъ въ двухъ смежныхъ выраженіяхъ $(P_{n_k})_{2i}$, $(P_{n_k})_{2i+2}$ противоположны. При всякомъ a найдется такое значеніе $n_k = 2l$ (въ данномъ рядѣ ихъ), что знакъ P_{n_k} при $n_k \gtreqless 2l$ будетъ зависѣть отъ знака послѣдняго члена, такъ что всѣ $(P_{n_k})_{2j}$ $(j > l)$ будутъ попеременно положительны и отрицательны. Уравненіе

$$P_{n_k} = 0,$$

имѣетъ, слѣдовательно, безчисленное множество вещественныхъ положительныхъ корней, заключенныхъ между послѣдовательными четными числами (начиная отъ опредѣленнаго значенія n_k, зависящаго отъ даннаго x). Тоже должно сказать и объ уравненіи

$$b_{11} = 0 .$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что уравненіе

$$b_{22} = 0,$$

имѣетъ безчисленное множество положительныхъ вещественныхъ корней, заключающихся между послѣдовательными нечетными числами (начальное значеніе которыхъ также зависитъ отъ даннаго x).

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (228) имѣетъ безчисленное множество вещественныхъ положительныхъ корней между послѣдовательнымъ рядомъ цѣлыхъ чиселъ.

Тоже должно сказать и объ уравненіи (226). Постоянныя p_k и n_k, такимъ образомъ, опредѣлены.

§ 40.

Остается опредѣлить постоянныя B_θ^k и B_w^k.

Покажемъ, что при данныхъ условіяхъ задачи

$$\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=0\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(229)$$

если $i \gtrless k$.

Интегрируя по частямъ, находимъ

$$\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=(1-x^2)(\Psi_x^i)'\Psi_x^k\Big|_{x_0}^{x_1}+N_i\int_{x_0}^{a_1}\Psi_x^k\Psi_x^i\,dx\,.$$

гдѣ

$$N_i=n_i(n_i+1).$$

Совершая интеграцію въ другомъ порядкѣ, получаемъ

$$\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=(1-x^2)(\Psi_x^i)'\Psi_x^k\Big|_{x_0}^{x_1}+N_k\int_{x_0}^{x_1}\Psi_x^k\Psi_x^i\,dx\,.$$

Отсюда

$$(N_k-N_i)\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=(1-x^2)[N_k\Psi_x^k(\Psi_x^i)'-N_i\Psi_x^i(\Psi_x^k)'].$$

Такъ какъ [равенства (222)]

$$\Big[N_k\Psi_x^k-2x(\Psi_x^k)'\Big]_{x_0}^{x_1}=0,$$

$$\Big[N_i\Psi_x^i-2x(\Psi_x^i)'\Big]_{x_0}^{x_1}=0,$$

то

$$N_k\Psi_x^k(\Psi_x^i)'-N_i\Psi_x^i(\Psi_x^k)'=0\,;$$

слѣдовательно,

$$\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=0,$$

если $i \gtrless k$. Что и требовалось доказать.

Допустимъ, что одно изъ тангенціальныхъ напряженій, дѣйствующихъ на одной изъ сферъ, именно $\Psi_r=R_\varphi$, задано въ функціи x, которую обозначимъ черезъ $f(x)$. Если a радіусъ этой сферы, то где

$$\sum_0^\infty M_k \sqrt{1-x^2}\,(\Psi_x^k)' = f(x), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (230)$$

где

$$M_k = a^{n_k - 1}\frac{1-n_k}{n_k(n_k+1)}.$$

Помножая объ части равенства (230) на $\sqrt{1-x^2}(W_x^k)'$ и интегрируя въ предѣлахъ отъ x_0 до x_1, получаемъ при помощи (229)

$$M_k \int_{x_0}^{x_1} (1-x^2)[(\Psi_x^k)']^2\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1-x^2}\,(\Psi_x^k)'\,dx.$$

Подставивъ въ это равенство вмѣсто Ψ_x^k его выраженіе въ видѣ

$$B_w^k[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']$$

и сокративъ на B_w^k, имѣемъ

$$B_w^k M_k \int_{x_0}^{x_1} (1-x^2)[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1-x^2}[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']dx,$$

откуда

$$B_w^k = \frac{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1-x^2}\,[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']\,dx}{M_k \int_{x_0}^{x_1} (1-x^2)\,[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']^2\,dx} \quad . \; . \; . \; (231)$$

§ 41.

Для опредѣленія постоянной B_θ^k можно задать или вторую составляющую тангенціальнаго напряженія на одной изъ сферическихъ поверхностей, или коэффиціентъ кубическаго измѣненія объема въ функціи x. Послѣдняя, какъ увидимъ, не вполнѣ произвольна и должна быть однозначной и непрерывной между $x=1$, $x=-1$, т. е. разлагающейся въ рядъ по функціямъ Лежандра какого угодно параметра.

Положимъ, что при $r = a$

$$[R_\varphi]_{r=a} = [\Phi_r]_{r=a} = f_1(x)K,$$

гдѣ $f_1(x)$ заданная функція x_1 т. е.

$$\sum_0^\infty a^{p_k}\sqrt{1-x^2}\,B_\theta^k[m_k(\Phi_x^k)' + q_k(\theta_x^k)'] = f_1(x), \quad . \; . \; . \; . \; (232)$$

гдѣ Φ_x^k и θ_x^k извѣстныя функціи x и опредѣленныхъ постоянныхъ α_u^k, β_u^k и α_θ^k.

Какъ извѣстно (§ 33),

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\,(\Phi_x^k)'\,(\Phi_x^i)'\,dx=0\\&\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\,(\theta_x^k)'\,(\theta_x^i)'\,dx=0\,,\\ \text{если } i\gtrless k\text{, и}\qquad&\\&\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\,(\Phi_x^k)'\,(\theta_x^i)'\,dx=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\;(233)$$

при всякомъ k и i.

Допустимъ, что

$$\frac{f_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_0^\infty A_k\left[m_k(\Phi_x^k)'+q_k(\theta_x^k)'\right]\;\ldots\ldots\;(234)$$

для всѣхъ значеній x между -1 и $+1$, гдѣ A_k постоянная.

Помножая равенство (234) на $(1-x^2)(\Phi_x^k)'$ и интегрируя въ предѣлахъ отъ $x=-1$ до $x=+1$, находимъ

$$A_k m_k\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[(\Phi_x^k)']^2\,dx=\int_{-1}^{+1}f(x)(\Phi_x^k)'\,dx\,.$$

Помножая то же равенство на $(1-x^2)(\theta_x^k)'$ и интегрируя въ тѣхъ же предѣлахъ, имѣемъ

$$A_k q_k\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[(\theta_x^k)']^2\,dx=\int_{-1}^{+1}f(x)(\theta_x^k)'\,dx\,,$$

гдѣ $f(x)=f_1(x)\sqrt{1-x^2}$. Отсюда

$$A_k=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x)\,(\Phi_x^k)'\,dx}{\displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\,[(\Phi_x^k)']^2\,dx}=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x)\,(\theta_x^k)'\,dx}{\displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\,[(\theta_x^k)']^2\,dx}\,.\;(235)$$

Такъ какъ Φ_x^k и θ_x^k линейныя однородныя функціи P_{p_k+2}, Q_{p_k+2}, P_{p_k} и Q_{p_k}, то помноженіемъ равенства (234) на послѣднія и интеграціей между $x=-1$ и $x=1$, получимъ еще четыре выраженія для постоянной A_k, т. е. всего пять соотношеній въ опредѣленныхъ интегралахъ, которымъ должна удовлетворять функція $f(x)$. Обозначимъ отношеніе, содержащее функцію P_m, черезъ (A_m), а отношеніе, содержащее Q_m, черезъ (B_m). Пять упомянутыхъ соотношеній, очевидно, равносильны тремъ

$$(A_{p_k+2})=(B_{p_k+2})\,,\quad(A_{p_k+2})=(A_{p_k})\,,\quad(A_{p_k+2})=(B_{p_k})\,.\;\;.\;(236)$$

Эти уравненія будутъ удовлетворены, если $p_k (k = 0, 1, 2 \ldots \infty)$ будетъ общимъ ихъ корнемъ.

Положимъ

$$(A_{p_k+2}) - (B_{p_k+2}) = \Psi_1(p_k), \quad (A_{p_k-2}) - (A_{p_k}) = \Psi_2(p_k),$$
$$(A_{p_k+2}) - (B_{p_k}) = \Psi_3(p_k)$$

и

$$y_0 = \Delta_1(p_k), \quad y_1 = \Psi_1(p_k), \quad y_2 = \Psi_2(p_k), \quad y_3 = \Psi_3(p_k), \quad (237)$$

гдѣ $\Delta_1(p_k)$ опредѣлитель (225). $\Delta_1(p_k)$ и $\Psi_i(p_k)$ $(i = 1, 2, 3)$ извѣстныя функціи p_k. Уравненія (237) представляютъ четыре трансцендентныхъ кривыхъ, абсциссы и ординаты которыхъ соотвѣтственно суть y_i и p_k. Функція $f(x)$ должна быть такова, чтобы кривыя (237) имѣли безконечно большое число общихъ точекъ пересѣченія на оси абсциссъ. Разумѣется, можно найти безчисленное множество функцій f, удовлетворяющихъ этому условію. Предполагая A_k опредѣленною постоянной, изъ равенства

$$\sum_0^\infty a^{p_k} B_\theta^k [m_k (\Phi_x^k)' + q_k (\theta_x^k)'] = \sum_0^\infty A_k [m_k (\Phi_x^k)' + q_k (\theta_x^k)'],$$

находимъ

$$B_\theta^k = \frac{A_k}{a^{p_k}} = \frac{1}{a^{p_k}} \frac{\int_{-1}^{+1} f(x) (\Phi_x^k)' \, dx}{\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)[(\Phi_x^k)']^2 \, dx} \quad (238)$$

Всѣ постоянныя опредѣлены.

§ 42.

Вмѣсто тангенціальнаго напряженія Φ, можно задать въ функціи x коэффиціентъ кубическаго измѣненія объема θ, что представитъ даже нѣкоторое преимущество, такъ какъ произволъ заданной функціи въ послѣднемъ случаѣ менѣе стѣсненъ, чѣмъ въ первомъ.

Положимъ

$$\sum_0^\infty a^{p_k} B_\theta^k (\alpha_\theta^k P_{p_k} + Q_{p_k}) = \psi(x);$$

пусть

$$\psi(x) = \sum_0^\infty A_k (\alpha_\theta^k P_{p_k} + Q_{p_k})$$

для всѣхъ значеній x между -1 и $+1$. Въ данномъ случаѣ $\psi(x)$ должно удовлетворять только одному равенству

$$(A_{p_k}) = (B_{p_k})$$

или

$$\left.\frac{\int_{+1}^{+1}\psi(x)P_{p_k}dx}{\int_{-1}^{+1}[\alpha_\theta^k(P_{p_k})^2+Q_{p_k}P_{p_k}]dx}=\frac{\int_{+1}^{+1}\psi(x)Q_{p_k}dx}{\int_{-1}^{+1}[\alpha_\theta^k P_{p_k}Q_{p_k}+(Q_{p_k})^2]dx}.\right\}. \quad (239)$$

Функція $\psi(x)$ должна быть такова, чтобы кривыя

$$y_0=\Delta_1(p_k), \qquad y_1=\psi_1(p_k),$$

гдѣ $\psi_1(p_k)=(A_{p_k})-(B_{p_k})$, имѣли безконечное число общихъ точекъ пересѣченія съ осью абсциссъ p_k.

Постоянная B_θ^k опредѣлится равенствомъ

$$\left.B_\theta^k=\frac{1}{a^{p_k}}\,\frac{\int_{-1}^{+1}\psi(x)P_{p_k}dx}{\int_{-1}^{+1}[\alpha_\theta^k(P_{p_k})^2+Q_{p_k}P_{p_k}]dx}.\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (240)$$

Сходимость рядовъ (209), (217), (185). (183) для значеній перемѣнныхъ r, φ и ψ, соотвѣтствующихъ точкамъ пространства, заполненнаго матеріей разсматриваемыхъ тѣлъ, докажется такъ же, какъ сходимость рядовъ, выражающихъ U, V, W и θ въ вопросѣ о равновѣсіи цилиндрическихъ тѣлъ.

О цѣлой функціи равной произведенію двухъ гипергеометрическихъ рядовъ.

А. А. Маркова.

(Извлеченіе изъ письма къ К. А. Андрееву).

Въ первой замѣткѣ „О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда", публикованной въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества" за 1886 годъ, мною были опредѣлены всѣ случаи, когда произведеніе нѣкоторыхъ двухъ функцій y, удовлетворяющихъ дифференціальному уравненію гипергеометрическаго ряда

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

приводится къ цѣлой функціи

$$L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \ldots + L_n x^n$$

отъ x.

Не давая окончательнаго выраженія для этой цѣлой функціи, я ограничился тогда уравненіями первой степени, посредствомъ которыхъ можно въ каждомъ частномъ случаѣ опредѣлить отношенія ея коэффиціентовъ

$$L_0, \quad L_1, \quad L_2, \ldots, L_n$$

другъ къ другу.

Въ настоящее время замѣчательная теорема Клейна о нуляхъ гипергеометрическаго ряда (Mathematische Annalen, Band 37. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe) побудила меня снова заняться тѣмъ же вопросомъ.

И я нашелъ, что въ наиболѣе интересномъ случаѣ, когда $-\alpha-\beta=n$, цѣлое положительное число, $-\gamma+\frac{1}{2}=k$, цѣлое положительное число меньшее или равное n и $\alpha-\beta=\triangle$, число не цѣлое, дѣлая коэффиціентъ L_0 равнымъ единицѣ, мы можемъ представить искомую цѣлую функцію во первыхъ въ видѣ произведенія:

$$Lx^n F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{x}\right) F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right),$$

и во вторыхъ [1]) въ видѣ суммы:

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \gamma-\frac{1}{2},\ \gamma,\ 2\gamma-1,\ x\right)+$$

$$+A_1x^2F\left(2\alpha+2,\ 2\beta+2,\ \gamma+\frac{1}{2},\ \gamma+2,\ 2\gamma+1,\ x\right)+$$

$$+A_2x^4F\left(2\alpha+4,\ 2\beta+4,\ \gamma+\frac{3}{2},\ \gamma+4,\ 2\gamma+3,\ x\right)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+A_lx^{2l}F\left(2\alpha+2l,\ 2\beta+2l,\ \gamma+l-\frac{1}{2},\ \gamma+2l,\ 2\gamma+2l-1,\ x\right).$$

Здѣсь

$$F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{x}\right) \text{ и } F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right)$$

обыкновенные гипергеометрическіе ряды, расположенные по возрастающимъ степенямъ $\frac{1}{x}$, а выраженія вида

$$F(\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varrho,\ \sigma,\ x),$$

означаютъ гипергеометрическіе ряды высшаго порядка

$$1+\frac{\lambda\mu\nu}{1.\varrho\sigma}x+\frac{\lambda(\lambda+1)\mu(\mu+1)\nu(\nu+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}x^2+\ldots$$

Число l равно $n-k$ и коэффиціенты

$$A_1,\ A_2,\ldots,A_l$$

вычисляются по формуламъ

---

[1]) При $k \geqq \frac{n}{2}$.

$$A_1=\frac{\alpha\beta\left(n+\gamma-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot\gamma(\gamma+1)2\gamma}\,A_0=\frac{\alpha\beta\left(n+\gamma-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot\gamma(\gamma+1)2\gamma},$$

$$A_2=\frac{3(\alpha+1)(\beta+1)\left(n+\gamma-\frac{3}{2}\right)}{2(\gamma+1)(\gamma+3)(2\gamma+2)}A_1,$$

$$A_3=\frac{5(\alpha+2)(\beta+2)\left(n+\gamma-\frac{5}{2}\right)}{3(\gamma+4)(\gamma+5)(2\gamma+4)}A_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_l=\frac{(2l-1)(\alpha+l-1)(\beta+l-1)\left(n+\gamma-l+\frac{1}{2}\right)}{l(\gamma+2l-2)(\gamma+2l-1)(2\gamma+2l-2)}A_{l-1},$$

наконецъ

$$L=\frac{(2\alpha+2l)(2\beta+2l)(2\alpha+2l+1)(2\beta+2l+1)\ldots(2\alpha+n-1)(2\beta+n-1)(-1)^n}{(\gamma+2l)(\gamma+2l+1)\ldots(\gamma+n-1)(2\gamma+2l-1)(2\gamma+2l)\ldots(2\gamma+n-1)}A_l,$$

при чемъ я предполагаю $k\geqq\frac{n}{2}$.

Что же касается случаевъ, когда $k\leqq\frac{n}{2}$, то ихъ нетрудно привести къ случаямъ, когда $k\geqq n$, при помощи простой замѣны x на $1-x$ и γ на $\alpha+\beta+1-\gamma$.

