Объ осяхъ симметріи центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка.

Вѣры Ос. Шиффъ.

1. Всякая кривая линія второго порядка имѣетъ по крайней мѣрѣ одну ось симметріи. Алгебраическія кривыя высшихъ порядковъ могутъ имѣть такія оси, но могутъ и не имѣть. Возникаетъ поэтому вопросъ: въ чемъ состоитъ условіе или признакъ существованія оси симметріи для кривой, данной ея уравненіемъ, и какъ при существованіи такого условія эти оси могутъ быть найдены?

Вопросу этому, въ примѣненіи къ центральнымъ кривымъ четвертаго порядка, посвящена работа М. В. Постникова, составлявшая рефератъ секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей въ Казани и напечатанная тамъ же въ 1888 году [1]). Авторъ этого сочиненія пользуется для своей цѣли пріемами, представляющими полную аналогію съ тѣми, которые употребляются въ курсахъ Аналитической Геометріи для разысканія осей кривыхъ второго порядка.

Въ настоящей замѣткѣ предлагается другой путь къ той же цѣли, а именно, исходящій изъ понятія о діаметральныхъ кривыхъ для линій высшихъ порядковъ. По существу своему этотъ пріемъ такъ же простъ и элементаренъ какъ и предыдущій; въ общемъ онъ приложимъ къ линіямъ какого угодно четнаго порядка. Мы приложимъ его къ тѣмъ же центральнымъ кривымъ четвертаго порядка, имѣющимъ центръ.

2. Въ сочиненіи Салмона „A treatise on the hygher plane curves“ мы находимъ слѣдующее опредѣленіе діаметральныхъ кривыхъ.

Если, имѣя алгебраическую кривую порядка n, мы вообразимъ систему параллельныхъ сѣкущихъ и на каждой изъ нихъ возьмемъ точку,

---

[1]) *Постниковъ* (*М. В.*) — „Этюды по теоріи кривыхъ четвертаго порядка“. — Казань 1888 года.

между разстояніями которой $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_n$ отъ точекъ ея пересѣченія съ кривою существуетъ соотношеніе

$$\sum \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_i = 0,$$

гдѣ сумма $\sum$ распространяется на всѣ возможныя произведенія изъ n названныхъ разстояній по i множителей въ каждомъ, то геометрическое мѣсто такихъ точекъ, взятыхъ на всѣхъ сѣкущихъ даннаго направленія, будетъ кривая линія, называемая діаметральною по отношенію къ данной кривой. Давая числу i значенія $1, 2, 3, \ldots (n-1)$, получимъ такимъ образомъ $m-1$ различныхъ діаметральныхъ линій, соотвѣтствующихъ одному и тому же направленію сѣкущихъ.

Положимъ, что разсматриваемая кривая n-го порядка выражается относительно прямоугольной системы координатъ уравненіемъ

$$f(x, y) = 0$$

и пусть направленіе сѣкущихъ опредѣляется угломъ φ, составляемымъ ими съ осью абсциссъ. Въ такомъ случаѣ, обозначая чрезъ x_1 и y_1 координаты какой-нибудь точки на сѣкущей, а чрезъ x и y координаты точки встрѣчи этой сѣкущей съ кривою, будемъ имѣть

$$x = x_1 + \varrho \cos\varphi \quad \text{и} \quad y = y_1 + \varrho \sin\varphi.$$

Слѣдовательно

$$f(x_1 + \varrho\cos\varphi, \; y_1 + \varrho\sin\varphi) = 0$$

или, по теоремѣ Тейлора,

$$\left.\begin{aligned} & f(x_1, y_1) + \varrho\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y_1}\sin\varphi\right] + \\ & + \frac{\varrho^2}{1.2.}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1{}^2}\sin^2\varphi\right] + \\ & + \ldots + \frac{\varrho^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^n}\cos^n\varphi + n\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n-1}\partial y_1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + \right. \\ & \left. \qquad + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y_1{}^n}\sin^n\varphi\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Относительно ϱ это есть алгебраическое уравненіе n-ой степени, а потому, въ силу соотношенія между его коэффиціентами и корнями, будемъ имѣть, что геометрическія мѣста, опредѣляемыя уравненіями

$$\sum \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = 0, \quad \sum \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-2} = 0, \quad \ldots \quad \sum \varrho_1 = 0,$$

т. е. послѣдовательныя діаметральныя кривыя данной линіи n-го порядка, выражаются уравненіями:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi=0\,,$$

. . . .

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\cos^{n-1}\varphi+(n-1)\,\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\partial y}\cos^{n-2}\varphi\sin\varphi+\ldots+\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\sin^{n-1}\varphi=0\,.$$

Это будутъ кривыя линіи порядковъ $(n-1)$, $(n-2)$, и т. д. Послѣдняя изъ нихъ есть прямая, такъ называемый прямолинейный діаметръ. Для краткости будемъ обозначать первыя части этихъ уравненій чрезъ $\triangle_1 f$, $\triangle_2 f$, ... $\triangle_{n-1} f$.

