

Къ теоріи взаимныхъ опредѣлителей.

А. П. Грузинцева.

Взаимнымъ опредѣлителемъ *) даннаго опредѣлителя n -го порядка называютъ, какъ извѣстно, опредѣлитель, составленный изъ его первыхъ миноровъ; онъ будетъ, разумѣется, тоже опредѣлителемъ n -го порядка, такъ-какъ первыхъ миноровъ даннаго числомъ n^2 .

Можно подобнымъ-же образомъ составить взаимный опредѣлитель по отношенію къ составленному уже взаимному даннаго и такъ поступать далѣе. Цѣлью настоящей замѣтки и будетъ служить выводъ основныхъ связей между этими взаимными опредѣлителями, а также и ихъ минорами, различныхъ порядковъ.

Пусть имѣемъ опредѣлитель n -го порядка

$$D = \sum \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{nn}).$$

Назовемъ его первые миноры тѣми-же буквами, но со значкомъ (1) вверху, они, значить, будутъ:

$$a_{11}^{(1)}, \quad a_{12}^{(1)} \dots a_{ik}^{(1)}, \dots$$

такъ-что

$$a_{ik}^{(1)},$$

будетъ миноръ, соотвѣтствующій элементу a_{ik} въ первоначальномъ или основномъ опредѣлителѣ; онъ получается изъ него выкидываніемъ i -ой строки и k -го столбца и составленіемъ опредѣлителя $(n - 1)$ -го порядка изъ оставшихся $n - 1$ строкъ и $n - 1$ столбцовъ.

*) Нѣкоторые авторы называютъ взаимный опредѣлитель—*опредѣлителемъ присоединенной системы*, т. е. совокупности первыхъ миноровъ даннаго опредѣлителя.

Составимъ изъ $a_{ik}^{(1)}$, которыхъ n^2 числомъ, опредѣлитель и назовемъ его $D^{(1)}$, т. е.

$$D^{(1)} = \sum \pm (a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(1)}).$$

это и есть опредѣлитель взаимный съ D ; въ виду нашей цѣли мы будемъ называть его *взаимнымъ первымъ ранга* *).

Затѣмъ, принимая $D^{(1)}$ за исходный опредѣлитель, составимъ его первые миноры и обозначимъ ихъ знаками:

$$a_{11}^{(2)}, \quad a_{12}^{(2)} \dots a_{ik}^{(2)} \dots$$

изъ этихъ миноровъ составляемъ опредѣлитель $D^{(2)}$, который будетъ взаимнымъ съ $D^{(1)}$; будемъ называть его *взаимнымъ опредѣлителемъ 2-го ранга* по отношенію къ первоначальному D .

Идя такимъ путемъ, мы образуемъ $D^{(q)}$ — *взаимный опредѣлитель (q)-го ранга* по отношенію къ первоначальному; онъ-же будетъ *просто взаимный* съ предыдущимъ опредѣлителемъ $(q-1)$ -го ранга. Элементы этого опредѣлителя будутъ:

$$a_{11}^{(q)}, \quad a_{12}^{(q)} \dots a_{ik}^{(q)} \dots$$

и самъ онъ будетъ:

$$D^{(q)} = \sum \pm a_{11}^{(q)} a_{22}^{(q)} \dots a_{nn}^{(q)}.$$

Всѣ эти опредѣлители суть, разумѣется, опредѣлители n -го порядка.

Прежде чѣмъ заняться соотношеніями между всѣми этими опредѣлителями, условимся въ одномъ обозначеніи, которое временно будемъ употреблять. Будемъ обозначать $(n-j)$ -ый миноръ какого-нибудь опредѣлителя Δ n -го порядка символомъ:

$$\Delta_{j, p},$$

въ которомъ первый указатель j будетъ обозначать порядокъ того опредѣлителя, который самъ есть $(n-j)$ -ый миноръ; а второй указатель p будетъ опредѣлять нумеръ минора **).

*) Можно было-бы его называть взаимнымъ 1-го порядка, но терминъ „порядокъ“ такъ часто употребляется въ *опредѣлителяхъ*, что во избѣжаніе недоразумѣній будемъ употреблять слово „рангъ“.

**) Извѣстно, что всѣхъ $(n-j)$ -ыхъ миноровъ даннаго опредѣлителя n -го порядка можно составить

$$\left[\frac{n(n-1) \dots (n-j+1)}{1.2.3 \dots j} \right]^2 \text{ числомъ.}$$

Теперь установимъ тѣ соотношенія, которыя имѣли въ виду. Они будутъ основаны на слѣдующихъ двухъ извѣстныхъ равенствахъ, связывающихъ взаимный опредѣлитель и его миноры съ первоначальнымъ опредѣлителемъ и его минорами:

$$\Delta' = \Delta^{n-1} \dots \dots \dots (A)$$

$$\Delta'_{j,p} = \Delta^{j-1} \Delta_{n-j,p} \dots \dots \dots (B)$$

здѣсь Δ' есть опредѣлитель взаимный съ Δ , а $\Delta_{n-j,p}$ есть j -ый миноръ опредѣлителя Δ дополнительной минору $\Delta'_{j,p}$.