Выводъ этихъ формулъ и нѣкоторыхъ другихъ интересныхъ свойствъ разсматриваемой мною цѣлой функціи я откладываю до другого раза. Теперь-же для поясненія общихъ формулъ частными примѣрами положимъ въ нихъ сначала

$$n=5,\quad k=4,\quad l=n-k=1$$

и затѣмъ

$$n=5,\quad k=3,\quad l=n-k=2.$$

Въ первомъ случаѣ мы получимъ цѣлую функцію

$$\varphi(x)=1-\frac{25-\triangle^2}{7}x+$$

$$+\frac{(25-\triangle^2)(47-3\triangle^2)}{245}x^2-\frac{(25-\triangle^2)(9-\triangle^2)(29-2\triangle^2)}{2205}x^3+$$

$$+\frac{(25-\triangle^2)(9-\triangle^2)(4-\triangle^2)(10-\triangle^2)}{11025}x^4-$$

$$-\frac{(25-\triangle^2)(9-\triangle^2)(4-\triangle^2)(1-\triangle^2)}{11025}x^5=$$

$$Lx^5F\left(\frac{-5+\triangle}{2},\ \frac{4+\triangle}{2},\ \triangle+1,\ \frac{1}{x}\right)F\left(\frac{-5-\triangle}{2},\ \frac{4-\triangle}{2},\ 1-\triangle,\ \frac{1}{x}\right),$$

гдѣ

$$L = -\frac{(25-\triangle^2)(9-\triangle^2)(4-\triangle^2)(1-\triangle^2)}{11025}.$$

Во второмъ-же случаѣ мы получимъ такую цѣлую функцію

$$\psi(x) = 1 - \frac{25-\triangle^2}{5}x +$$

$$+ \frac{(25-\triangle^2)(30-2\triangle^2)}{75}x^2 - \frac{(25-\triangle^2)(9-\triangle^2)(10-\triangle^2)}{225}x^3 +$$

$$+ \frac{(25-\triangle^2)(9-\triangle^2)(5-2\triangle^2)}{225}x^4 - \frac{(25-\triangle^2)(9-\triangle^2)(1-\triangle^2)}{225}x^5 =$$

$$= Lx^5 F\left(\frac{-5+\triangle}{2}, \frac{2+\triangle}{2}, 1+\triangle, \frac{1}{x}\right) F\left(\frac{-5-\triangle}{2}, \frac{2-\triangle}{2}, 1-\triangle, \frac{1}{x}\right),$$

гдѣ

$$L = -\frac{(25-\triangle^2)(9-\triangle^2)(1-\triangle^2)}{225}.$$

По величинѣ $\triangle$ нетрудно судить, на основаніи теоремы Клейна, о числѣ вещественныхъ корней, какъ уравненія

$$\varphi(x) = 0,$$

такъ и уравненія

$$\psi(x) = 0.$$

Интересно было бы сдѣлать тоже самое независимо отъ теоремы Клейна.

Пользуюсь случаемъ, чтобы дополнить и вторую мою замѣтку съ тѣмъ же заглавіемъ.

Дѣло въ томъ, что окончательный ея выводъ можно формулировать въ слѣдующей простой формѣ.

Дифференціальное уравненіе

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

допускаетъ интегралъ вида

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0,$$

гдѣ X, Y, Z цѣлыя функціи отъ x, тогда и только тогда, когда одно изъ выраженій

$$\alpha, \beta, \alpha-\gamma, \beta-\gamma,$$

число цѣлое или же два изъ выраженій

$$\gamma+\frac{1}{2}\,,\quad \alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2}\,,\quad \beta-\alpha+\frac{1}{2}$$

одновременно числа цѣлыя.

Всѣ эти случаи, какъ оказывается, совпадаютъ съ тѣми, для которыхъ еще Пфаффъ (Disquisitiones analyticae) показалъ возможность интегрированія уравненія

$$x(1-x)\,y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$$

въ конечномъ видѣ.

Пфаффъ разсматривалъ уравненіе болѣе общаго вида, которое легко сводится однако къ дифференціальному уравненію гипергеометрическаго ряда.

Въ тѣхъ-же случаяхъ и ни въ какихъ другихъ между функціями y, удовлетворяющими уравненію

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0\,,$$

можно найти такія двѣ y_1 и y_2, что логарифмическая производная

$$\frac{y_1{}'}{y_1}+\frac{y_2{}'}{y_2}$$

по x отъ ихъ произведенія y_1y_2 будетъ раціональною функціею отъ x.

Фототипія Шереръ Набгольцъ и Ко въ Москвѣ.

В. Пишенецкій

Рѣшеніе уравненій четвертой степени на основаніи симметричнаго омографическаго соотношенія, существующаго между его корнями.

В. Г. Имшенецкаго † [1]).

§ 1. *Теорема.* Корни α, β, γ, δ уравненія четвертой степени

$$f(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

всегда можно разбить на такія двѣ группы, по два корня α и β, γ и δ, что корни, принадлежащіе къ каждой изъ нихъ, подставленные вмѣсто x и y, будутъ удовлетворять соотношенію

$$xy = \mu(x+y) + \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

симметричному и омографическому въ отношеніи x и y.

Коэффиціентъ μ въ уравненіи (2) опредѣлится изъ уравненія третьей степени, которое будетъ *разрѣшающимъ* въ отношеніи уравненія (1). Коэффиціентъ λ выразится раціонально посредствомъ μ и a, b, c, d.

Доказательство. По свойству симметричнаго соотношенія (2) взаимная перестановка x и y въ уравненіи (2) не измѣняетъ его вида. Изъ него получаемъ

$$y = \frac{\mu x + \lambda}{x - \mu} \quad \text{и} \quad x = \frac{\mu y + \lambda}{y - \mu},$$

тождественныя выраженія y черезъ x и обратно.

---

[1]) Замѣтка эта найдена въ бумагахъ покойнаго В. Г. Имшенецкаго. Время ея составленія не извѣстно.

Поэтому, допуская, что между α и β съ одной стороны, и между γ и δ съ другой, имѣетъ мѣсто соотношеніе (2), будемъ имѣть, что подстановка

$$z = \frac{\mu\zeta + \lambda}{\zeta - \mu} = \mu + \frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

въ данное уравненіе

$$f(z) = 0$$

не должна произвести измѣненія его вида, такъ что послѣ этой подстановки и соединенія подобныхъ членовъ получится уравненіе:

$$f(\zeta) = 0.$$

Но по теоремѣ Тейлора мы находимъ, что

$$f\left(\frac{\mu\zeta + \lambda}{\zeta - \mu}\right) = f\left(\mu + \frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right) =$$

$$= f(\mu) + f'(\mu)\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu} + \frac{1}{2} f''(\mu)\left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} f'''(\mu)\left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^4 = 0.$$

Отсюда, упрощая, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &(\zeta - \mu)^4 + \frac{f'(\mu)(\lambda + \mu^2)}{f(\mu)}(\zeta - \mu)^3 + \frac{f''(\mu)(\lambda + \mu^2)^2}{2f(\mu)}(\zeta - \mu)^2 + \\ &+ \frac{f'''(\mu)(\lambda + \mu^2)^3}{6f(\mu)}(\zeta - \mu) + \frac{(\lambda + \mu^2)^4}{f(\mu)} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

На основаніи же вышеприведеннаго соображенія уравненіе (4) должно быть тождественнымъ съ уравненіемъ $f(\zeta) = 0$.

Но такъ какъ

$$\left.\begin{aligned} &f(\zeta) = f(\mu + \zeta - \mu) = \\ &= f(\mu) + f'(\mu)(\zeta - \mu) + \frac{1}{2} f''(\mu)(\zeta - \mu)^2 + \frac{1}{6} f'''(\mu)(\zeta - \mu)^3 + (\zeta - \mu)^4 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

то для существованія упомянутаго тождества необходимы слѣдующія равенства, вытекающія изъ сравненія коэффиціентовъ одинаковыхъ степеней $(\zeta - \mu)$ въ уравненіяхъ (4) и (5):

$$(\lambda + \mu^2)^4 = [f(\mu)]^2 \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

$$(\lambda + \mu^2)^3 f'''(\mu) = 6f(\mu) f'(\mu) \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

$$(\lambda + \mu^2)^2 f''(\mu) = f(\mu) f''(\mu) \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

$$(\lambda + \mu^2) f'(\mu) = \frac{1}{6} f(\mu) f'''(\mu) \quad \ldots \ldots \quad (d)$$

Изъ нихъ по условію (c) имѣемъ

$$f(\mu) = (\lambda + \mu^2)^2 ; \quad \ldots \ldots \quad (e)$$

поэтому, для согласованія условій (c) и (a), необходимо, извлекая квадратный корень изъ обѣихъ частей уравненія (a), взять результаты извлеченія съ одинаковыми знаками.

Далѣе, съ помощію (e), исключивъ $f(\mu)$ изъ (b) или изъ (d), прійдемъ къ одному и тому-же условію

$$6f'(\mu) = f'''(\mu)(\lambda + \mu^2). \quad \ldots \ldots \quad (f)$$

Исключивъ $\lambda + \mu^2$ изъ уравненій (e) и (f), мы получимъ слѣдующее уравненіе

$$36[f'(\mu)]^2 = [f'''(\mu)]^2 f(\mu), \quad \ldots \ldots \quad (g)$$

съ помощію котораго можно опредѣлить требуемыя значенія коэффиціента μ, послѣ чего значеніе другого коэффиціента λ получится изъ уравненія (f) по формулѣ

$$\lambda = \frac{6f(\mu) - \mu^2 f'''(\mu)}{f'''(\mu)} \quad \ldots \ldots \quad (h)$$

§ 2. Теперь не трудно убѣдиться, съ помощію простыхъ алгебраическихъ вычисленій, что хотя уравненіе (g), служащее для опредѣленія значеній μ, повидимому шестой степени, но въ немъ члены выше третьей степени сокращаются, и по упрощеніи оно получаетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{array}{l}(a^3 - 4ab + 8c)\mu^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)\mu^2 \\ \quad + (a^2c + 8ad - 4bc)\mu + a^2d - c^2 = 0.\end{array}\right\} \ldots (G)$$

Равнымъ образомъ уравненіе (h) окончательно получитъ такой видъ:

$$\lambda = \frac{2a\mu^2 + 2b\mu + c}{4\mu + a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

Изъ уравненія (G) получимъ по крайней мѣрѣ *одно* вещественное значеніе μ, а соотвѣтствующее значеніе λ найдемъ по формулѣ (H).

Если $d = \frac{c^2}{a^2}$, то $\mu = 0$ и $\lambda = \frac{c}{a}$.

Если данное уравненіе четвертой степени будетъ вида

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

что всегда можно предполагать, то уравненія (G) и (H) получатъ слѣдующій видъ

$$8q\mu^3 - 4(p^2 - 4r)\mu^2 - 4pq\mu - q^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G')$$

и

$$\lambda = \frac{2p\mu + q}{4\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H')$$

§ 3. Разсмотримъ теперь, какимъ образомъ можно довести до конца рѣшеніе уравненія четвертой степени (1), зная одинъ изъ корней уравненія третьей степени (G).

Первую часть даннаго уравненія (1) можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$f(z) = [z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta][z^2 - (\gamma + \delta)z + \gamma\delta].$$

Но на основаніи соотношенія (2) мы имѣемъ:

$$\alpha\beta = \mu(\alpha + \beta) + \lambda, \qquad \gamma\delta = \mu(\gamma + \delta) + \lambda;$$

слѣдовательно

$$f(z) = [z^2 + \lambda - (\alpha + \beta)(z - \mu)][z^2 + \lambda - (\gamma + \delta)(z - \mu)],$$

и полагая

$$\frac{z^2 + \lambda}{z - \mu} = u,$$

можно данное уравненіе $f(z) = 0$ четвертой степени привести къ уравненію второй степени

$$[u - (\alpha + \beta)][u - (\gamma + \delta)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K)$$

Коэффиціенты этого послѣдняго уравненія не трудно выразить въ коэффиціентахъ даннаго уравненія. Дѣйствительно, уравненіе (K) имѣетъ видъ

$$u^2 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)u + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta = 0.$$

Но мы имѣемъ:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-a\,,$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=b\,,$$

на основанiи же соотношенiя (2) между корнями даннаго уравненiя

$$\alpha\beta+\gamma\delta=-\mu a+2\lambda.$$

Слѣдовательно

$$\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta=b+a\mu-2\lambda.$$

И такъ, уравненiе (K) приметъ видъ

$$u^2+au+a\mu-2\lambda+b=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (L)$$

или, введя данное выше значенiе λ,

$$u^2+au+\frac{a^2\mu-2c+ab}{4\mu+a}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (M)$$

Опредѣливъ оба корня u_1 и u_2 уравненiя (L) или (M), получимъ соотвѣтственныя значенiя z посредствомъ рѣшенiя уравненiй второй степени:

$$\left.\begin{aligned} z^2-u_1z+\mu u_1+\lambda=0 \\ z^2-u_2z+\mu u_2+\lambda=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (N)$$

Корни z_1, z_2 и z_3, z_4 двухъ послѣднихъ уравненiй и будутъ корнями предложеннаго уравненiя 4-ой степени $f(z)=0$.

Въ этомъ можно убѣдиться, перемножая уравненiя (N) одно на другое, что доставитъ уравненiе

$$z^4-(u_1+u_2)\,z^3+[\mu(u_1+u_2)+u_1u_2+2\lambda]z^2-$$
$$-[2\mu u_1u_2+\lambda(u_1+u_2)]\,z+(\mu u_1+\lambda)(\mu u_2+\lambda)=0.$$

Но, на основанiи (L), мы имѣемъ:

$$-(u_1+u_2)=a\,, \qquad u_1u_2=a\mu-2\lambda+b\,;$$

слѣдовательно

$$\mu(u_1+u_2)+u_1u_2+2\lambda=-a\mu+a\mu-2\lambda+b+2\lambda=b\,,$$

$$-2\mu u_1u_2-\lambda\,(u_1+u_2)=-2a\mu^2+4\mu\lambda-2b\mu+\lambda a\,,$$

и такъ какъ по формулѣ (H)

$$-2a\mu^2 - 2b\mu = -4\mu\lambda - a\lambda + c\,,$$

то

$$-2\mu u_1 u_2 - \lambda(u_1 + u_2) = c\,.$$

Наконецъ,

$$(\mu u_1 + \lambda)(\mu u_2 + \lambda) = \mu^2 u_1 u_2 + \lambda\mu(u_1 + u_2) + \lambda^2 =$$

$$= a\mu^3 - 2\lambda\mu^2 + b\mu^2 - a\lambda\mu + \lambda^2\,;$$

но на основаніи уравненія

$$f(\mu) = (\lambda + \mu^2)^2$$

имѣемъ

$$a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d = \lambda^2 + 2\lambda\mu^2\,;$$

откуда

$$\lambda^2 = a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d - 2\lambda\mu^2\,.$$

Введя это значеніе λ^2 въ предыдущую формулу, найдемъ

$$(\mu u_1 + \lambda)(\mu u_2 + \lambda) = 2a\mu^3 + 2b\mu^2 + c\mu + d - 4\lambda\mu^2 - a\lambda\mu =$$

$$= (2a\mu^2 + 2b\mu + c)\,\mu - (4\mu + a)\,\lambda\mu + d$$

или, принимая во вниманіе уравненіе (H), которое можно написать такимъ образомъ:

$$(2a\mu^2 + 2b\mu + c) - (4\mu + a)\lambda = 0\,,$$

мы получимъ

$$(\mu u_1 + \lambda)(\mu u_2 = \lambda) = d\,.$$

И такъ, отъ перемноженія уравненій (N) одного на другое мы получимъ данное уравненіе

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

ч. и т. д.

О движеніи твердаго тѣла въ жидкости.

В. А. Стеклова.

Въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ „Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit", помѣщенномъ въ III-мъ томѣ „Mathematische Annalen", Клебшъ изслѣдуетъ условія, при которыхъ уравненія движенія твердаго тѣла въ жидкости

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial y_3},$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2},$$

$$\frac{dy_2}{dt} = x_3 \frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial T}{\partial y_3},$$

$$\frac{dy_3}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}$$

гдѣ T однородная квадратичная функція шести перемѣнныхъ

$$x_l, \quad y_l\ ^{1)}, \qquad (l = 1, 2, 3)$$

допускаютъ, сверхъ трехъ интеграловъ Кирхгофа, четвертый интегралъ подъ видомъ цѣлой однородной функціи второй степени отъ тѣхъ же перемѣнныхъ.

