

и можем и наоборот положить μ и λ также отвлеченно, что по-прежнему удовлетворяет соотношению (2), и наоборот.

$$(3) \dots \dots \frac{x + \lambda}{x - \mu} = \frac{y + \lambda}{y - \mu} = \dots$$

Рѣшеніе уравненій четвертой степени на основаніи симметричнаго омографическаго соотношенія, существующаго между его корнями.

В. Г. Имшенецкаго †¹⁾.

§ 1. Теорема. Корни $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ уравненія четвертой степени

$$f(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \dots \dots (1)$$

всегда можно разбить на такія двѣ группы, по два корня α и β , γ и δ , что корни, принадлежащіе къ каждой изъ нихъ, подставленные вмѣсто x и y , будутъ удовлетворять соотношенію

$$xy = \mu(x + y) + \lambda \dots \dots (2)$$

симметричному и омографическому въ отношеніи x и y .

Коэффициентъ μ въ уравненіи (2) опредѣлится изъ уравненія третьей степени, которое будетъ *разрѣшающимъ* въ отношеніи уравненія (1).

Коэффициентъ λ выразится рационально посредствомъ μ и a, b, c, d .

Доказательство. По свойству симметричнаго соотношенія (2) взаимная перестановка x и y въ уравненіи (2) не измѣняетъ его вида. Изъ него получаемъ

$$y = \frac{\mu x + \lambda}{x - \mu} \quad \text{и} \quad x = \frac{\mu y + \lambda}{y - \mu},$$

тождественныя выраженія y черезъ x и обратно.

¹⁾ Замѣтка эта найдена въ бумагахъ покойнаго В. Г. Имшенецкаго. Время ея составленія не извѣстно.

Поэтому, допуская, что между α и β съ одной стороны, и между γ и δ съ другой, имѣеть мѣсто соотношеніе (2), будемъ имѣть, что подстановка

$$z = \frac{\mu\zeta + \lambda}{\zeta - \mu} = \mu + \frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu} \dots \dots \dots (3)$$

въ данное уравненіе

$$f(z) = 0$$

не должна произвести измѣненія его вида, такъ что послѣ этой подстановки и соединенія подобныхъ членовъ получится уравненіе:

$$f(\zeta) = 0.$$

Но по теоремѣ Тейлора мы находимъ, что

$$f\left(\frac{\mu\zeta + \lambda}{\zeta - \mu}\right) = f\left(\mu + \frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right) =$$

$$= f(\mu) + f'(\mu) \frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu} + \frac{1}{2} f''(\mu) \left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} f'''(\mu) \left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^4 = 0.$$

Отсюда, упрощая, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} (\zeta - \mu)^4 + \frac{f'(\mu)(\lambda + \mu^2)}{f(\mu)} (\zeta - \mu)^3 + \frac{f''(\mu)(\lambda + \mu^2)^2}{2f(\mu)} (\zeta - \mu)^2 + \\ + \frac{f'''(\mu)(\lambda + \mu^2)^3}{6f(\mu)} (\zeta - \mu) + \frac{(\lambda + \mu^2)^4}{f(\mu)} = 0. \end{aligned} \right\} \cdot (4)$$

На основаніи же вышеприведеннаго соображенія уравненіе (4) должно быть тождественнымъ съ уравненіемъ $f(\zeta) = 0$.

Но такъ какъ

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta) = f(\mu + \zeta - \mu) = \\ = f(\mu) + f'(\mu)(\zeta - \mu) + \frac{1}{2} f''(\mu)(\zeta - \mu)^2 + \frac{1}{6} f'''(\mu)(\zeta - \mu)^3 + (\zeta - \mu)^4 = 0, \end{aligned} \right\} \cdot (5)$$