Примѣняя формулу (A) къ $D^{(1)}, D^{(2)} \dots D^{(q)}$, найдемъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= D^{n-1} \\ D^{(2)} &= (D^{(1)})^{(n-1)} = D^{(n-1)^2} \\ &\dots \dots \dots \\ D^{(q)} &= D^{(n-1)^q} \dots \dots \dots (I) \end{aligned}$$

Установимъ теперь соотношенія между минорами.

По формулѣ (B) имѣемъ:

$$D^{(1)}_{j,p} = D^{j-1} D_{n-j,p} \dots \dots \dots (1)$$

Полагая здѣсь $j = n - 1$, найдемъ:

$$D^{(1)}_{n-1,p} = D^{n-2} D_{1,p},$$

но по первымъ нашимъ обозначеніямъ должно положить

$$D^{(1)}_{n-1,p} = a_{ik}^{(2)},$$

$$D_{1,p} = a_{ik},$$

слѣдовательно:

$$a_{ik}^{(2)} = D^{n-2} a_{ik} = D^{(n-1)-1} a_{ik} \dots \dots \dots (1')$$

Далѣе, таже формула (B) вмѣстѣ съ (I) даетъ:

$$D^{(2)}_{j,p} = (D^{(1)})^{j-1} D^{(1)}_{n-j,p},$$

но

$$D^{(1)} = D^{n-1},$$

по формулѣ (A),

$$D_{n-j,p}^{(1)} = D^{n-j-1} D_{j,p},$$

по формулѣ (1),
слѣдовательно

$$D_{j,p}^{(2)} = D^{(n-1)(j-1)+(n-j-1)} D_{j,p},$$

или

$$D_{j,p}^{(2)} = D^{[(n-1)-1]j} D_{j,p} \dots \dots \dots (2)$$

Полагая здѣсь j равнымъ $(n-1)$ и замѣчая, что

$$D_{n-1,p}^{(2)} = a_{ik}^{(3)}, \quad D_{n-1,p} = a_{ik}^{(1)},$$

найдемъ:

$$a_{ik}^{(3)} = D^{(n-1)^2-(n-1)} a_{ik}^{(1)} \dots \dots \dots (2')$$

Далѣе составимъ:

$$D_{j,p}^{(3)} = (D^{(2)})^{j-1} D_{n-j,p}^{(2)},$$

но

$$(D^{(2)})^{j-1} = D^{(n-1)^2(j-1)}$$

и по формулѣ (2), полагая въ ней $n-j$ вмѣсто j ,

$$D_{n-j,p}^{(2)} = D^{[(n-1)-1](n-j)} D_{n-j,p},$$

слѣдовательно:

$$D_{j,p}^{(3)} = D^{(n-1)^2(j-1)+[(n-1)-1](n-j)} D_{n-j,p}$$

но

$$(n-1)^2(j-1) + [(n-1)-1](n-j) = [(n-1)^2 - (n-1) + 1]j - 1$$

слѣдовательно *):

$$D_{j,p}^{(3)} = D^{[(n-1)^2-(n-1)+1]j-1} D_{n-j,p} \dots \dots \dots (3)$$

Полагая здѣсь j равнымъ $n-1$ и зная, что:

$$D_{n-1,p}^{(3)} = a_{ik}^{(4)}, \quad D_{1,p} = a_{ik},$$

найдемъ:

$$a_{ik}^{(4)} = D^{(n-1)^3-(n-1)^2+(n-1)-1} a_{ik} \dots \dots \dots (3')$$

*) Мы не преобразовываемъ показателей съ цѣлью видѣть способъ ихъ составленія.

Разсматривая выражения (1), (2) и (3) и помня способъ ихъ полученія, не трудно подмѣтить общій законъ составленія ихъ для миноровъ взаимнаго опредѣлителя какого угодно ранга, а именно, для взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга $2m$ имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} D_{j,p}^{(2m)} &= D^{[(n-1)^{2m-1} - (n-1)^{2m-2} + \dots - 1]j} D_{j,p}, \\ \text{а для нечетнаго ранга} \\ D_{j,p}^{(2m+1)} &= D^{[(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \dots + 1]j-1} D_{n-j,p}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

Суммы въ скобкахъ пока оставляемъ въ этомъ видѣ, а потомъ ихъ упростимъ.