Онъ приходитъ къ заключенію, что такой интегралъ возможенъ только для тѣла, удвоенная живая сила котораго

$$2T = \mathbf{S} a_1 x_1^2 + \mathbf{S} b_1 y_1^2,$$

---

[1]) x_l и y_l означаютъ проекціи на оси координатъ, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, вектора и момента производящихъ движеніе импульсовъ.

и гдѣ между постоянными коэффиціентами a_l и b_l ($l=1, 2, 3$) существуетъ соотношеніе вида

$$\mathbf{S}\frac{a_2-a_3}{b_1}=0.$$

Знакъ $\mathbf{S}$ въ этихъ формулахъ обозначаетъ сумму трехъ членовъ, получающихся изъ написаннаго круговой перестановкой значковъ

$$1,\ 2,\ 3.$$

Но указанный Клебшемъ случай не единственный.

Дѣйствительно, не трудно убѣдиться также въ справедливости слѣдующаго предложенія:

Если удвоенная живая сила твердаго тѣла въ жидкости

$$2T=\mathbf{S}a_1x_1^2+2\sigma\mathbf{S}b_2b_3x_1y_1+\mathbf{S}b_1y_1^2,$$

гдѣ

$$a_1=\sigma^2b_1(b_2^2+b_3^2),$$

$$a_2=\sigma^2b_2(b_3^2+b_1^2),$$

$$a_3=\sigma^2b_3(b_1^2+b_2^2),$$

а σ нѣкоторая неопредѣленная постоянная, то уравненія движенія допускаютъ четвертый интегралъ вида

$$\sigma^2\mathbf{S}b_1(3b_1-2\mathbf{S}b_1)x_1^2+2\sigma\mathbf{S}b_1x_1y_1-\mathbf{S}y_1^2=const.,$$

и рѣшеніе задачи приводится къ квадратурамъ.

Указанный сейчасъ случай существенно отличается отъ случая Клебша и не замѣченъ послѣднимъ.

Недосмотръ Клебша состоитъ въ томъ, что онъ принялъ постоянную, обозначенную имъ въ началѣ изслѣдованія черезъ $\varkappa$, въ дальнѣйшемъ анализѣ равной нулю.

При $\varkappa$ отличномъ отъ нуля получится указанный мною случай.

Случай Клебша и только что указанный суть дѣйствительно единственные, при которыхъ уравненія движенія твердаго тѣла въ жидкости допускаютъ четвертый цѣлый однородный интегралъ второй степени.

Интеграція уравненій въ разсматриваемомъ случаѣ приводитъ, по всей вѣроятности, къ тета-функціямъ отъ двухъ аргументовъ, какъ и въ случаѣ Клебша.

Къ вопросу объ устойчивости движенія.

А. М. Ляпунова.

Предлагаемая замѣтка заключаетъ въ себѣ небольшое дополненіе къ сочиненію *Общая задача объ устойчивости движенія* (Харьковъ, 1892; изданіе Харьк. Матем. Общества).

Въ этомъ сочиненіи, предполагая, что въ дифференціальныхъ уравненіяхъ возмущеннаго движенія, приведенныхъ къ нормальному виду, вторыя части представлены рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ неизвѣстныхъ функцій, и дѣлая еще нѣкоторыя общія предположенія (о которыхъ будетъ сказано ниже), я указываю условіе, при которомъ рѣшеніе вопроса объ устойчивости не зависитъ отъ членовъ выше перваго измѣренія въ названныхъ рядахъ; но при этомъ доказываю только его достаточность. Здѣсь я намѣренъ показать, какимъ образомъ можетъ быть доказана необходимость этого условія.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть величины, по отношенію къ которымъ изслѣдуется устойчивость, и которыя въ дифференціальныхъ уравненіяхъ возмущеннаго движенія должны играть роль неизвѣстныхъ функцій времени t.

Величины эти суть нѣкоторыя данныя функціи координатъ и скоростей разсматриваемой матерьяльной системы, выраженія которыхъ могутъ зависѣть явнымъ образомъ и отъ времени.

Я предполагаю, что функціи эти выбраны такъ, чтобы для движенія, устойчивость котораго изслѣдуется, и которое называю невозмущеннымъ, онѣ всѣ дѣлались нулями, и что для движеній возмущенныхъ онѣ удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ вида:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n+X_s,\\ (s=1,2,\ldots,n)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

гдѣ $p_{s\sigma}$ $(s, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$ суть нѣкоторыя вещественныя постоянныя, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нѣкоторыя извѣстныя функціи величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и t, представляемыя при достаточно малыхъ $|x_s|$ рядами

$$X_s = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \qquad (m_1 + m_2 + \ldots + m_n > 1)$$

расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x_s и несодержащими членовъ ниже второго измѣренія относительно послѣднихъ. Я предполагаю при томъ, что коэффиціенты $P_s^{(\ldots)}$ въ этихъ рядахъ, представляющіе или вещественныя постоянныя, или непрерывныя вещественныя функціи времени, таковы, что возможно найти такія положительныя постоянныя M и A, при которыхъ выполнялись бы неравенства вида

$$\left| P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| < \frac{M}{A^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}$$

для всѣхъ значеній t, превосходящихъ то его значеніе, которое мы приняли за начальное.

Задача объ устойчивости по отношенію къ величинамъ x_s приводится къ рѣшенію вопроса о возможности для всякаго даннаго положительнаго числа l выбирать другое положительное число ε такъ, чтобы всякій разъ, когда въ начальный моментъ времени функціямъ x_s даются вещественныя значенія, удовлетворяющія условіямъ

$$|x_1| \leqq \varepsilon, \quad |x_2| \leqq \varepsilon, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqq \varepsilon,$$

во все послѣдующее время движенія выполнялись неравенства

$$|x_1| < l, \quad |x_2| < l, \quad \ldots, \quad |x_n| < l.$$

Когда этотъ вопросъ разрѣшается въ утвердительномъ смыслѣ, невозмущенное движеніе по отношенію къ величинамъ x_s устойчиво; въ противномъ случаѣ неустойчиво.

Въ упомянутомъ выше сочиненіи указывается условіе, которому должны удовлетворять постоянныя $p_{s\sigma}$, для того, чтобы рѣшеніе этого вопроса не зависѣло отъ какихъ-либо частныхъ предположеній относительно функцій X_s.

Условіе это относится къ корнямъ уравненія

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \varkappa & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \varkappa & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

и если

$$\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ \ldots,\ \lambda_n \tag{2}$$

суть взятыя со знакомъ минусъ вещественныя части этихъ корней, выражается такъ: *наименьшее изъ чиселъ (2) не должно быть нулемъ.*

Достаточность этого условія обнаруживается тѣмъ, что для случаевъ, когда наименьшее изъ чиселъ (2) положительно, доказывается устойчивость невозмущеннаго движенія, а для случаевъ, когда число это отрицательно, — неустойчивость, при чемъ принимаются въ разсчетъ только тѣ общія предположенія относительно функцій X_s, которыя высказаны выше [1]).

Чтобы доказать необходимость того же условія, я долженъ доказать теперь слѣдующее:

Каковы-бы ни были постоянныя $p_{s\sigma}$, но если только они таковы, что наименьшее изъ чиселъ (2) есть нуль, функціи X_s всегда можно подбирать такъ, чтобы имѣла мѣсто устойчивость или неустойчивость, по желанію.

Что въ этомъ предположеніи названныя функціи всегда можно выбирать такъ, чтобы имѣла мѣсто неустойчивость, это выводится уже изъ нѣкоторыхъ результатовъ, находящихся въ моемъ сочиненіи, при томъ и непосредственно доказывается весьма легко. Мнѣ остается поэтому только показать, что если наименьшее изъ чиселъ (2) есть нуль, то всегда возможенъ и такой выборъ функцій X_s, при которомъ невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ.

Я разсмотрю сначала два частныхъ случая, для которыхъ числа (2) всѣ будутъ нулями.

Пусть система (1) имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= X_1,\\ \frac{dx_i}{dt} &= x_{i-1} + X_i\,.\\ &{\scriptstyle(i=2,\,3,\,\ldots,\,n)}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Разумѣя подъ $\varphi_1\,,\ \varphi_2\,,\ \ldots,\ \varphi_n$ функціи, опредѣляемыя послѣдовательно (для $s = n\,,\ n-1\,,\ \ldots\,,\ 2,\ 1$) изъ уравненій вида

$$\varphi_s = x_s^2 + \varphi_{s+1}^2$$

при условіи

$$\varphi_{n+1} = 0\,,$$

нетрудно убѣдиться, что если

[1]) *Общая задача объ устойчивости движенія*, стр. 86.

$$X_s = -2\,x_{s+1}\varphi_{s+1}, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

то функція φ_1 будетъ интеграломъ системы (3).

Но функція эта (непрерывная и однозначная) такова, что для вещественныхъ x_s можетъ обращаться въ нуль не иначе, какъ при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Поэтому при указанномъ выборѣ функцій X_s невозмущенное движеніе несомнѣнно будетъ устойчивымъ.

Я допускаю теперь, что система (1) есть четнаго порядка $n = 2m$ и имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\mu y_1 + X_1, & \frac{dy_1}{dt} &= \mu x_1 + Y_1, \\ \frac{dx_i}{dt} &= -\mu y_i + x_{i-1} + X_i, & \frac{dy_i}{dt} &= \mu x_i + y_{i-1} + Y_i, \\ & & & (i=2, 3, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

гдѣ y_s, Y_s суть новыя обозначенія величинъ x_{m+s}, X_{m+s}.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ суть функціи, опредѣляемыя послѣдовательно уравненіями вида

$$\varphi_s = x_s^2 + y_s^2 + \varphi_{s+1}^2$$

при условіи

$$\varphi_{m+1} = 0.$$

Тогда, если

$$X_s = -2\,x_{s+1}\varphi_{s+1}, \qquad Y_s = -2\,y_{s+1}\varphi_{s+1}, \qquad (s=1, 2, \ldots, m)$$

то функція φ_1 будетъ, какъ легко въ томъ убѣдиться, интеграломъ системы (4). А такъ какъ функція эта при вещественныхъ x_s, y_s можетъ уничтожаться только для

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0,$$

то подобно предыдущему должно заключить, что при указанномъ выборѣ функцій X_s, Y_s невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ.

Обращаясь теперь къ общему случаю, я замѣчаю. что каковы-бы ни были постоянныя $p_{s\sigma}$, всегда найдется линейная подстановка съ постоянными вещественными коэффиціентами, преобразовывающая систему (1) въ такую, которая распадется на группы уравненій, принадлежащія къ одному изъ двухъ слѣдующихъ типовъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -\lambda y_1 + Y_1,\\ \frac{dy_i}{dt} &= -\lambda y_i + y_{i-1} + Y_i,\\ &\scriptstyle (i=2,\,3,\,\ldots,\,k)\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \lambda y_1 - \mu z_1 + Y_1, & \frac{dz_1}{dt} &= \mu y_1 + \lambda z_1 + Z_1,\\ \frac{dy_i}{dt} &= -\lambda y_i - \mu z_i + z_{i-1} + Y_i, & \frac{dz_i}{dt} &= \mu y_i - \lambda z_i + z_{i-1} + Z_i\\ &\scriptstyle (i=2,\,3,\,\ldots,\,k)\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

гдѣ Y_s, Z_s означаютъ совокупности членовъ выше перваго измѣренія относительно неизвѣстныхъ функцій.

Здѣсь не исключается и случай $k=1$, когда группа вида (5) приводится къ одному первому уравненію, а группа вида (6) къ двумъ уравненіямъ первой строки.

Въ этихъ уравненіяхъ λ представляетъ одно изъ чиселъ (2).

Поэтому, если между послѣдними не находится отрицательныхъ, то чтобы невозмущенное движеніе сдѣлать устойчивымъ, стоитъ только во всѣхъ группахъ, для которыхъ $\lambda > 0$, а также въ тѣхъ, для которыхъ $k=1$. положить $Y_s = Z_s = 0$, и въ группахъ, для которыхъ $\lambda = 0$, $k > 1$, совокупности членовъ выше перваго измѣренія выбрать, какъ было показано въ двухъ разсмотрѣнныхъ сейчасъ частныхъ случаяхъ.

Такимъ образомъ необходимость указаннаго выше условія можетъ считаться доказанной.

Но условіе это, разумѣется, необходимо, только пока разсматриваются всякія системы вида (1). Если же желательно разсматривать лишь системы какого-либо опредѣленнаго типа, то оставаясь, конечно, достаточнымъ, оно можетъ не дѣлаться болѣе необходимымъ.

Такъ напримѣръ, если разсматривать только каноническія системы съ постоянными коэффицентами, то условіе это навѣрно не будетъ необходимымъ.

Пользуюсь случаемъ, чтобы исправить нѣкоторыя замѣченныя мною неточности въ текстѣ цитированнаго здѣсь сочиненія.

На стр. 6 заключительныя слова параграфа 2 „При этомъ условіи величины (4)...“ должны быть замѣнены слѣдующими:

„При этомъ условіи величины (4) могутъ играть такую же роль при рѣшеніи вопроса объ устойчивости, какъ и величины (3), если только заданіемъ величинъ (4) функціи x_s, удовлетворяющія уравненіямъ (1), опредѣляются вполнѣ. Это послѣднее условіе въ силу предположеній, которыя мы дѣлаемъ далѣе относительно уравненій (1) (пар. 4), всегда будетъ выполняться. Поэтому далѣе вмѣсто величинъ (3) будемъ разсматривать всегда величины (4)".

На стр. 15, вторая фраза параграфа 6 „Будемъ разсматривать функціи..." должна быть замѣнена слѣдующимъ:

„Будемъ разсматривать функціи вещественнаго перемѣннаго t, получающія вполнѣ опредѣленныя значенія для всякаго t, бо́льшаго нѣкотораго предѣла t_0 или равнаго ему. Будемъ при томъ разсматривать только такія функціи, для модулей которыхъ при измѣненіи t отъ t_0 до какого угодно даннаго числа T, бо́льшаго t_0, существовали бы высшіе предѣлы".

На той же стр. фраза „Разсматривая одновременно съ функціей x..." должна быть замѣнена слѣдующею:

„Разсматривая одновременно съ функціей x функцію $\frac{1}{x}$, будемъ предполагать, что при всякомъ данномъ T, бо́льшемъ t_0, въ промежуткѣ отъ t_0 до T точный низшій предѣлъ модуля функціи x отличенъ отъ нуля".

На стр. 132 (10 и 11 строки) фраза „и что каждое изъ послѣднихъ, если..." должна быть замѣнена слѣдующею:

„и что каждое изъ послѣднихъ, если для него $|c|$ достаточно мало, будетъ *по отношенію къ величинамъ* z, z_s устойчивымъ".

Для невозмущеннаго движенія (для котораго $c = 0$) задача объ устойчивости по отношенію къ величинамъ x, y, x_s не отличается въ сущности отъ задачи объ устойчивости по отношенію къ величинамъ z, z_s. Но для періодическихъ движеній, о которыхъ идетъ здѣсь рѣчь, эти двѣ задачи вообще различны.

Для этихъ движеній по отношенію къ величинамъ x, y, x_s вообще существуетъ только извѣстная условная устойчивость: они устойчивы для возмущеній, не мѣняющихъ постоянной величины интеграла (76). Безусловная же устойчивость по отношенію къ названнымъ величинамъ имѣетъ для нихъ мѣсто лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда періодъ T (стр. 122) не зависитъ отъ постояннаго c, т. е. когда всѣ числа h_j суть нули.

Чтобы доказать это, разсматриваемъ одно изъ періодическихъ движеній, соотвѣтствующее, допустимъ, уравненіямъ:

$$z = c, \qquad z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0, \tag{I}$$

$$\vartheta = \tau + \varphi_1 c + \varphi_2 c^2 + \ldots, \tag{II}$$

гдѣ

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T},$$

а φ_1, φ_2 и т. д. суть извѣстныя періодическія функціи τ (см. стр. 122).

Изъ соотношеній между перемѣнными x, y, x_s и z, ϑ, z_s (стр. 110 и 119) нетрудно заключить, что если c не нуль, задача объ устойчивости этого движенія по отношенію къ первымъ перемѣннымъ равносильна задачѣ объ устойчивости его по отношенію ко вторымъ. Поэтому, чтобы разсматриваемое движеніе, устойчивое по отношенію къ z, z_s, было устойчивымъ по отношенію къ x, y, x_s, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчивымъ по отношенію къ ϑ.

Замѣтивши это, означаемъ вторую часть уравненія (II) буквой ψ, и полагая

$$\vartheta = \psi + \zeta,$$

составляемъ дифференціальное уравненіе, которому будетъ удовлетворять ζ, въ предположеніи, что для всѣхъ возмущенныхъ движеній, съ которыми сравнивается разсматриваемое періодическое, постоянная величина интеграла (76) та же, что и для періодическаго.

Для всѣхъ этихъ движеній постоянное c въ уравненіи (66) будетъ тогда имѣть ту же величину, какъ и въ уравненіяхъ (I) и (II).