то для существованія упомянутого тождества необходимы слѣдующія равенства, вытекающія изъ сравненія коэффициентовъ одинаковыхъ степеней $(\zeta - \mu)$ въ уравненіяхъ (4) и (5):

$$(\lambda + \mu^2)^4 = [f(\mu)]^2 \dots \dots \dots (a)$$

$$(\lambda + \mu^2)^3 f'''(\mu) = 6f(\mu) f'(\mu) \dots \dots \dots (b)$$

$$(\lambda + \mu^2)^2 f''(\mu) = f(\mu) f''(\mu) \dots \dots \dots (c)$$

$$(\lambda + \mu^2) f'(\mu) = \frac{1}{6} f(\mu) f'''(\mu) \dots \dots \dots (d)$$

Изъ нихъ по условію (c) имѣемъ

$$f(\mu) = (\lambda + \mu^2)^2; \dots \dots \dots (e)$$

поэтому, для согласованія условій (c) и (a), необходимо, извлекая квадратный корень изъ обѣихъ частей уравненія (a), взять результаты извлеченія съ одинаковыми знаками.

Далѣе, съ помощію (e), исключивъ $f(\mu)$ изъ (b) или изъ (d), придемъ къ одному и тому-же условію

$$6f'(\mu) = f'''(\mu) (\lambda + \mu^2) \dots \dots \dots (f)$$

Исключивъ $\lambda + \mu^2$ изъ уравненій (e) и (f), мы получимъ слѣдующее уравненіе

$$36[f'(\mu)]^2 = [f'''(\mu)]^2 f(\mu), \dots \dots \dots (g)$$

съ помощію котораго можно опредѣлить требуемыя значенія коэффициента μ , послѣ чего значеніе другого коэффициента λ получится изъ уравненія (f) по формулѣ

$$\lambda = \frac{6f(\mu) - \mu^2 f'''(\mu)}{f'''(\mu)} \dots \dots \dots (h)$$

§ 2. Теперь не трудно убѣдиться, съ помощію простыхъ алгебраическихъ вычисленій, что хотя уравненіе (g), служащее для опредѣленія значеній μ , повидимому шестой степени, но въ немъ члены выше третьей степени сокращаются, и по упрощеніи оно получаетъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} (a^3 - 4ab + 8c) \mu^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d) \mu^2 \\ + (a^2c + 8ad - 4bc) \mu + a^2d - c^2 = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (G)$$

Равнымъ образомъ уравнение (h) окончательно получить такой видъ:

$$\lambda = \frac{2a\mu^2 + 2b\mu + c}{4\mu + a} \dots \dots \dots (H)$$

Изъ уравненія (G) получимъ по крайней мѣрѣ *одно* вещественное значеніе μ , а соответствующее значеніе λ найдемъ по формулѣ (H).

Если $d = \frac{c^2}{a^2}$, то $\mu = 0$ и $\lambda = \frac{c}{a}$.

Если данное уравненіе четвертой степени будетъ вида

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

что всегда можно предполагать, то уравненія (G) и (H) получатъ слѣдующій видъ

$$8q\mu^3 - 4(p^2 - 4r)\mu^2 - 4pqu - q^2 = 0 \dots \dots \dots (G')$$

и

$$\lambda = \frac{2p\mu + q}{4\mu} \dots \dots \dots (H')$$

§ 3. Разсмотримъ теперь, какимъ образомъ можно довести до конца рѣшеніе уравненія четвертой степени (1), зная одинъ изъ корней уравненія третьей степени (G).

Первую часть даннаго уравненія (1) можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$f(z) = [z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta][z^2 - (\gamma + \delta)z + \gamma\delta].$$

Но на основаніи соотношенія (2) мы имѣемъ:

$$\alpha\beta = \mu(\alpha + \beta) + \lambda, \quad \gamma\delta = \mu(\gamma + \delta) + \lambda;$$

слѣдовательно

$$f(z) = [z^2 + \lambda - (\alpha + \beta)(z - \mu)][z^2 + \lambda - (\gamma + \delta)(z - \mu)],$$

и полагая

$$\frac{z^2 + \lambda}{z - \mu} = u,$$

можно данное уравненіе $f(z) = 0$ четвертой степени привести къ уравненію второй степени

$$[u - (\alpha + \beta)][u - (\gamma + \delta)] = 0 \dots \dots \dots (K)$$

Коэффициенты этого послѣдняго уравненія не трудно выразить въ коэффициентахъ даннаго уравненія. Дѣйствительно, уравненіе (K) имѣетъ видъ

$$u^2 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)u + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta = 0.$$