Чтобы убѣдиться въ справедливости этихъ формулъ стоитъ только составить изъ $D_{j,p}^{(2m)}$ формулу для $D_{j,p}^{(2m+1)}$, а изъ формулы $D_{j,p}^{(2m+1)}$ формулу для $D_{j,p}^{(2m+2)}$; онѣ будутъ того-же вида (II).

Выполнимъ это. По формулѣ (B) имѣемъ:

$$D_{j,p}^{(2m+1)} = (D^{(2m)})^{j-1} D_{n-j,p}^{(2m)},$$

но по формулѣ (I), полагая въ ней $q = 2m$, имѣемъ:

$$(D^{(2m)})^{j-1} = D^{(n-1)^{2m(j-1)}},$$

а по первой формулѣ группы (II), допускаемой на время, полагая въ ней $n - j$ вмѣсто j , имѣемъ:

$$D_{n-j,p}^{(2m)} = D^{[(n-1)^{2m-1} - (n-1)^{2m-2} + \dots - 1](n-j)} D_{n-j,p},$$

но

$$\begin{aligned} (n-1)^{2m}(j-1) + [(n-1)^{2m-1} - (n-1)^{2m-2} + \dots - 1](n-j) &= \\ = [(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \dots + 1]j + [-(n-1)^{2m} + n(n-1)^{2m-1} - \dots \\ - n(n-1)^2 + n(n-1) - n], \end{aligned}$$

но многочленъ въ скобкахъ равенъ -1 , ибо

$$n(n-1)^{2m-1} - n(n-1)^{2m-2} + \dots + n(n-1) - n = (n-1)^{2m} - 1,$$

какъ сумма геометрической прогрессіи; и такъ имѣемъ:

$$D_{j,p}^{(2m+1)} = D^{[(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \dots + 1]j-1} D_{n-j,p},$$

а это данная выше формула.

Если-бы мы допустили на время эту формулу, то получили бы из нея формулу для $D_{j,p}^{(2m+2)}$ вида (II) для $D_{j,p}^{(2m)}$.

Дѣйствительно, допуская справедливость ея, по формулѣ (B) имѣемъ:

$$D_{j,p}^{(2m+2)} = (D^{(2m+1)})^{j-1} D_{n-j,p}^{(2m+1)} \dots \dots \dots (a)$$

но

$(D^{(2m+1)})^{j-1} = D^{(n-1)^{2m+1(j-1)}}$ по формулѣ (I), а по допускаемой формулѣ (второй въ группѣ (II)), полагая въ ней $n-j$ вмѣсто j , найдемъ:

$$D_{n-j,p}^{(2m+1)} = D^{[(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \dots + 1]^{(n-j)-1}} D_{j,p}.$$

Подставляя все это въ (a), для показателя при D найдемъ выраженіе:

$$[(n-1)^{2m+1} - (n-1)^{2m} + \dots - 1]j + [-(n-1)^{2m+1} + n(n-1)^{2m} - n(n-1)^{2m-1} + \dots + n] = [(n-1)^{2m+1} - (n-1)^{2m} + \dots - 1]j,$$

ибо

$$n(n-1)^{2m} - n(n-1)^{2m-1} + \dots + n = (n-1)^{2m+1} + 1.$$

И такъ:

$$D_{j,p}^{(2m+2)} = D^{[(n-1)^{2m+1} - (n-1)^{2m} + \dots - 1]j} D_{j,p},$$

а это первая формула системы (II) для четнаго указателя $(2m+2)$.

И такъ формулы (II) доказаны.

Дадимъ имъ нѣсколько болѣе простой видъ.

Мы видимъ, что

$$(n-1)^{2m-1} - (n-1)^{2m-2} + \dots - 1 = \frac{(n-1)^{2m} - 1}{n}$$

и

$$(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \dots + 1 = \frac{(n-1)^{2m+1} + 1}{n},$$

поэтому:

$$\left. \begin{aligned} D_{j,p}^{(2m)} &= D^{\frac{(n-1)^{2m}-1}{n}j} D_{j,p} \\ D_{j,p}^{(2m+1)} &= D^{\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n}j-1} D_{n-j,p} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II \text{ bis})$$

Примѣнимъ ихъ къ случаю $j = n - 1$; тогда по нашимъ обозначеніямъ

$$D_{n-1,p}^{(2m)} = a_{ik}^{(2m+1)}; D_{n-1,p} = a_{ik}^{(1)}$$

$$D_{n-1,p}^{(2m+1)} = a_{ik}^{(2m+2)}; D_{1,p} = a_{ik}$$

и формулы (II bis) дадутъ

$$\left. \begin{aligned} a_{ik}^{(2m+1)} &= D \frac{(n-1)^{2m-1} (n-1)}{n} a_{ik}^{(1)} \\ a_{ik}^{(2m+2)} &= D \frac{(n-1)^{2m+1+1} (n-1)-1}{n} a_{ik} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