Поэтому, исключая z при помощи уравненія (66), получимъ для опредѣленія ζ уравненіе вида:

$$\frac{d\zeta}{dt} = Z(z_1, z_2, \ldots, z_n, \zeta, \psi), \tag{III}$$

вторая часть котораго будетъ уничтожаться при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$.

Здѣсь Z будетъ нѣкоторою голоморфною функціей величинъ z_1, z_2, $\ldots$, z_n, ζ, въ разложеніи которой коэффиціенты будутъ періодическими по отношенію къ ψ, и функція эта будетъ голоморфною въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ψ.

Мы замѣчаемъ теперь, что постоянное c всегда можно предположить настолько численно малымъ, чтобы характеристичныя числа функцій z_s (какъ функцій перемѣннаго ϑ), удовлетворяющихъ уравненіямъ (70), были всѣ положительными при всякихъ начальныхъ значеніяхъ этихъ функцій.

Допуская это, означимъ черезъ $\varkappa$ какое-либо положительное число, меньшее всѣхъ этихъ характеристичныхъ чиселъ.

Затѣмъ, принимая t_0 за начальное значеніе t, означимъ черезъ z_0 начальное значеніе функціи

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

Тогда, подставляя въ функцію Z вмѣсто величинъ z_s ихъ выраженія въ функціяхъ $\vartheta = \psi + \zeta$, обратимъ ее въ такую функцію τ, ζ и начальныхъ значеній величинъ z_s, которая при достаточно большомъ M будетъ удовлетворять неравенству

$$|Z| < M z_0 e^{-\varkappa\tau}$$

для всѣхъ значеній t, бо́льшихъ t_0, для всѣхъ значеній ζ, численно меньшихъ нѣкотораго предѣла l, и для всѣхъ численно достаточно малыхъ начальныхъ значеній функцій z_s.

Вслѣдствіе этого, означая черезъ ζ_0 начальное значеніе функціи ζ и предполагая $|\zeta_0|$ и z_0 достаточно малыми для того, чтобы выполнялось неравенство

$$|\zeta_0|+\frac{MT}{2\pi\varkappa}z_0<l,$$

изъ уравненія (III) выведемъ, что при всякомъ t, бо́льшемъ t_0, будетъ выполняться слѣдующее:

$$|\zeta|<|\zeta_0|+\frac{MT}{2\pi\varkappa}z_0(1-e^{-\varkappa\tau}).$$

Отсюда заключаемъ объ устойчивости нашего движенія по отношенію къ ζ или, что все равно,—по отношенію къ ϑ.

Этотъ выводъ полученъ въ предположеніи, что возмущенія не измѣняютъ величины интеграла (76).

Разсмотримъ теперь какія угодно возмущенія.

Пусть c_1 есть постоянное, входящее вмѣсто c въ уравненіе (66) для разсматриваемаго возмущеннаго движенія.

Пусть далѣе ψ_1 есть то, во что обращается ψ послѣ замѣны c на c_1.

Въ силу доказаннаго сейчасъ, для безусловной устойчивости нашего движенія по отношенію къ ϑ при $|c|$ достаточно маломъ, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы для всякаго даннаго положительнаго ε при c_1, достаточно близкомъ къ c, для всѣхъ значеній t, бо́льшихъ t_0, выполнялось неравенство

$$|\psi_1-\psi|<\varepsilon.$$

А этому условію, не предполагая $c_1=c$, очевидно, можно удовлетворить только въ случаѣ, когда T не зависитъ отъ c.

Указанная выше неточность, выразившаяся въ пропускѣ словъ „по отношенію къ величинамъ z, z_s“, повлекла за собою неправильныя обобщенія, встрѣчающіяся на стр. 145 (двѣ первыя строки) и 147 (примѣч.), гдѣ утверждается, что всѣ періодическія движенія, достаточно близкія къ невозмущенному, устойчивы. Такъ какъ здѣсь рѣчь идетъ объ устойчивости по отношенію къ величинамъ x, y, x_s и при томъ—объ устойчивости безусловной, то утверждать, что имѣетъ мѣсто устойчивость, вообще можно для одного только невозмущеннаго движенія.

30 августа 1892 г.

Способъ Гаусса для измѣренія фокусныхъ разстояній линзъ.

Г. В. Левицкаго.

§ 1.

Точное измѣреніе фокусныхъ разстояній линзъ оптическихъ инструментовъ играетъ нерѣдко весьма важную роль при работахъ съ этими послѣдними. Такъ напримѣръ, по извѣстной длинѣ фокуснаго разстоянія объектива и по разстоянію между нитями, простѣйшимъ и притомъ точнѣйшимъ образомъ получаются угловыя разстоянія нитей. Подобнымъ-же образомъ,—и нерѣдко даже съ еще большею точностью, чѣмъ для разстоянія нитей,—можетъ быть получена средняя угловая цѣна одного оборота микрометреннаго винта окулярныхъ микрометровъ.

Существуетъ множество способовъ и инструментовъ для опредѣленія фокусныхъ разстояній. Профессоръ Silvanus P. Thompson, въ рѣчи, читанной 27 ноября 1891 г. въ Society of Arts въ Лондонѣ [1]) насчитываетъ 20 такихъ способовъ, кромѣ того способа, который онъ самъ предлагаетъ. Но списокъ Томпсона далеко не полонъ. Въ немъ прежде всего не упомянутъ способъ, предложенный Гауссомъ въ его Dioptrische Untersuchungen, также способы: Моэссара (Ètudes des lentilles et objectifs photographiques, par Moëssard, 1889), Schröder'a (Die Elemente der photographischen Optik. 1891) и способъ Abbe, который описанъ въ статьѣ Czapski [2]), появившейся уже послѣ опубликованія упомянутой рѣчи Томпсона. Оставляя пока въ сторонѣ прежніе способы, разсмотримъ теперь вкратцѣ способы Томпсона и Аббе, какъ новѣйшіе и предложенные притомъ наиболѣе компетентными спеціалистами: Томпсонъ состоитъ директоромъ Technical College въ Finsbury, профессоръ-же Аббе принадлежитъ

[1]) Silvanus P. Thompson, Ueber die Messung von Linsen, Central-Zeitung für Optik und Mechanik. 1891, №№ 4, 5 и 6.

[2]) Mittheilungen aus der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena, Zeitschtift für Instrumentenkunde, 1892, pp. 185 и слѣд.

къ числу первыхъ современныхъ авторитетовъ по теорiи и устройству оптическихъ приборовъ.

При выборѣ конструкцiи прибора для измѣренiя фокусныхъ разстоянiй проф. Аббе имѣлъ въ виду три слѣдующихъ основныхъ положенiя для всякихъ измѣренiй помощью оптическихъ изображенiй.

1) Точныя измѣренiя не должны быть зависимы отъ опредѣленiя мѣстъ оптическихъ изображенiй.

2) Измѣренiя не должны зависѣть даже и не прямымъ образомъ отъ установки.

Пусть напримѣръ измѣряется величина $y' = PQ$ изображенiя предмета y, доставляемаго системой S и пусть $\delta x'$ будетъ погрѣшность установки, считаемая по оси системы. Тогда съ помощью измѣрительнаго прибора, дѣйствительно или виртуально находящагося въ перпендикулярной къ оси системы плоскости $P'Q'$, несовпадающей, вслѣдствiе неточности установки, съ плоскостью PQ, мы будемъ дѣлать наведенiе не на точку P, въ которой оканчивается длина изображенiя y', а на точку P', лежащую въ срединѣ круга разсѣянiя пучка лучей, идущихъ отъ оконечности предмета y. Обозначая уголъ, образуемый осью пучка съ осью системы, черезъ w и линейное увеличенiе $\frac{Y'}{Y}$ черезъ N, легко находимъ:

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta x' \, tgw}{Ny}.$$

3) Вслѣдствiе извѣстныхъ причинъ, конечныхъ размѣровъ изображенiя предметовъ не во всѣхъ частяхъ подобны самимъ предметамъ. Поэтому, при выводѣ фокусныхъ разстоянiй линзъ изъ измѣренiй размѣровъ доставляемыхъ ими изображенiй, искаженiе этихъ послѣднихъ должно быть принято во вниманiе или-же исключено какимъ-либо образомъ.

Фокометръ устроенный Аббе свободенъ отъ влiянiя трехъ перечисленныхъ сейчасъ поводовъ къ погрѣшностямъ измѣренiй, вслѣдствiе чего оказалось возможнымъ дать всему прибору небольшiе размѣры. По внѣшнему виду, фокометръ Аббе весьма сходенъ съ обыкновеннымъ микроскопомъ, отъ котораго отличается главнѣйшимъ образомъ лишь тѣмъ, что къ прибору присоединены двѣ раздѣленныя на мелкiя дѣленiя шкалы, находящiяся въ постоянномъ разстоянiи одна отъ другой на штативѣ прибора. Верхняя шкала соединена съ объектнымъ столомъ микроскопа и можетъ быть отодвигаема въ сторону для того, чтобы видѣть нижнюю шкалу, неподвижно прикрѣпленную къ стойкамъ стола. Верхняя пластинка стола сдѣлана подвижной и величина ея перемѣщенiй измѣряется микрометреннымъ винтомъ. Вмѣсто перемѣщенiя этой пластинки можно было-бы перемѣщать трубку микроскопа параллельно самой себѣ. Но съ технической стороны устройство перемѣщенія трубы представляетъ бо́льшія затрудненія, чѣмъ устройство перемѣщенія пластинки. Поэтому въ фокометрѣ небольшихъ размѣровъ, устроенномъ Аббе еще въ 1867, употреблена подвижная пластинка. Въ приборѣ-же, устраиваемомъ нынѣ для II-го отдѣленія physikalisch-technisches Reichsanstalt и предназначенномъ для измѣреній большихъ линзъ, сдѣлано будетъ приспособленіе для перемѣщенія трубы.

Для измѣренія фокуснаго разстоянія приборомъ Аббе нужно совершить слѣдующія операціи.

Устанавливаютъ микроскопъ на средній штрихъ верхней шкалы. Затѣмъ кладутъ на объектный столъ микроскопа изслѣдуемую линзу S, (простую или сложную) совмѣщая центръ ея съ визирной линіей микроскопа. Дѣйствуя микрометреннымъ винтомъ, перемѣщающимъ подвижную пластинку стола вмѣстѣ съ изслѣдуемой линзой, насколько дозволяютъ размѣры послѣдней, дѣлаютъ наведеніе микроскопа на крайній видимый приэтомъ штрихъ шкалы t и отчитываютъ показаніе микрометреннаго винта. Двигая потомъ микрометренный винтъ въ обратную сторону, наводятъ микроскопъ на другое крайнее дѣленіе шкалы t, симметричное съ первымъ относительно средняго ея дѣленія и снова отчитываютъ показаніе микрометреннаго винта. Означимъ черезъ y_1 разстояніе между крайними штрихами шкалы, на которые дѣлались наведенія и черезъ Y_1 длину соотвѣтствующаго перемѣщенія подвижной пластинки вмѣстѣ съ линзой. Отодвинувъ въ сторону шкалу t, дѣлаютъ двѣ такія-же установки на нижнюю шкалу T съ соотвѣтствующими отчетами микрометреннаго винта. Приэтомъ нужно бываетъ сдѣлать нѣсколько разъ перемѣну объективовъ микроскопа, для чего къ прибору присоединяется пять объективовъ съ различными фокусными разстояніями. Соотвѣтственно съ предъидущими обозначеніями, изъ наведеній на нижнюю шкалу получимъ величины y_2 и Y_2. Означимъ далѣе черезъ a разстояніе между раздѣленными поверхностями шкалъ t и T, тогда искомое фокусное разстояніе f линзы S найдется изъ выраженія:

$$f = \frac{a}{\dfrac{y_2}{Y_2} - \dfrac{y_1}{Y_1}}.$$

Отсюда погрѣшность df искомаго фокуснаго разстоянія, въ зависимости отъ погрѣшностей dy_1, dY_1, dy_2 и dY_2, будетъ:

$$\frac{df}{f} = \frac{da}{a} - \frac{f}{a}\frac{y_1}{Y_1}\left(\frac{dY_1}{Y_1} - \frac{dy_1}{y_1}\right) + \frac{f}{a}\frac{y_2}{Y_2}\left(\frac{dY_2}{Y_2} - \frac{dy_2}{y_2}\right).$$

Въ большинствѣ случаевъ множитель при $\frac{dY_1}{Y_1} - \frac{dy_1}{y_1}$ будетъ весьма мало отличаться отъ нуля, а множитель при $\frac{dY_2}{Y_2} - \frac{dy_2}{y_2}$ будетъ близокъ къ единицѣ. Поэтому предъидущему выраженію можно придать слѣдующій простой видъ:

$$\frac{df}{f} = \frac{da}{a} - \frac{dy_2}{y_2} + \frac{dY_2}{Y_2} + \frac{f}{a}\,\frac{dy_1}{Y_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

въ которомъ принятъ во вниманіе наибольшій изъ двухъ членовъ выраженія $\frac{dY_1}{Y_1} - \frac{dy_1}{y_1}$.

Czapski оцѣниваетъ слѣдующимъ образомъ величину отдѣльныхъ членовъ выраженія (a)

$\frac{da}{a}$ около 0.0001

$\frac{dy_2}{y_2}$ и $\frac{dY_2}{Y_2}$ „ 0.001

$\frac{dy_1}{Y_1}$ отъ 0.0002 до 0.0001.

Такимъ образомъ относительная погрѣшность при опредѣленіи фокусныхъ разстояній фокометромъ Аббе, при условіи, впрочемъ, весьма совершенной работы отдѣльныхъ частей прибора, не превзойдетъ чувствительнымъ образомъ величину 0.002.

Приборъ Томпсона представляется гораздо менѣе совершеннымъ по сравненію съ приборомъ Аббе и нельзя не согласиться съ мнѣніемъ Czapski, что существованіе послѣдняго прибора дѣлаетъ излишнимъ существованіе перваго. Самый-же способъ Томпсона, въ сущности, тожественъ съ способомъ Шрѳдера, изложеннымъ въ цитированномъ выше сочиненіи его: Die Elemente d. phot. Optik, pp. 163—165 и опубликованномъ еще до изданія этой книги въ журналѣ Фогеля. Для измѣренія фокусныхъ разстояній на приборѣ Томпсона опредѣляются положенія главныхъ фокусовъ изслѣдуемой линзы и положенія ея симметрическихъ (вторыхъ или отрицательныхъ главныхъ) плоскостей. Для этого опредѣляются положенія оптическихъ изображеній соотвѣтственно расположенныхъ предметовъ. Такимъ образомъ здѣсь нарушается первое основное требованіе для точнаго измѣренія, упомянутое нами выше. Приэтомъ, по отношенію къ опредѣленію положеній главныхъ фокусовъ, неточность можетъ еще замѣтнымъ образомъ увеличиться вслѣдствіе употребленія коллиматоровъ, вмѣсто безконечно удаленныхъ предметовъ. Употребленія коллиматоровъ представляетъ весьма значительныя удобства при различныхъ изслѣдованіяхъ инструментовъ, но ими не слѣдуетъ пользоваться для точнаго опредѣленія фокусныхъ разстояній такъ, какъ то дѣлаютъ Томпсонъ и Шрёдеръ или какъ Бергеръ [1]). Дѣйствительно, помимо трудности опредѣленія положенія оптическаго изображенія, въ разсматриваемомъ случаѣ положеніе это будетъ замѣтно не совпадать съ главнымъ фокусомъ изслѣдуемой линзы съ большимъ фокуснымъ разстояніемъ, при самой незначительной погрѣшности въ установкѣ сѣтки нитей коллиматора въ главномъ фокусѣ его объектива. Назовемъ черезъ ε разстояніе сѣтки нитей отъ этого фокуса, считая ε положительнымъ, если сѣтка нитей дальше отъ изслѣдуемой линзы, чѣмъ фокусъ окуляра коллиматора. Пусть далѣе F и f суть фокусныя разстоянія линзы и объектива коллиматора; тогда, пренебрегая разстояніемъ между этими послѣдними, по сравненію съ разстояніемъ объектива коллиматора до доставляемаго имъ изображенія нитей, мы найдемъ, что изображеніе тѣхъ-же нитей, послѣ прохожденія лучей черезъ изслѣдуемую линзу, получится не въ фокусѣ ея, а ближе къ ней на величину $\left(\frac{F}{f}\right)^2$ (съ точностью до величинъ 2-го порядка отъ малой дроби $\frac{\varepsilon}{f}$). При изслѣдованіи объективовъ астрономическихъ инструментовъ въ большинствѣ случаевъ мы будемъ имѣть $F > f$. Поэтому, при значительной величинѣ отношенія $\frac{F}{f}$, даже незначительная погрѣшность въ установкѣ нитей коллиматора можетъ дать замѣтную неточность въ опредѣленіи положенія фокуса линзы. Точная-же установка сѣтки нитей въ фокусѣ объектива, какъ извѣстно, достигается не легко [2]) и можетъ измѣняться съ измѣненіемъ температуры.