Но мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= -a, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta &= b, \end{aligned}$$

на основаніи же соотношенія (2) между корнями даннаго уравненія

$$\alpha\beta + \gamma\delta = -\mu a + 2\lambda.$$

Слѣдовательно

$$\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta = b + a\mu - 2\lambda.$$

И такъ, уравненіе (K) приметъ видъ

$$u^2 + au + a\mu - 2\lambda + b = 0 \dots\dots\dots (L)$$

или, введя данное выше значеніе λ ,

$$u^2 + au + \frac{a^2\mu - 2c + ab}{4\mu + a} = 0 \dots\dots\dots (M)$$

Опредѣливъ оба корня u_1 и u_2 уравненія (L) или (M), получимъ соотвѣтственные значенія z посредствомъ рѣшенія уравненій второй степени:

$$\left. \begin{aligned} z^2 - u_1z + \mu u_1 + \lambda &= 0 \\ z^2 - u_2z + \mu u_2 + \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (N)$$

Корни z_1, z_2 и z_3, z_4 двухъ послѣднихъ уравненій и будутъ корнями предложеннаго уравненія 4-ой степени $f(z) = 0$.

Въ этомъ можно убѣдиться, перемножая уравненія (N) одно на другое, что доставитъ уравненіе

$$\begin{aligned} z^4 - (u_1 + u_2)z^3 + [\mu(u_1 + u_2) + u_1u_2 + 2\lambda]z^2 - \\ - [2\mu u_1u_2 + \lambda(u_1 + u_2)]z + (\mu u_1 + \lambda)(\mu u_2 + \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Но, на основаніи (L), мы имѣемъ:

$$-(u_1 + u_2) = a, \quad u_1u_2 = a\mu - 2\lambda + b;$$

слѣдовательно

$$\begin{aligned} \mu(u_1 + u_2) + u_1u_2 + 2\lambda &= -a\mu + a\mu - 2\lambda + b + 2\lambda = b, \\ -2\mu u_1u_2 - \lambda(u_1 + u_2) &= -2a\mu^2 + 4\mu\lambda - 2b\mu + \lambda a, \end{aligned}$$

и такъ какъ по формулѣ (H)

$$-2a\mu^2 - 2b\mu = -4\mu\lambda - a\lambda + c,$$

то

$$d = -2\mu u_1 u_2 - \lambda(u_1 + u_2) = c.$$

Наконецъ,

$$\begin{aligned} (\mu u_1 + \lambda)(\mu u_2 + \lambda) &= \mu^2 u_1 u_2 + \lambda\mu(u_1 + u_2) + \lambda^2 = \\ &= a\mu^3 - 2\lambda\mu^2 + b\mu^2 - a\lambda\mu + \lambda^2; \end{aligned}$$

но на основаніи уравненія

$$f(\mu) = (\lambda + \mu^2)^2$$

имѣемъ

$$a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d = \lambda^2 + 2\lambda\mu^2;$$

откуда

$$\lambda^2 = a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d - 2\lambda\mu^2.$$

Введя это значеніе λ^2 въ предыдущую формулу, найдемъ

$$\begin{aligned} (\mu u_1 + \lambda)(\mu u_2 + \lambda) &= 2a\mu^3 + 2b\mu^2 + c\mu + d - 4\lambda\mu^2 - a\lambda\mu = \\ &= (2a\mu^2 + 2b\mu + c)\mu - (4\mu + a)\lambda + d \end{aligned}$$

или, принимая во вниманіе уравненіе (H), которое можно написать такимъ образомъ:

$$(2a\mu^2 + 2b\mu + c) - (4\mu + a)\lambda = 0,$$

мы получимъ

$$(\mu u_1 + \lambda)(\mu u_2 + \lambda) = d.$$

И такъ, отъ перемноженія уравненій (N) одного на другое мы получимъ данное уравненіе

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

ч. и т. д.