или

$$\left. \begin{aligned} a_{ik}^{(2m+1)} &= a_{ik}^{(1)} \sqrt[n]{\frac{D^{(2m+1)}}{D^{(1)}}} \\ a_{ik}^{(2m+2)} &= a_{ik} \sqrt[n]{\frac{D^{(2m+2)}}{D}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(III bis)}$$

т. е. элементы взаимнаго опредѣлителя нечетнаго ранга пропорціональны первымъ мнорамъ первоначальнаго опредѣлителя, а элементы взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга пропорціональны элементамъ первоначальнаго или первые миноры взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга пропорціональны первымъ мнорамъ первоначальнаго опредѣлителя, а первые миноры взаимнаго опредѣлителя нечетнаго ранга пропорціональны элементамъ первоначальнаго опредѣлителя.

Въ этихъ формулахъ (III bis):

$$D^{(2m+1)} = D^{(n-1)2m+1}$$

$$D^{(2m+2)} = D^{(n-1)2m+2}$$

$$D^{(1)} = D^{n-1}.$$

Слѣдствіе 1. Если $D = 1$, т. е. D будетъ опредѣлителемъ (модулемъ) нѣкоторой обратной линейной подстановки, то тогда

$$D^{(1)} = 1 \text{ и } D^{(q)} = 1,$$

а поэтому

$$a_{ik}^{(2m+1)} = a_{ik}^{(1)}$$

$$a_{ik}^{(2m+2)} = a_{ik}.$$

Въ этомъ случаѣ взаимные опредѣлители будутъ повторяться послѣдовательно.

Слѣдствіе 2. Если первоначальный опредѣлитель D будетъ симметрическимъ, тогда по извѣстному свойству симметрическихъ опредѣлителей

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ki}^{(1)},$$

слѣдовательно и

$$a_{ik}^{(2m+1)} = a_{ki}^{(2m+1)},$$

$$a_{ik}^{(2m+2)} = a_{ki}^{(2m+2)},$$

т. е. все взаимные будутъ симметрическими опредѣлителями.

Слѣдствіе 3. Пусть первоначальный опредѣлитель будетъ косою симметрической: а) нечетнаго порядка, тогда взаимные нечетнаго ранга будутъ симметрическими, а четнаго — косыми симметрическими; б) четнаго порядка, тогда взаимные всякаго ранга будутъ косыми симметрическими.

Примѣнимъ найденныя формулы къ случаю, когда нѣкоторый опредѣлитель n -го порядка C есть произведеніе двухъ другихъ опредѣлителей A и B тоже n -го порядка, т. е. пусть

$$C = A B.$$

По формулѣ (I) найдемъ, что

$$C^{(\mu)} = A^{(\mu)} B^{(\mu)}$$

т. е. если опредѣлитель C есть произведеніе двухъ другихъ опредѣлителей A и B , то и его взаимный ранга μ будетъ произведеніемъ взаимныхъ A и B того же ранга.

Въ заключеніе выведемъ еще одну формулу, связывающую миноры двухъ смежныхъ взаимныхъ опредѣлителей.

Въ формулахъ (II bis) первые множители вторыхъ частей можно преобразовать.

Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\begin{aligned} D^{\frac{(n-1)2m-1}{n}j} &= \sqrt[n]{D^{[(n-1)2m-1]j}} = \sqrt[n]{\frac{D^{(n-1)2mj}}{D^j}} = \\ &= D^{-\frac{j}{n}} \sqrt[n]{[D^{(2m)}]^j}; \end{aligned}$$

точно такъ-же найдемъ:

$$D^{\frac{(n-1)2m+1+j-1}{n}} = D^{\frac{j}{n}-1} \sqrt[n]{[D^{(2m+1)}]^j}.$$

Перемножая теперь формулы (II bis) и подставляя найденныя сейчас выраженія, получимъ:

$$D_{j,p}^{(2m)} D_{j,p}^{(2m+1)} = \frac{[D^{(2m)} D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}}{D} D_{j,p} D_{n-j,p}.$$

Полагая здѣсь p равнымъ

$$1, 2, \dots, \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{1.2.3\dots j}$$

и сложивъ всѣ равенства, найдемъ:

$$\sum_p D_{j,p}^{(2m)} D_{j,p}^{(2m+1)} = \frac{[D^{(2m)} D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}}{D} \sum_p D_{j,p} D_{n-j,p},$$

но по теоремѣ Лапласа

$$\sum_p D_{j,p} D_{n-j,p} = D,$$

слѣдовательно:

$$\sum_p D_{j,p}^{(2m)} D_{j,p}^{(2m+1)} = [D^{(2m)} D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}.$$