Приборъ, устроенный Томпсономъ, достаточенъ лишь для измѣренія фокусныхъ разстояній, не превосходящихъ приблизительно 150 mm. Устройство подобнаго-же прибора для измѣренія фокусныхъ разстояній даже небольшихъ астрономическихъ объективовъ стоило-бы очень дорого, для объективовъ-же значительныхъ размѣровъ приборъ Томпсона былъ бы вовсе не выполнимъ. Употребленіе-же его метода измѣренія фокусныхъ разстояній при другихъ, болѣе простыхъ, чѣмъ его фокометръ, приспособленіяхъ не представляетъ никакихъ выгодъ, по сравненію даже съ простѣйшими прежними способами.

---

[1]) Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1886, pp. 272 и слѣд.

[2]) Нѣкоторыя интересныя данныя по этому предмету см. въ статьѣ Förster'а: Ueber die Beleuchtung der Mikrometer-Einrichtungen etc., Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1881.

§ 2.

Такимъ образомъ изъ новѣйшихъ фокометровъ только приборъ Аббе можно считать устроеннымъ наиболѣе цѣлесообразно и безъ сомнѣнія онъ войдетъ во всеобщее употребленіе, не смотря на его, вѣроятно, довольно значительную стоимость. Однако и этотъ приборъ, повидимому, недостаточенъ для нѣкоторыхъ измѣреній, въ которыхъ встрѣчается надобность въ астрономической практикѣ. Въ самомъ дѣлѣ, выше мы видѣли, что погрѣшность измѣреній фокометромъ Аббе можетъ достигать до 0.002 измѣряемой величины. Повтореніе измѣреній при этомъ едва-ли можетъ доставить замѣтное увеличеніе точности средняго результата, такъ какъ при этомъ не будутъ исключаться неизбѣжныя, такъ называемыя постоянныя погрѣшности прибора, которыхъ относительныя величины полностью войдутъ въ выраженіе для $\frac{df}{f}$. Слѣдовательно даже самыя незначительныя постоянныя погрѣшности величинъ a, y_1, и т. д. при большихъ фокусныхъ разстояніяхъ, дадутъ болѣе или менѣе значительную абсолютную погрѣшность величины искомаго фокуснаго разстоянія. Кажется поэтому, что относительную погрѣшность измѣреній фокометромъ Аббе, даже и при нѣсколькихъ измѣреніяхъ одного и того же фокуснаго разстоянія, слѣдуетъ считать равной не менѣе 0.001 измѣряемой величины. Но для большинства астрономическихъ объективовъ эта точность почти равняется или даже меньше той, съ какой мы найдемъ ихъ фокусное разстояніе по способу Бесселя, пренебрегая вовсе разстояніемъ λ между главными точками. Какъ извѣстно, въ длинѣ фокуснаго разстоянія мы дѣлаемъ при этомъ погрѣшность, почти равную одной четверти λ. По вычисленію Гаусса [1]), для Кенигсбергскаго геліометра такая погрѣшность составляетъ около $\frac{1}{1300}$ его фокуснаго разстоянія. Для объективовъ инструментовъ Харьковковской астрономической обсерваторіи таже погрѣшность заключается въ предѣлахъ отъ 0.001 до 0.002 (послѣдняя величина для кометоискателя). Слѣдовательно фокометръ Аббе для астрономическихъ объективовъ не даетъ больше, чѣмъ можетъ дать способъ Бесселя, требующій лишь простыхъ и не дорогихъ приспособленій, по крайней мѣрѣ для линзъ не слишкомъ значительныхъ размѣровъ. Для послѣднихъ-же едвали впрочемъ и возможно примѣнять приборъ Аббе, тогда какъ опредѣленіе фокусныхъ разстояній по способу Бесселя и для нихъ потребовало-бы сравнительно не слишкомъ значительныхъ издержекъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, наконецъ, желательна большая точность, чѣмъ та, которую можетъ доставить, при какихъ бы то нибыло усло-

---

[1]) C. F. Gauss; Werke, Bnd. V, Dioptrische Untersuchungen. p. 270.

віяхъ, фокометръ Аббе. Обозначимъ черезъ r разстояніе между двумя какими нибудь мѣтками (двумя постоянными нитями или двумя положеніями подвижной нити и пр.) микрометреннаго аппарата, помѣщеннаго дѣйствительно или виртуально въ фокальной плоскости объектива; фокусное разстояніе объектива по прежнему обозначимъ черезъ f, тогда погрѣшность dx угловой цѣны разстоянія r въ зависимости отъ погрѣшностей dr и df найдемъ изъ выраженія:

$$dx = x\frac{dr}{r} - x\frac{df}{f}.$$

При значительной величинѣ x вліяніе погрѣшности $\frac{df}{f}$, равной 0.001, можетъ сдѣлаться уже чувствительнымъ. Уменьшенія величины $\frac{df}{f}$, по крайней мѣрѣ, до 0.0001, какъ мнѣ кажется, простѣйшимъ образомъ можно достигнуть, употребляя для измѣренія f тотъ же способъ Бесселя, но съ нѣкоторыми дополнительными операціями, которыя указаны Гауссомъ въ 18, 20 и 21 параграфахъ его Dioptrische Untersuchungen.

§ 3.

Обозначимъ, согласно съ Гауссомъ, черезъ λ разстояніе между главными точками оптической системы, черезъ c постоянное и большее $4f+\lambda$ разстояніе между предметомъ и его изображеніемъ, доставляемымъ системой въ двухъ ея положеніяхъ между предметомъ и изображеніемъ и черезъ $b'-b$ величину перемѣщенія системы въ направленіи ея оси между этими двумя ея положеніями. Тогда

$$f = \frac{1}{4}(c-\lambda) - \frac{(b'-b)}{4(c-\lambda)}(b'-b). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Для опредѣленія входящаго въ это выраженіе разстоянія между главными точками, нужно опредѣлить еще нѣкоторыя величины. Будемъ считать разстоянія по оси системы отъ нѣкоторой, находящейся на этой оси и неизмѣнно связанной съ системой, точки D. За эту точку для объективовъ выгодно принять точку пересѣченія оси съ плоскостью, соприкасающеюся съ наружнымъ краемъ оправы объектива. Назовемъ разстоянія, считаемыя положительными, отъ точки D до ея изображенія черезъ b'' и до главныхъ фокусовъ—черезъ p и q; тогда имѣемъ:

$$\lambda = b'' + \frac{[p-\sqrt{p(q-b'')}]}{p}[p-\sqrt{p(q-b'')}]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Величины p, q, f и λ связаны между собою зависимостью:

$$p+q=2f+\lambda, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

которая можетъ служить для контроля измѣреній.

Величина b'' будетъ для астрон. объективовъ всегда весьма мала по сравненію съ мало разнящимися между собою величинами p и q; слѣдовательно численное значеніе второго члена правой части выраженія для λ также будетъ очень мало и небольшія погрѣшности въ p и q не окажутъ замѣтнаго вліянія на точность опредѣленія λ. Поэтому можно ограничиться только приближеннымъ опредѣленіемъ величинъ p и q, не уменьшая этимъ точности опредѣленія λ и f.

Въ способѣ Гаусса непосредственно измѣряются слѣдующія величины: c, $b'-b$, b'', p и q, изъ которыхъ только длина c есть разстояніе между матеріальными точками: крестомъ нитей миры (предметъ) и крестомъ нитей, расположенныхъ въ фокусѣ окуляра, черезъ который разсматривается мира. Всѣ остальныя величины получаются черезъ опредѣленіе мѣстъ оптическихъ изображеній. Такимъ образомъ, способъ Гаусса, повидимому, погрѣшаетъ противъ перваго основнаго требованія Аббе для точныхъ измѣреній. Но легко видѣть, что въ данномъ случаѣ ошибки въ опредѣленіи мѣстъ оптическихъ изображеній въ выраженіи df помножаются на столь малые коэффиценты, что могутъ оказывать лишь самое незначительное вліяніе на результатъ. Дѣйствительно, если брать для c величины лишь немного превосходящія $4f$, то величина $b'-b$ будетъ мала по сравненію съ c. Такъ у Бесселя при опредѣленіи фокуснаго разстоянія Кенигбергскаго геліометра отношеніе $\dfrac{b'-b}{c}$ заключалось между предѣлами отъ 0.03 до 0.06 и слѣдовательно коэффиціентъ при $b'-b$ во второмъ членѣ правой части выраженія (1) мало отличался отъ 0.01. Почти столь-же малъ коэффиціентъ при весьма малой разности $p-\sqrt{p(q-b'')}$ во второмъ членѣ правой части выраженія (2). Для объективовъ инструментовъ Харьковск. астрономич. обсерваторіи этотъ множитель заключается между 0,01 и 0.02. Такимъ образомъ изъ четырехъ величинъ: $b'-b$, p, q и b'', только четвертая b'' входитъ въ выраженіе для f съ сравнительно большимъ коэффиціентомъ: $\dfrac{1}{4}$. Но величина b'' опредѣляется по положенію изображенія точки, лежащей почти на поверхности линзы, при чемъ погрѣшность установки на такую точку весьма мала.

На основаніи вышеизложеннаго, въ выраженіи для df нужно принять во вниманіе лишь слѣдующіе члены:

$$df=\frac{1}{4}(dc-d\lambda)-\frac{(b'-b)}{2(c-\lambda)}\,d(b'-b). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Для нахожденія $d\lambda$ изъ выраженія (2) обозначимъ для краткости $\frac{[p-\sqrt{p(q-b)}]^2}{p}$ черезъ m и замѣтимъ, что вмѣсто $d[p-\sqrt{p(q-b'')}]$ мы съ достаточнымъ приближеніемъ можемъ принять $\frac{dp-dq-db''}{2}$, тогда, пренебрегая также слишкомъ малымъ членомъ $\frac{m}{p}dp$, имѣемъ:

$$d\lambda = \left(1+\sqrt{\frac{m}{p}}\right)db'' + \sqrt{\frac{m}{p}}\,(dp-dq)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

Какъ мы видѣли выше, величина $\sqrt{\frac{m}{p}} = \frac{p-\sqrt{p(q-p)}}{p}$ не превосходитъ 0.02. Слѣдовательно, абсолютная погрѣшность фокуснаго разстоянія, зависящая отъ dp и dq не превзойдетъ 0.005 $(dp-dq)$.

Допустимъ слѣдующія, весьма значительныя погрѣшности въ измѣряемыхъ величинахъ: $d(b'-b) = 8$ mm., $dc = 0.3$ mm., $db'' = 0.1$ mm., $dp-dq = 8$ mm. Тогда при $\frac{b'-b}{c-\lambda} = 0.06$, *погрѣшность одного отдѣльнаго опредѣленія фокуснаго разстоянія, въ самомъ невыгодномъ случаѣ, составитъ нѣсколько меньше 0.4 миллиметра*, что для маленькаго объектива, съ фокуснымъ разстояніемъ всего въ 400 mm., равняется погрѣшности въ 0.001 измѣряемой величины. Но взятыя нами при этомъ величины погрѣшностей суть наибольшія, какія могутъ имѣть мѣсто при правильномъ производствѣ измѣреній и при *недостаточно при томъ совершенныхъ измѣрительныхъ приборахъ*. Повтореніемъ измѣреній легко, очевидно, достигнуть вѣроятной погрѣшности средняго результата равной всего только немногимъ сотымъ долямъ миллиметра.

§ 4.

Для опредѣленія фокусныхъ разстояній по разсмотрѣнному сейчасъ способу Гаусса, кромѣ измѣренія длины перемѣщенія линзы изъ одного ея положенія въ другое (при чемъ разстояніе между предметомъ и его изображеніемъ остается постояннымъ и немного большимъ, чѣмъ $4f+\lambda$) нужно еще сдѣлать три измѣренія для опредѣленія λ. Съ этою цѣлью наводятъ линзу на весьма удаленный предметъ; тогда, если разстояніе этого предмета отъ линзы можно считать безконечно большимъ, изображеніе его получится въ точкѣ F_1 (второй главный фокусъ линзы) и измѣренное разстояніе F_1-D (отъ неизмѣнно соединенной съ объективомъ точки D, положеніе которой указано выше) даетъ непосредственно q. Обернувъ линзу, мы получимъ изображеніе того-же предмета въ точкѣ F (первый главный фокусъ), разстояніе которой отъ точки D даетъ p. Для опредѣленія b'' нужно поступить слѣдующимъ образомъ. Опишемъ на плоскости окружность лишь немного большую окружности наружнаго конца оправы объектива и обозначимъ центръ окружности пересѣченіемъ двухъ тонкихъ линій. Положимъ на эту плоскость объективъ такъ, чтобы наружное кольцо оправы его было концентрично съ начерченной окружностью. Установимъ надъ объективомъ, на какой-либо прочной поддержкѣ, снабженный крестомъ нитей микроскопъ (отъ какого-нибудь астрономическаго угломѣрнаго инструмента), который можетъ быть передвигаемъ въ обоймицѣ вдоль своей оси, и сдѣлаемъ точное наведеніе креста нитей микроскопа на изображеніе точки пересѣченія начерченныхъ линій. Затѣмъ, принявъ объективъ, сдѣлаемъ снова точное наведеніе креста нитей на точку пересѣченія линій. Происходящее при этомъ перемѣщеніе микроскопа вдоль его оси, измѣренное какимъ-либо образомъ, и дастъ искомую величину b''.

Итакъ, измѣреніе фокусныхъ разстояній по способу Гаусса требуетъ, сравнительно весьма простыхъ приспособленій и безъ сомнѣнія способъ этотъ неоднократно примѣнялся на дѣлѣ. Случайно, однако, лично мнѣ не приходилось гдѣ-либо встрѣтить указанія на употребленіе этого способа. Весьма странно, что способъ Гаусса вовсе не упомянутъ въ довольно подробномъ спискѣ способовъ у Томпсона, о которомъ мы упоминали выше. Не находимъ мы также этого способа въ извѣстномъ практическомъ руководствѣ Glazebrook и Shaw [1]), не смотря на то, что способъ Гаусса особенно удобенъ для учебныхъ занятій въ лабораторіяхъ. У Heath, въ его A Treatise on geometrical optics, описаніе способа дано, но нѣтъ упоминанія о томъ, чтобы онъ кѣмъ-либо примѣнялся на дѣлѣ. Въ книгѣ Croullebois, Théorie élémentaire des lentilles épaisses, которая должна дать interprétation géométrique et exposition analytique de résultats de Gauss, способъ Гаусса вовсе не описанъ; точно также неупоминается объ немъ и въ новѣйшемъ изданіи (1889 г.) Lehrbuch der Optik, Barfuss'a. Въ прекрасномъ сочиненіи Steinheil и Voit, Handbuch der angewandten Optik (I Bnd., 1891 г.) о способѣ Гаусса упоминается лишь вскользь, при чемъ тотъ случай, который мы здѣсь разсматриваемъ (Гауссъ даетъ нѣсколько комбинацій формулъ для опредѣленія оптическихъ постоянныхъ системы линзъ), вовсе неупомянутъ. Schröder, въ своей книгѣ: Die Elemente der photographischen Optik, (1891) излагаетъ, какъ выше упомянуто, способъ, сходный съ способомъ Томпсона.

§ 5.

Весною прошлаго года въ астрономической обсерваторіи Харьковскаго университета произведено было нѣсколько пробныхъ измѣреній фо-

[1]) Einführung in das physikalische Prakticum, deutsch von Schlösser.

кусныхъ разстояній по описанному здѣсь способу Гаусса. Измѣренія эти были произведены съ помощью весьма грубыхъ приспособленій и имѣли цѣлью опредѣленіе наивыгоднѣйшаго вида, который слѣдовало бы придать прибору, предназначенному для измѣренія фокусныхъ разстояній по способу Гаусса со всею возможною степенью точности. Первоначально предполагалось устанавливать изслѣдуемый объективъ на металлическихъ салазкахъ съ приспособленіями для того, чтобы центръ изслѣдуемой линзы можно было-бы помѣстить на опредѣленной высотѣ надъ салазками. Для перемѣщенія салазокъ вдоль оси линзы предполагалось устроить металлическую-же постель, подобную постели токарнаго станка, длиною отъ 1 до $1^1/_2$ аршина. Но затѣмъ, изъ экономическихъ соображеній, салазки были устроены изъ дерева и для каждаго изъ предположенныхъ къ изслѣдованію объективовъ были выточены на токарномъ станкѣ деревянные-же полупатроны, которые помѣщались одинъ въ другой такъ, что при всякой величинѣ объектива центръ его находился приблизительно на одной и той-же постоянной высотѣ надъ салазками. Полупатроны эти прикрѣплялись къ салазкамъ такимъ образомъ, чтобы ось ихъ была возможно параллельна ребру углового вырѣза, сдѣланнаго на нижней поверхности салазокъ. Этимъ вырѣзомъ салазки накладывались на трехгранную призматическую деревянную постель. Постель эту сперва предполагалось сдѣлать изъ двухъ отдѣльныхъ кусковъ, длиною около двухъ саженей каждый, для того, чтобы устанавливать ихъ въ линію по обѣ стороны металлической постели. Но, по ошибкѣ столярнаго заведенія, постель сдѣлана была изъ трехъ частей: одна въ 2 и двѣ—въ одну сажень длиною. Верхнее ребро призматическихъ постелей немного срѣзано и представляетъ узкую плоскую поверхность, на которой укладывается раздѣленная стальная лента. Смотря по величинѣ объектива, употреблялась одна постель, или-же двѣ или всѣ три ея части соединялись вмѣстѣ помощью винтовъ и устанавливались на нѣсколькихъ штативахъ въ линію и притомъ горизонтально. На тѣ-же призматическія постели надѣвались и прикрѣплялись съ помощью винтовъ двѣ обоймицы со стойками: одна для миры, другая для окуляра. Мира состоитъ изъ короткаго цилиндра, внутри котораго, на особой діафрагмѣ, натянуты двѣ перекрестныя паутиновыя нити. Такія же нити натянуты и въ фокальной плоскости окуляра. Для медленнаго движенія салазокъ съ объективомъ на постель надѣвались еще 2 обоймицы съ винтами, помощью которыхъ, по закрѣпленіи одной изъ обоймицъ, можно было двигать салазки, упирая винтъ въ придѣланныя къ нимъ стальныя пластинки. Однако, при производствѣ измѣреній пришлось, къ сожалѣнію, отказаться отъ употребленія этихъ винтовъ и тѣмъ, конечно, значительно уменьшить точность установки. Салазки были сдѣланы слишкомъ тяжелыми и поверхность соприкосновенія ихъ съ постелью слишкомъ значительною. Вслѣдствіе происходящаго отъ этого значительнаго тренія салазокъ о постель, винтъ двигалъ салазки скачками, сперва ихъ немного приподнимая. Установка при этомъ становилась, понятно, невозможной; поэтому оставалось двигать салазки просто рукою, употребляя довольно значительное усиліе. Особенно трудно, конечно, было сдвигать салазки съ мѣста послѣ ихъ остановки, при чемъ салазки двигались сперва также скачкомъ. Далѣе, движеніе тяжелыхъ салазокъ по устроенной изъ тонкихъ сосновыхъ досокъ полой постели вызывало дрожаніе этой послѣдней, которое передавалось объективу черезъ салазки въ моментъ остановки этихъ послѣднихъ. Поэтому, наведеніе окуляра на изображеніе, представляемое объективомъ, возможно было дѣлать только во время движенія послѣдняго. Наведенія производились такимъ образомъ, что одинъ изъ наблюдателей смотрѣлъ въ окуляръ, другой-же двигалъ салазки, не останавливаясь до тѣхъ поръ, пока первый не замѣчалъ несомнѣннаго ухудшенія ясности изображенія. Тогда салазки перемѣщались вторымъ наблюдателемъ въ обратную сторону, пока первый наблюдатель не подавалъ ему сигнала остановиться. Очевидно, что при такомъ способѣ установки окуляра на оптическія изображенія могли происходить весьма значительныя погрѣшности.

Опредѣленіе разстояній, какъ между крестами нитей миры и окуляра, такъ и между различными положеніями объектива и проч. производились на стальной 10 саженной лентѣ, которая натягивалась на срѣзанной верхней грани призматической постели и закрѣплялась по концамъ ея зажимами. Натяженіе производилось отъ руки, безъ помощи динамометровъ или груза, при чемъ, при различныхъ измѣреніяхъ, лента многократно перетягивалась, чтобы получать измѣренія на различныхъ частяхъ ленты и при нѣсколько различныхъ натяженіяхъ.

Предварительными измѣреніями были опредѣлены разстоянія, считаемыя по линіямъ, параллельнымъ ребрамъ призмы постели, отъ крестовъ нитей миры и окуляра до перпендикуляровъ, опущенныхъ, вдоль концевъ трубокъ ихъ заключающихъ, на срѣзанную грань постели. Подобнымъ-же образомъ измѣрены были разстоянія отъ нѣкоторой опредѣленной и перпендикулярной къ ребру постели линіи по срединѣ салазокъ до перпендикуляровъ, возставленныхъ у краевъ салазокъ къ той-же срѣзанной грани. Затѣмъ, для каждаго объектива, послѣ установки его въ полупатронъ, оставалось сдѣлать измѣреніе отъ плоскости D, прикасающейся къ наружному краю оправы объектива, до упомянутой выше линіи въ срединѣ салазокъ. Зная эти постоянныя величины для миры, окуляра и салазокъ, положеніе крестовъ нитей миры и окуляра и плоскости D относительно мѣрной стальной ленты можно было опредѣлить достаточно надежно съ помощью простого столярнаго угольника. Одна сторона употребленнаго нами угольника сдѣлана изъ полосовой стали, другая изъ дерева, окованнаго внизу мѣдной пластинкой. Пластинка эта выдается на нѣсколько сантиметровъ за дерево. По краямъ сдѣланнаго въ этомъ мѣдномъ придаткѣ прорѣза нанесены нѣсколько равноотстоящихъ дѣленій. Предварительными измѣреніями было опредѣлено разстояніе отъ одного изъ нихъ до вершины угла угольника, т. е. опредѣлена постоянная величина для послѣдняго. Отчеты ленты, раздѣленной на тысячныя доли сажени, по чертамъ на мѣдной пластинкѣ угольника, производились, опредѣляя на глазъ положеніе черты между штрихами ленты, до одной десятитысячной доли сажени. Для увеличенія точности отчета, а также для ослабленія вліянія случайныхъ, довольно значительныхъ, погрѣшностей дѣленій ленты, отчитывалось положеніе шести чертъ угольника, симметрично расположенныхъ по обѣ стороны отъ основной. Впрочемъ, такіе 6 отчетовъ дѣлались только при опредѣленіи положенія крестовъ нитей миры и окуляра. При объективѣ достаточно было дѣлать лишь два отчета.

Лента, употребленная для измѣренія разстоянія, была дешевая лента фабричнаго производства. Она была сравнена съ принадлежащимъ физическому кабинету университета метромъ Дюмуленъ-Фромана. Натяженіе ленты при сравненіи производилось также отъ руки, при чемъ повторенныя сравненія дали удовлетворительное согласіе. Погрѣшности ленты оказались довольно значительными и измѣняющимися при томъ скачками.

Для опредѣленія величинъ p и q, у одного изъ концовъ призматической постели устанавливался какой нибудь изъ переносныхъ астрономическихъ инструментовъ, труба котораго служила коллиматоромъ, для чего передъ окуляромъ ея, закрытымъ промасленной бумагой, ставилась ручная масляннная лампочка. Установивъ ось коллиматора достаточно параллельно ребру постели, производилось перемѣщеніе изслѣдуемаго объектива до тѣхъ поръ, пока въ окулярѣ, предварительно установленномъ, конечно, относительно креста своихъ нитей, получалось достаточно отчетливое изображеніе сѣтки нитей коллиматора. Разность отчетовъ ленты у салазокъ объектива и у окуляра, съ прибавленіемъ соотвѣтствующихъ постоянныхъ, давала величину p. При этомъ, конечно, входила погрѣшность, зависящая отъ не вполнѣ точной установки коллиматора на безконечно-большое разстояніе, но погрѣшность эта была, во всякомъ случаѣ, невелика и притомъ, какъ мы видѣли выше, даже и довольно значительныя погрѣшности въ p и q даютъ лишь небольшія погрѣшности въ f. Для опредѣленія q, салазки вмѣстѣ съ линзой переставлялись на постели такъ, чтобы къ коллиматору была обращена другая поверхность объектива, чѣмъ прежде. Затѣмъ опредѣленіе производилось также, какъ и для p.

По окончаніи опредѣленій p и q, коллиматоръ снимался и мира освѣщалась той-же лампочкой, при чемъ свѣтъ ея ослаблялся еще поставленной передъ ней промасленной бумагой. Окуляръ устанавливался отъ миры въ разстоянiи превосходящемъ $4f + \lambda$ и производился рядъ опредѣленiй перемѣщенiй объектива, какъ и въ способѣ Бесселя, измѣняя при томъ въ различныхъ опытахъ разстоянiя между мирой и окуляромъ и перемѣщая ленту для возможнаго исключенiя погрѣшностей послѣдней.

Для опредѣленiя величины b'' употреблялся микроскопъ отъ дѣлительной машины Ваншафа. На столѣ машины, на кускѣ бѣлой бумаги, чертился кругъ и обозначался его центръ, а затѣмъ опредѣленiе величины b'' производилось такимъ образомъ, какъ указано выше. Перемѣщенiе микроскопа въ его обоймицѣ измѣрялось слѣдующимъ образомъ. При каждомъ наведенiи микроскопа, на трубкѣ его, у края обоймицы, проводилась остріемъ ножа черта [1]). Разстоянiе между чертами переносилось затѣмъ помощью циркуля на метръ Дюмуленъ-Фромана и опредѣлялось на глазъ до десятыхъ долей миллиметра. Конечно, такое измѣренiе было слишкомъ грубо и допустимо только въ опредѣленiяхъ, производимыхъ въ видѣ опыта. Тѣмъ не менѣе, согласiе отдѣльныхъ опредѣленiй b'' было довольно удовлетворительнымъ, за вычетомъ объектива универсальн. инстр. Ваншаффа, котораго слишкомъ длинная оправа мѣшала хорошо освѣтить мѣтку на бумагѣ. Также довольно большiя уклоненiя встрѣтились при опредѣленiи b'' для объектива меридiаннаго круга, такъ какъ для него ручка обоймицы оказалась слишкомъ короткой, такъ что пришлось привязать ее къ добавочной ручкѣ, что въ одно изъ измѣренiй сдѣлано было не достаточно надежно и обоймица качалась вмѣстѣ съ микроскопомъ при движенiи послѣдняго.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены отдѣльные результаты измѣренiя величины b'' для объективовъ инструментовъ, находящихся въ Харьковской астрономической обсерваторiи.

Названiе инструментовъ.	b''.						
Теодолитъ Брауэра, принадлеж. Военно-Топограф. Отд. Главн. Штаба	mm. 3.2	mm. 3.3	mm. 3.35	mm. 3.28			
Вертик. кругъ Репсольда . . .	3.2	3.25	3.25	3.23			
Малый пассажн. инстр. Эртеля .	2.9	3.0	3.0	2.7			
3-хъ дюйм. рефракторъ	5.3	5.4	5.5	5.4			
Кометоискатель	5.8	5.85	5.8	5.82			
Универс. инстр. Ваншаффа . .	3.7	3.7	3.25	3.4	3.2	3.3	3.8
Меридiанный кругъ	9.7	9.55	9.85	9.72	9.68	9.45	
Шестидюймовый рефракторъ . .	9.4	9.47	9.5	9.3	9.3		

[1]) Иногда разомъ проводилось двѣ или больше чертъ для исключенiя неровностей краевъ обоймицы.

Очевидно, что, устроивъ приспособленіе на микроскопѣ для измѣренія его перемѣщеній и визируя на мѣтку, сдѣланную напр. на ровной поверхности матоваго стекла, а не на шероховатой бумагѣ, лежащей на негладкой доскѣ стола, величину b'' легко получить съ погрѣшностью въ немногія сотыя доли миллиметра.

Такимъ образомъ, по указанному Гауссомъ и, повидимому, до сихъ поръ еще рѣдко примѣнявшемуся способу, опредѣленіе разстоянія между главными точками оптической системы можетъ быть произведено весьма просто и съ весьма высокою при томъ степенью точности.

§ 6.

Этимъ замѣчаніемъ я могъ-бы и ограничиться въ изложеніи произведенныхъ мною опытовъ опредѣленія фокусныхъ разстояній по способу Гаусса, такъ какъ высокая степень согласія отдѣльныхъ результатовъ опредѣленія фокуснаго разстоянія, при извѣстной или предполагаемой извѣстною величинѣ λ, указаннымъ выше образомъ, достаточно доказываются извѣстными измѣреніями Бесселя [1]). Я позволю себѣ, однако, привести здѣсь нѣкоторые результаты сдѣланныхъ мною весною прошлаго года вмѣстѣ съ г. Евдокимовымъ и съ помощью г. Сикора измѣреній для сужденія о томъ, какая точность можетъ быть достигнута разсматриваемымъ способомъ даже при тѣхъ весьма невыгодныхъ условіяхъ, которыя указаны раньше. Я ограничусь при этомъ только числами, относящимися къ тѣмъ тремъ объективамъ, для каждаго изъ которыхъ было сдѣлано значительное число опредѣленій. Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены такія числа (въ саженяхъ) для объективовъ: меридіаннаго круга, теодолита Брауэра (принадлежащаго Военно-Топографическому Отдѣлу Главнаго Штаба) и универсальнаго инструмента Ваншаффа.

Вліяніе температуры на величины фокуснаго разстоянія во вниманіе при этомъ не было принято, такъ какъ оно не могло составить болѣе 1 — 2 единицъ послѣдняго десятичнаго знака. Фокусное разстояніе объектива меридіаннаго круга измѣрено было въ два вечера при почти одинаковыхъ температурахъ. Различіе-же температуръ при различныхъ измѣреніяхъ остальныхъ двухъ фокусныхъ разстояній, вслѣдствіе малости послѣднихъ, не могло дать погрѣшностей большихъ, чѣмъ сейчасъ указано.

---

[1]) Abhandlungen von F. W. Bessel, Bd. II, p. 108.

Объект. меридіан. круга.	Объект. теод. Брауэра.	Объект. универсальн. инстр. Ваншаффа.
$f = 0^{c}.90441$:	$0^{c}.20372$	$0^{c}.30167$
26	79	65
27	83	58
37	84	59
40:	72	70
32:	84	59
25	93	64
35	86	67
24	84	83
19	95	74
	82	60
	75	80
	78	67
	74	60
	82	70
	70	69
	68::	67
	87	65
	78	80
		78
		75

Объект. меридіан. круга:

Сред. вел. $f = 0^{c}.90431$

Средн. погрѣш. результата ± 0.000024

„ „ одного измѣр. ± 0.000075

Объект. теод. Брауэра:

Сред. велич. $f = 0^{c}.20380$

Сред. погрѣш. результата ± 0.000017

„ „ одного изм. ± 0.000074

Объект. универсальн. инстр. Ваншаффа:

Ср. вел. $f = 0^{c}.30169$

Сред. погрѣш. результата ± 0.000016

„ „ одного изм. ± 0.000075

Въ среднихъ результатахъ этихъ опредѣленій можетъ еще заключаться небольшая, не превосходящая 0.025 миллиметра, погрѣшность, зависящая отъ неточности измѣренія величины b''. Но, какъ упомянуто выше, эту погрѣшность легко сдѣлать, помощію нѣкоторыхъ простыхъ приспособленій, меньшей 0.01 миллиметра.

Припоминая съ какими грубыми инструментальными средствами и съ ненадежной притомъ мѣрной лентой получены приведенные сейчасъ результаты опредѣленій фокусныхъ разстояній, нельзя не признать согласіе отдѣльныхъ измѣреній весьма удовлетворительнымъ. Средняя погрѣшность одного измѣренія фокуснаго разстоянія для всѣхъ трехъ объективовъ получается очень согласно равной $0^{c}.000075$, т. е. почти вдвое больше такой-же ошибки въ измѣреніяхъ Бесселя (0.04 линіи). Одинаковость средней погрѣшности для фокусныхъ разстояній различной длины очевидно не случайна и указываетъ достаточно надежно на степень точности измѣреній. Замѣтимъ далѣе, что, какъ и слѣдовало ожидать, для объективовъ съ короткимъ фокуснымъ разстояніемъ можно измѣнять при измѣреніяхъ величину $\frac{b'-b}{c-\lambda}$, безъ измѣненія точности результатовъ, въ значительно болѣе широкихъ предѣлахъ, чѣмъ для длинно-фокусныхъ объективовъ. Такъ въ приведенныхъ выше измѣреніяхъ для объектива В. Т. О. предѣлы измѣненія величинъ $b'-b$ и $\frac{b'-b}{c-\lambda}$ были: $0^{c}.028$—$0^{c}.288$ и 0.035—0.318; для объектива ун. инст. Ванш. тѣже предѣлы суть: $0^{c}.025$—$0^{c}.173$ и 0.020—0.140. Для объектива-же меридіаннаго круга эти предѣлы значительно тѣснѣе, именно: $0^{c}.077$—$0^{c}.217$ и 0.021—0.060.

И такъ, измѣренія фокусныхъ разстояній по способу Гаусса, даже при самыхъ простыхъ и грубыхъ приспособленіяхъ, даютъ результаты съ очень малой абсолютной погрѣшностью. Относительная погрѣшность также будетъ, конечно, очень не велика. Такъ, для разсматриваемыхъ трехъ объективовъ отношенія с. п. средняго результата и отдѣльнаго опредѣленія къ фокусному разстоянію имѣютъ слѣдующія величины.

Об. Мер. Кр.	Об. теод. В. Т. О.	Об. ун. ин. Ван.
0.00003	0.00008	0.00005
0.00008	0.00036	0.00024.

Слѣдовательно, даже относительная погрѣшность одного отдѣльнаго опредѣленія, въ самомъ невыгодномъ случаѣ не достигаетъ до $\frac{1}{2500}$.

23 Февраля, 1893 г.

Списокъ трудовъ
Академика В. Г. Имшенецкаго [1]).

1. „О разложеніи въ безконечные ряды множителей функцій: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{csh} x$, и проч.". Кандидатская диссертація, удостоенная награжденія золотою медалью.—Напечатана не была.

2. „О функціяхъ равносторонней гиперболы и круга". Казань, 1863, in 8⁰, 19 стр. — Напечатано въ „Ученыхъ запискахъ Казанскаго университета" за 1862 г., вып. 2-й.

3. „Способъ трилинейныхъ координатъ въ примѣненіи къ точкѣ и прямой линіи". Казань, 1863, in 8⁰, 25 стр.—Напечатано въ „Ученыхъ запискахъ Казанскаго университета" за 1862 г., вып. 2-й.

4. „Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка". Разсужденіе, написанное для полученія степени магистра чистой математики. Казань, 1865, in 8⁰, IV+172 стр. — Напечатано въ „Ученыхъ запискахъ Казанскаго университета" за 1864 г., вып. 2-й, стр. 1—172.

5. „Конечное интегрированіе одного вида уравненій съ частными производными посредствомъ введенія канонической системы перемѣнныхъ". Казань, 1866, in 8⁰, 10 стр.—Напечатано въ „Ученыхъ запискахъ Казанскаго университета" за 1866 г., томъ II, стр. 5—14.

6. „Изслѣдованіе способовъ интегрированія уравненій съ частными производными второго порядка функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ". Казань, 1868, in 8⁰, 160 стр. — Напечатано въ „Ученыхъ запискахъ Казанскаго университета" за 1868 г., томъ IV, вып. 3-й и 4-й, стр. 111—264.

---

[1]) Въ слѣдующемъ томѣ „Сообщеній Х. М. О." будетъ помѣщенъ болѣе подробный обзоръ дѣятельности В. Г. Имшенецкаго. Публикуя предварительно настоящій списокъ, мы покорнѣйше просимъ лицъ, знакомыхъ съ трудами покойнаго ученаго, сообщить намъ свои замѣчанія и исправленія, если они найдутъ этотъ списокъ неполнымъ или не точнымъ. *К. Андреевъ.*

7. „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre". Traduit du russe par J. Hoüel. Paris, 1869, in 8⁰., 197 стр.— Напечатано въ „Archiv der Mathematik und Physik" v. J. A. Grunert, t. L, 1869, p. 278—474.

8. „О функціяхъ Я. Бернулли и выраженіи разности между однопредѣльными суммою и интеграломъ". Казань, 1872, in 8⁰, 22 стр.— Напечатано въ „Ученыхъ запискахъ Казанскаго универ." за 1870 г., вып. 3-й и 4-й, стр. 245—265.

9. „Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes". Traduit du russe par J. Hoüel.—Greifswald, 1872, in 8⁰, 152 p.— Напечатано въ „Archiv der Mathematik und Physik" v. J. A. Grunert, t. LIV, 1872, p. 209—360 [1]).

10. „Дифференціальное вычисленіе съ собраніемъ примѣровъ для упражненій И. Тотгёнтера. — Переведено съ англійскаго и дополнено приложеніями къ геометріи пространства трехъ измѣреній". С.-Петербургъ, 1873, in 8⁰, XIV + 468 + 112 стр.

11. „Note sur le rapport anharmonique du plan de courbure C en un point quelconque P d'une ligne L d'intersection des deux surfaces quelconques S_1 et S_2, des plans tangents A et B à ces surfaces en ce même point P, et du plan D mené par l'intersection des plans A, B, C". Bruxelles (Liége) 1873, in 8⁰, 5 p. — Напечатано въ „Mémoires de la Séocité Royale des sciences de Liége". 2-e série, t. V, 1873.

12. „Общій способъ интегрированія двухъ совмѣстныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка двухъ функцій отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ". Москва, 1874, in 8⁰, 9 стр. — Напечатано въ „Математическомъ Сборн.", т. VII, вып. 2-й, 1874, стр. 206—214.

13. „Интегрированіе одной системы уравненій". Москва, 1876, in 8⁰, 23 стр.—Напечатано въ „Математическомъ Сборникѣ". т. VIII, вып. 2-й, стр. 254—276.

14. „Application des expressions complexes imaginaires à la formation de certains systèmes complètement intégrables d'équations canoniques et d'équations aux dérivées partielles". Paris, 1876, in 8⁰, 22 p. — Напечатано въ „Bulletin des sciences math. et astr. rédigé par Darboux et Hoüel, t. XI, 1876, p. 162—183.

15. „Note sur les équations aux dérivées partielles". Liége, 1878, in 8⁰.—Напечатано въ „Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége". 2-e série, t. VII, 1878.

---

[1]) Переводъ этого сочиненія на нѣмецкій языкъ изданъ г. Maser'омъ, 20 лѣтъ спустя, въ видѣ приложенія къ книгѣ: „Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung v. Dr. Paul Mansion". Berlin, 1892.

16. „Опредѣленіе силы, движущей по коническому сѣченію матеріальную точку въ функціи ея координатъ". Харьковъ, 1879, in 8^0, 11 стр.— Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества" за 1879 г., вып. 1-й, стр. 5—15, (1-я серія).

17. „Задача: раздѣлить площадь данной трапеціи на n равно-великихъ частей прямыми, параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ". Харьковъ, 1879, in 8^0, 7 стр. — Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьк. Математ. Общ." за 1879 г., вып. 1-й, стр. 25—31, (1-я серія).

18. „Каноническія дифференціальныя уравненія гибкой нерастяжимой нити и брахистохроны въ случаѣ потенціальныхъ силъ". Харьковъ, 1880, in 8^0, 38 стр. — Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьк. Математ. Общества" за 1880 г., вып. 1-й, стр. 18—33 и 53—74, (1-я серія).

19. „Линейныя дифференціальныя уравненія 2-го порядка, интегрируемыя посредствомъ множителя (по поводу сообщенія г. Грендоржа)". Харьковъ, 1880, in 8^0, 5 стр. — Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьк. Матем. Общества" за 1880 г., вып. 1-й, стр. 48—52, (1-я серія).

20. „Détermination en fonction des coordonnées de la force qui fait mouvoir un point matériel sur une section conique". Bordeaux, 1880, in 8^0, 10 p.—Напечатано въ „Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux", t. IV, (2-e série), 1 cahier, p. 31—40.

21. „Начала Евклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіями орд. проф. М. Е. Ващенко-Захарченко", (извлеченіе изъ рецензіи J. Hoüel'я). Харьковъ, 1881, in 8^0, 7 стр.—Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьк. Матем. Общ." за 1880 г., вып. 2-й, стр. 129—135, (1-я серія).

22. „Sur le multiplicateur des équations différentielles linéaires du 2-e ordre" (à propos d'une note de M. J. Graindorge). Bruxelles, 1881, in 8^0, 5 p.—Напечатано въ „Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége", 2-e série, t. IX.

23. „Замѣтка о функціяхъ комплекснаго перемѣннаго". Харьковъ, 1881, in 8^0, 15 стр. — Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьк. Математ. Общества" за 1880 г., вып. 2-й, стр. 173—187, (1-я серія).

24. „Замѣна перемѣнныхъ, какъ способъ для разысканія интегрирующаго множителя дифференціальнаго уравненія и какъ средство для пониженія порядка системы дифференціальныхъ уравненій". Харьковъ, 1882, in 8^0, 17 стр.—Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьковск. Матем. Общества" за 1881 г., вып. 1-й, стр. 3—19, (1-я серія) [1]).

25. „Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера для изслѣдованія всѣхъ случаевъ интегрируемости одного частнаго ви-

---

[1]) Эта статья представляетъ извлеченіе изъ переписки В. Г. Имшенецкаго съ проф. университета Св. Владиміра В. П. Ермаковымъ и хотя публикована отъ имени послѣдняго, но тѣмъ не менѣе изъ содержанія ея видно, что это есть изслѣдованіе, произведенное одновременно обоими учеными. Безъ указанія на это изслѣдованіе списокъ трудовъ покойнаго В. Г. Имшенецкаго былъ-бы не полонъ. *К. А.*

да линейныхъ уравненій второго порядка". С.-Петербургъ, 1882, in 8^0, 21 стр.—Напечатано въ „Запискахъ Императорской Академіи Наукъ", т. XLII, стр. 1—21.

26. „О неравенствахъ, ограничивающихъ величину опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій". Харьковъ, 1883, in 8^0, 11 стр.—Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьк. Матем. Общ." за 1882 г., вып. 2-й, стр. 99—109, (1-я серія).

27. „Къ воспоминанію объ А. Ѳ. Поповѣ". Казань, 1883, in 8^0, 5 стр. —Напечатано въ „Протоколахъ Физико-Математической секціи Общества естествоиспытателей" при Казанскомъ университетѣ.

28. „Sur la généralisation des fonctions de Jacques Bernoulli". St.-Pétersbourg, 1883, in 4^0, 57 p.—Напечатано въ „Memoires de l'Académie Imp. des sciences de St.-Pet." VII série, t. XXXI, № 11.

29. „О связи основныхъ свойствъ эллиптическихъ интеграловъ и функцій со свойствами эллипса и нѣкоторыхъ его преобразованій". С.-Петербургъ, 1884, in 8^0, 43 стр.—Напечатано въ „Запискахъ Имп. Академіи Наукъ". т. XLVIII, прилож. № 5.

30. „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ общихъ функцій Бернулли". С.-Петербургъ, 1886, in 8^0, 62 стр.—Напечатано въ „Запискахъ Имп. Академіи Наукъ". т. LII, прилож. № 2.

31. „Sur la transformation d'une équation différentielle de l'ordre pair à la forme d'une équation isopérimétrique". St.-Petersbourg, 1886, in 8^0, 14 p. — Напечатано въ „Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St.-Pet." t. XXXI, p. 283—292.

32. „Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами". С.-Петербургъ, 1887, in 8^0, 55 стр.—Напечатано въ „Запискахъ Имп. Академіи Наукъ". т. LV, прилож. № 9.

33. „Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами". С.-Петербургъ, 1888, in 8^0, 28 стр.—Напечатано въ „Запискахъ Имп. Акад. Наукъ". т. LVIII, стр. 1—28.

34. „Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей". Харьковъ, 1888, in 8^0, 6 стр.—Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьк. Матем. Общества". 2-я серія, т. I, вып. 1-й, стр. 1—6.

35. „Mémoire sur l'intégration des équations différentielles symétriques". St.-Pétersbourg, 1889, in 4^0, 38 p.—Напечатано въ „Mémoires de l'Académie Imp. des sciences de St.-Pet.", VII série, t. XXXVII, № 1.

36. „Замѣтка о геометрическомъ значеніи формулы Эйлера для приближеннаго вычисленія квадратуръ". С.-Петербургъ, 1890, in 8^0, 8 стр.—Напечатано въ „Запискахъ Императорской Академіи Наукъ". т. LXII, стр. 45—52.

37. „Новое аналитическое доказательство параллелограмма силъ". Харьковъ, 1890, in 8^0, 6 стр. — Напечатано въ „Сообщеніяхъ Харьк. Матем. Общества". 2-я серія, т. II, вып. 3-й, стр. 108—113.

38. „О нѣкоторыхъ случаяхъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій помощію подстановки, подобной той, которая употребляется при интегрированіи уравненій въ частныхъ производныхъ". (Сообщеніе на VIII съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ 5-го января 1890 года).—Напечатано въ „Трудахъ съѣзда", отд. I, стр 47—53.

39. „Замѣтка о дифференціальныхъ линейныхъ уравненіяхъ, интегрируемыхъ посредствомъ общихъ гиперболическихъ синусовъ". Москва, 1891, in 8^0, 9 стр. — Напечатано въ „Математическомъ Сборникѣ", т. XVI, вып. 1-й, стр. 177—185.

40. „Интегрированіе линейныхъ однородныхъ уравненій посредствомъ частныхъ рѣшеній другихъ уравненій того же вида и порядка равнаго или меньшаго". С.-Петербургъ, 1891, in 8^0, 47 стр.—Напечатано въ „Запискахъ Имп. Академіи Наукъ", т. LXIV, прилож. № 8.

41. „Рѣшеніе уравненій четвертой степени на основаніи симметричнаго омографическаго соотношенія, существующаго между его корнями". Харьковъ, 1893, in 8^0, 6 стр.—Напечатано (послѣ смерти автора) въ „Сообщеніяхъ Харьк. Мат. Общ.", 2-я серія, т. III, стр. 257—262.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 1-го Февраля 1891 года.

1. Предсѣдатель довелъ до свѣдѣнія членовъ Общества объ утратѣ, понесенной наукою въ лицѣ Софьи Васильевны Ковалевской, бывшей въ послѣдніе годы своей жизни профессоромъ университета въ Стокгольмѣ. При этомъ присутствующіе выразили свое почтеніе къ памяти покойной, вставши съ своихъ мѣстъ.

2. Доложено, что отдѣленіе физико-математическихъ наукъ Общества любителей естествознанія въ Москвѣ, приславъ III-й томъ своихъ трудовъ, предлагаетъ вступить съ нимъ въ обмѣнъ изданій.—Постановили благодарить и принять предложеніе.

3. Доложено предложеніе почетнаго члена Общества академика В. Г. Имшенецкаго высылать „Сообщенія Х. М. О." въ библіотеку высшихъ женскихъ курсовъ въ С.-Петербургѣ. — Постановили выслать всѣ вышедшіе выпуски „Сообщеній" и продолжать высылать слѣдующіе по мѣрѣ ихъ выхода.

4. В. А. Стекловъ сдѣлалъ два сообщенія: 1) „О движеніи тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости" и 2) „Объ одной задачѣ изъ теоріи упругости".

5. Н. Н. Евдокимовъ доложилъ содержаніе статьи П. С. Флорова: „Общій элементарный способъ опредѣленія maximum'a и minimum'a".

6. Г. В. Левицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Результаты опредѣленія широты Харьковской астрономической обсерваторіи".

7. Въ этомъ засѣданіи получены слѣдующія сочиненія, принесенныя въ даръ Обществу ихъ авторами: 1) Бобылевъ, Д. К.—„Руководство къ курсу введенія въ теоретическую механику, I, Кинематика"—и 2) Альбицкій, В. И.—„Приложеніе къ курсу: *Водяные двигатели*, читанному въ Харьк. техн. инст.".

Засѣданіе 15-го Марта.

1. Предсѣдатель доложилъ письмо директора высшихъ женскихъ курсовъ въ С.-Петербургѣ, содержащее выраженіе благодарности за доставленіе въ библіотеку курсовъ „Сообщеній Х. М. О.".

2. К. А. Андреевъ и Г. В. Левицкій сдѣлали предложеніе избрать въ почетные члены Общества директора главной Николаевской астрономической обсерваторіи академика Θедора Александровича Бредихина. При этомъ Г. В. Левицкій изложилъ краткій обзоръ научныхъ трудовъ академика Θ. А. Бредихина, доставившихъ его имени почетную общеевропейскую извѣстность.—Постановили просить Θ. А. Бредихина принять званіе почетнаго члена Харьк. Матем. Общ.

3. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи взаимныхъ опредѣлителей".

4. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „Общая задача теоріи устойчивости движенія".

5. Проф. Emil Weyr въ Вѣнѣ избранъ въ члены корреспонденты Общества.

6. Получено въ даръ Обществу отъ проф. E. Weyr'a: 1) Серія его мемуаровъ (19 названій) представляющихъ извлеченія изъ различныхъ періодическихъ изданій и 2) Первый томъ издаваемаго имъ совмѣстно съ D-r Escherich журнала, „Monatshefte für Mathematik und Physik".

7. Въ этомъ засѣданіи полученные въ даръ отъ авторовъ еще слѣдующія сочиненія: 1) Марковъ, А. А.—„Исчисленіе конечныхъ разностей; второй отдѣлъ"—и 2) Бобылевъ, Д. К.— „О началѣ Гамильтона или Остроградскаго и о началѣ наименьшаго дѣйствія Лагранжа".

Засѣданіе 12-го Апрѣля.

1. Предсѣдатель доложилъ письмо академика Θ. А. Бредихина, содержащее выраженіе благодарности за избраніе въ почетные члены Общества.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ".

3. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи взаимныхъ опредѣлителей" (продолженіе).

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія книги: 1) Имшенецкій В. Г.—„Интегрированіе линейныхъ однородныхъ уравненій посредствомъ частныхъ рѣшеній другихъ уравненій того-же вида и порядка равнаго или меньшаго"; 2) Сусловъ, Г. К.—„О силовой функціи, допускающей данные частные интегралы"; 3) Bredichin, Th.—„Sur les phénomènes extraordinaires présentés par la grande comète de 1882".

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

4-го Октября 1891 года.

1. Доложено письмо проф. Em. Weyr'а изъ Вѣны, содержащее выраженіе благодарности за избраніе въ члены корреспонденты Общества.

2. Доложенъ отчетъ о дѣятельности и состояніи Общества за 1890—91 академическій годъ.

3. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета на предстоящій 1891—92 годъ. Избраны:

Предсѣдателемъ К. А. Андреевъ, проф. университета.

Товарищами предсѣдателя: В. Л. Кирпичевъ, директоръ техн. инст. и А. М. Ляпуновъ, проф. университета.

Секретаремъ В. А. Стекловъ, привать-доцентъ университета.

4. Постановлено выразить благодарность отъ имени Общества М. А. Тихомандрицкому и А. П. Грузинцеву, изъ которыхъ послѣдній въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ передъ этимъ несъ обязанности секретаря, а первый товарища предсѣдателя.

5. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ отдѣленіи корней алгебраическихъ уравненій.

6. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія книги: 1) Сомовъ, П. О.—„Кинематика коллинеарно измѣняемой системы общаго вида", 2) Langley, S. P.—„Recherches expérimentales aérodynamiques et données d'expériences".

Засѣданіе 15-го Ноября.

1. К. А. Андреевъ представилъ и изложилъ записку г-жи Шиффъ (В. І.) подъ заглавіемъ: „Объ осяхъ симметріи центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка".

2. М. А. Тихомандрицкій доложилъ сообщеніе В. П. Ермакова: „Полная теорія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функціи одного независимаго перемѣннаго".

3. В. А. Стекловъ сообщилъ часть своей работы: „О равновѣсіи упругихъ тѣлъ вращенія".

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія книги: 1) Имшенецкій, В. Г.—„Замѣтка о дифференціальныхъ линейныхъ уравненіяхъ, интегрируемыхъ посредствомъ общихъ гиперболическихъ синусовъ".—2) Pierce, G. W.—„The life-romance of an algebraist".

Засѣданіе 13-го Декабря.

1. Г. В. Левицкій сообщилъ въ извлеченіи статью И. Е. Кортацци: „О вспомогательныхъ таблицахъ для опредѣленія времени по способу Цингера".

2. А. М. Ляпуновъ сообщилъ новое доказательство теоремы Фукса, относящейся къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ.

3. А. П. Грузинцевъ сообщилъ часть своей работы: „Уравненія электродинамики Герца и электромагнитная теорія свѣта".

4. Избранъ въ члены Общества Андрей Петровичъ Киселевъ, преподаватель Харьковскаго реальнаго училища.

Засѣданіе 24-го Января 1892 года.

1. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ электро-магнитной теоріи свѣта".

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О равновѣсіи упругихъ тѣлъ вращенія" (продолженіе).

Засѣданіе 28-го Февраля.

1. Доложено о полученіи отъ члена Общества П. С. Фролова его статьи подъ заглавіемъ: „Элементарный способъ отысканія наибольшихъ и наименьшихъ".

2. К. А. Андреевъ представилъ и изложилъ замѣтку А. А. Маркова: „О цѣлой функціи, равной произведенію двухъ гипергеометрическихъ рядовъ".

3. Я. Г. Звенигородскій сдѣлалъ сообщеніе: „О рѣшеніи алгебраическихъ уравненій первыхъ трехъ степеней".

Засѣданіе 6-го Марта.

1. Г. В. Левицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Объ опредѣленіи разности долготъ городовъ Харькова и Николаева.

2. А. П. Грузинцевъ изложилъ часть своей работы: „Объ электромагнитной теоріи свѣта" (продолженіе).

3. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О движеніи твердаго тѣла въ жидкости".

4. М. А. Тихомандрицкій сообщилъ свои замѣчанія на статью г. Лерха объ одной формулѣ Кронекера.

Засѣданіе 24-го Апрѣля.

1. С. Ѳ. Влезковъ сдѣлалъ сообщеніе: „О принципѣ наименьшаго дѣйствія и теоремѣ Якоби".

2. В. А. Стекловъ изложилъ выводъ уравненій движенія твердаго тѣла съ многосвязными полостями, наполненными однородною несжимаемою жидкостью, въ безпредѣльной массѣ такой-же жидкости, заполняющей многосвязное пространство.

3. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія ихъ печатныя произведенія: 1) Соколовъ, Н.— „Теорія симметричныхъ многогранниковъ“.—2) Markoff, A. – „Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire (à la mémoire de G. Zolotareff). — 3) Piltschikoff, N. — Sur la polarisation d'atmosphère par la lumière de la lune“.

Засѣданіе 29-го Мая.

Въ это засѣданіе собрались экстренно, какъ члены Общества, такъ и многія постороннія лица, чтобы почтить память почетнаго члена Общества Василія Григорьевича Имшенецкаго.

К. А. Андреевъ въ качествѣ предсѣдателя сообщилъ присутствующимъ горестное извѣстіе о неожиданной тяжелой утратѣ, понесенной наукою въ лицѣ ординарнаго академика В. Г. Имшенецкаго, скончавшагося въ Москвѣ 24-го мая.

Очертивъ затѣмъ въ краткихъ словахъ личность покойнаго, какъ ученаго и какъ человѣка, предсѣдательствующій указалъ на особенное значеніе дѣятельности В. Г. Имшенецкаго для Харьковскаго Математическаго Общества, для котораго онъ былъ однимъ изъ основателей, постояннымъ вдохновителемъ и сотрудникомъ.

Въ знакъ своего почтенія къ памяти покойнаго присутствующіе выслушали слова предсѣдателя стоя.

Постановлено послать письма отъ имени Общества супругѣ В. Г. Имшенецкаго и въ Академію Наукъ съ выраженіемъ соболѣзнованія семейному горю и прискорбія по поводу утраты, понесенной наукою.

Содержаніе этихъ писемъ, которыя были написаны въ самомъ засѣданіи и подписаны всѣми присутствующими, слѣдующее:

1) Въ Императорскую Академію Наукъ.

Харьковское Математическое Общество, глубоко пораженное кончиною своего почетнаго члена ординарнаго академика Василія Григорьевича Имшенецкаго, почтительнѣйше проситъ Императорскую Академію Наукъ принять выраженіе его живѣйшей скорби по случаю столь неожиданной и тяжелой утраты, понесенной наукою.

2) Супругѣ В. Г. Имшенецкаго.

Милостивая Государыня, Марья Іосифовна!

Харьковское Математическое Общество въ своемъ экстренномъ засѣданіи 29 мая, въ которомъ собрались многіе находящіеся въ Харьковѣ члены Общества, а также ученики и почитатели незабвеннаго покойнаго супруга Вашего приноситъ Вамъ выраженія своей глубокой скорби и самаго живого соболѣзнованія въ постигшемъ Васъ горѣ. Память Василія Григорьевича, основателя нашего Общества, его истиннаго друга и покровителя, навсегда останется драгоцѣнною для всѣхъ, кто имѣлъ счастіе быть его ученикомъ или товарищемъ, а высокій примѣръ самаго идеальнаго служенія наукѣ будетъ живымъ завѣщаніемъ, оставленнымъ имъ всѣмъ тѣмъ, кому дороги ея интересы. Слѣдовать этому примѣру будетъ самою лучшею программою дѣятельности Математическаго Общества, а сохранять завѣщанныя Василіемъ Григорьевичемъ традиціи—самымъ лучшимъ воздаяніемъ за все, чѣмъ мы считаемъ себя ему обязанными.

ОБЪЯВЛЕНІЯ.

ОБЪ ИЗДАНІИ

Трудовъ Отдѣленія физическихъ наукъ Императорскаго Общества любителей Естествознанія.

Труды Отдѣленія выходятъ томами по два выпуска въ каждомъ. Издаются подъ редакціей предсѣдателя и секретаря отдѣленія. Получать можно въ книжномъ магазинѣ А. А. Ланга (Москва, Кузнецкій мостъ). Первый и второй томы (по одному выпуску) по два рубля; третій, четвертый и пятый томы (по два выпуска) по три рубля за томъ съ пересылкою.

ОБЪ ИЗДАНІИ
УНИВЕРСИТЕТСКИХЪ ИЗВѢСТІЙ

(Императорскаго Университета Св. Владиміра въ Кіевѣ).

въ 1893 г.

Цѣль настоящаго изданія остается прежнею: доставлять членамъ университетскаго сословія свѣдѣнія, необходимыя имъ по отношеніямъ ихъ къ Университету, и знакомить публику съ состояніемъ и дѣятельностію Университета и различныхъ его частей.

Согласно съ этою цѣлью, въ Университетскихъ Извѣстіяхъ печатаются:

1. Протоколы засѣданій университетскаго Совѣта.
2. Новыя постановленія и распоряженія по Университету.
3. Свѣдѣнія о преподавателяхъ и учащихся, списки студентовъ и постороннихъ слушателей.
4. Обозрѣнія преподаванія по полугодіямъ.
5. Программы, конспекты и библіографическіе указатели для учащихся.
6. Библіографическіе указатели книгъ, поступающихъ въ университетскую библіотеку и въ студенческій ея отдѣлъ.
7. Свѣдѣнія и изслѣдованія, относящіяся къ устройству и состоянію ученой, учебной, административной и хозяйственной части Университета.
8. Свѣдѣнія о состояніи коллекцій, кабинетовъ, музеевъ и другихъ учебно-вспомогательныхъ заведеній Университета.
9. Годичные отчеты по Университету.
10. Отчеты о путешествіяхъ преподавателей съ учеными цѣлями.
11. Разборы диссертацій, представляемыхъ для полученія ученыхъ степеней, соисканія наградъ, pro venia legendi и т. п., а также и самыя диссертаціи.
12. Рѣчи, произносимыя на годичномъ актѣ и въ другихъ торжественныхъ собраніяхъ.
13. Вступительныя, пробныя, публичныя лекціи и полные курсы преподавателей.
14. Ученые труды преподавателей и учащихся.
15. Матеріалы и переводы научныхъ сочиненій.

Указанныя статьи распредѣляются на двѣ части—1)—оффиціальную и протоколы, отчеты и т. п. 2)—неофиціальную (статьи научнаго содержанія) съ отдѣлами—*критико-библіографическимъ*, посвященнымъ критическому обозрѣнію выдающихся явленій ученой литературы (русской и иностранной), и *научной хроники* заключающимъ въ себѣ извѣстія о дѣятельности ученыхъ обществъ, состоящихъ при Университетѣ, и т. п. свѣдѣнія. Въ *прибавленіяхъ* печатаются матеріалы, указатели библіотеки, списки, таблицы метеорологическихъ наблюденій и т. п.

Университетскія Извѣстія въ 1893 году будутъ выходить въ концѣ каждаго мѣсяца, книжками, содержащими въ себѣ до 20 печатныхъ листовъ. Цѣна за 12 книжекъ **Извѣстій** безъ пересылки **шесть рублей пятьдесятъ копѣекъ**, а съ пересылкой **семь рублей**. Въ случаѣ выхода приложеній (большихъ сочиненій), о нихъ будетъ объявлено особо. Подписчики **Извѣстій**, при выпискѣ приложеній, пользуются уступкою 20%.

Подписка и заявленія объ обмѣнѣ изданіями принимаются въ канцеляріи Правленія Университета.

Стутенты Университета Св. Владиміра платятъ за годовое изданіе **Университетскихъ Извѣстій** 3 руб. сер., а студенты прочихъ Университетовъ 4 руб.; продажа отдѣльныхъ книжекъ не допускается.

Гг. Иногородные могутъ обращаться съ требованіями своими къ коммиссіонеру Университета Н. Я. Оглобину въ С.-Петербургъ, на Малую Садовую, № 4-й и въ Кіевъ, на Крещатикъ, въ книжный магазинъ его же, или непосредственно въ Правленіе Университета Св. Владиміра.

Редакторъ *В. Иконниковъ*.

ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

„Извѣстія“, издаваемыя подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

„Извѣстія“ раздѣляются на два отдѣла.

1. Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2. Второй отдѣлъ содержитъ:

a) Лѣтопись физико-математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годичные отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

b) Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

c) Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ „Извѣстіяхъ“ могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предъидущій годъ, получаютъ Извѣстія безплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „Извѣстія“ въ годъ 3 руб. (съ доставкою и пересылкою).

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-математическаго Общества проф. **А. В. Васильевымъ** и секретаремъ Общества **М. С. Сегелемъ** (Университетъ), а также въ Казани книжными магазинами **А. А. Дубровина** (Гостинный дворъ № 1) и **Н. Я. Башмакова** (Воскресенская, домъ Болдырева), въ С.-Петербургѣ у **А. С. Суворина, М. М. Стасюлевича, К. Л. Риккера** и **Н. П. Карбасникова.**

Первую серію „Извѣстій“ составляютъ восемь томовъ собранія протоколовъ засѣданій секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

„ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ“

составляетъ продолженіе основаннаго въ 1884 г. въ Кіевѣ

профессоромъ В. П. Ермаковымъ

„ЖУРНАЛА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ“.

Съ 1886 г. по 15-е іюня 1891 г. „Вѣстникъ Оп. Физики и Эл. Математики“ издавался подъ редакціею Э. К. Шпачинскаго въ г. Кіевѣ, а съ 15-го іюня 1891 года, подъ тою-же редакціею

издается въ г. Одессѣ.

Журналъ былъ рекомендованъ: Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, учительскихъ институтовъ и семинарій и городскихъ училищъ; Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній — для военно-учебныхъ заведеній. Ученымъ Комитетомъ при Святѣйшемъ Синодѣ журналъ былъ одобренъ для духовныхъ семинарій и училищъ.

Въ теченіе каждаго учебнаго полугодія (семестра) выходитъ 12 нумеровъ журнала формѣ брошюръ.

Подписная цѣна съ пересылкой:

На годъ—всего 24 №№ . . . . 6 руб. | На полугодіе—всего 12 №№ . . . 3 руб

(Книжнымъ магазинамъ 5% уступки).

Учителя и учительницы низшихъ училищъ, всѣ учащіеся и вообще всѣ частныя лица, не имѣющія возможности вносить полной платы, при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторой редакціи, могутъ подписываться на журналъ на льготныхъ условіяхъ, а именно:

За годъ . . . . 4 руб. | За полугодіе . . . . 2 руб.

Менѣе чѣмъ на одно полугодіе подписка не принимается.

Разсрочка подписной платы допускается по соглашенію.

За перемѣну адреса уплачивается 10 коп.

Подписчики, желающіе внести подписную плату какъ наложенный платежъ на одинъ изъ текущихъ №№ журнала, доплачиваютъ 20 коп.

Комплекты №№ за всѣ прежніе семестры (отъ І-го до XIII-го вкл.), сброшюрованные по 12 №№ въ книги, продаются по 2 р. 50 к., а льготнымъ подписчикамъ и книгопродавцамъ—по 2 р. за каждый.

Отдѣльные №№ продаются: одиночные по 30 к., двойные по 50 к.

Всѣ читатели журнала приглашаются быть его сотрудниками и корреспондентами.

Сотрудничество не даетъ права на даровой экземпляръ журнала.

Чертежи къ статьямъ должны быть возможно просты, тщательно исполнены на отдѣльныхъ бумажкахъ (а не въ текстѣ рукописи) и возможно малыхъ размѣровъ.

Отдѣльные оттиски помѣщенныхъ въ журналѣ статей изготовляются на счетъ авторовъ, при условіи своевременнаго о томъ извѣщенія редакціи.

За помѣщеніе объявленій на оберткахъ журнала уплачивается:

За всю страницу . . . . 6 руб.	За 1/4 страницы . . . . 1 руб. 50 коп.
„ 1/2 страницы . . . . 3 „	„ 1/6 „ . . . . 1 „ 20 „
„ 1/3 „ . . . . 2 „	„ 1/8 „ . . . . 1 „ — „

При повтореніи объявленій взимается всякій разъ половина этой платы.

Адресъ: **Г, Одесса, Редакція „Вѣстника Оп. Физ. и Элем. Математики“.**