Всякая кривая четвертаго порядка имѣетъ, такимъ образомъ, три рода діаметральныхъ линій. Діаметральныя линіи 1-го рода суть кривыя третьяго порядка, выражаемыя уравненіемъ $\triangle_1 f=0$; діометральныя линіи 2-го рода суть коническія сѣченія $\triangle_2 f=0$, и наконецъ діаметральныя линіи третьяго рода суть прямолинейные діаметры, коихъ уравненіе есть $\triangle_3 f=0$.

Непосредственнымъ дифференцированіемъ легко убѣдиться, что $\triangle_1(\triangle_1 f)=\triangle_2 f$, $\triangle_1(\triangle_2 f)=\triangle_3 f$ ... и вообще $\triangle_k(\triangle_h f)=\triangle_{h+k} f$. Отсюда заключаемъ, что при одномъ и томъ же направленіи сѣкущихъ всякая діаметральная линія высшаго рода есть въ то же время діаметральная линія для діаметральныхъ линій нисшаго рода. Слѣдовательно, въ частности всякій прямолинейный діаметръ какой-либо алгебраической кривой, соотвѣтствующій данному направленію, есть въ то же время прямолинейный діаметръ для всѣхъ діаметральныхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ тому же направленію.

3. Обращаясь къ вопросу о разысканіи осей симметріи для кривыхъ четнаго порядка, замѣтимъ, что по самому понятію о такой оси разстоянія отъ нея точекъ, въ которыхъ перпендикулярная къ ней прямая пересѣкаетъ разсматриваемую кривую, должны быть попарно равны между собою и имѣть противоположные знаки. Такъ, если назовемъ эти разстоянія чрезъ ϱ_1, ϱ_2 ... ϱ_n, то будемъ имѣть $\varrho_2=-\varrho_1$, $\varrho_4=-\varrho_3$, и т. д.; слѣдовательно $\sum\varrho=0$. Отсюда заключаемъ прежде всего, что всякая ось симметріи есть прямолинейный діаметръ перпендикулярный къ сѣкущимъ, которымъ онъ соотвѣтствуетъ.

Такимъ образомъ, предполагая, что φ означаетъ уголъ, составляемый съ осью абсциссъ перпендикуляромъ къ оси симметріи кривой четнаго порядка $f(x,y)=0$, будетъ имѣть согласно предыдущему, что уравненіе этой оси будетъ $\triangle_{n-1} f=0$.

Далѣе, изъ понятія объ оси симметріи слѣдуетъ, что если въ уравненіи (1) x_1, y_1 означаютъ координаты точки, лежащей на этой оси, то уравненіе это не должно содержать нечетныхъ степеней ϱ; также какъ и обратно. Это показываетъ, что уравненіе $\triangle_{n-1} f = 0$ только тогда будетъ выражать ось симметріи, когда всѣ координаты, ему удовлетворяющія, будутъ удовлетворять и уравненіямъ

$$\triangle_1 f = 0\,,\quad \triangle_3 f = 0\ \ldots\ \triangle_{n-3} f = 0.$$

Слѣдовательно, первая часть уравненія оси симметріи должна быть точнымъ дѣлителемъ каждаго изъ многочленовъ, представляющихъ первыя части уравненій діаметральныхъ кривыхъ нечетныхъ порядковъ.

Приложимъ это общее условіе къ разысканію осей симметріи центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка.

4. Будемъ предполагать, что кривая отнесена къ прямоугольной системѣ координатъ, начало которой находится въ центрѣ. Въ такомъ случаѣ, по самому понятію о центрѣ, уравненіе кривой не будетъ содержать членовъ нечетныхъ измѣреній. Слѣдовательно, мы можемъ разсматривать это уравненіе въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &A_1x^4 + 4A_2x^3y + 6A_3x^2y^2 + 4A_4xy^3 + A_5y^4 + \\ &\quad + 6(C_1x^2 + 2C_2xy + C_3y^2) + E = 0. \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Обозначая его первую часть чрезъ $f(x,y)$, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \triangle_3 f = 2\,.\,3\,.\,4\,[(A_1x + A_2y)\cos^3\varphi + 3\,(A_2x + A_3y)\cos^2\varphi\sin\varphi + \\ + 3(A_3x + A_4y)\cos\varphi\sin^2\varphi + (A_4x + A_5y)\sin^3\varphi]\,, \end{aligned}$$

а потому уравненіе прямолинейнаго діаметра будетъ

$$(A_1 + 3A_2m + 3A_3m^2 + A_4m^3)\,x + (A_2 + 3A_3m + 3A_4m^2 + A_5m^3)\,y = 0\ . \ (3)$$

гдѣ $m = \operatorname{tg}\varphi$.

Замѣчая далѣе, что

$$\begin{aligned} \triangle_1 f = 4\,[(A_1x^3 + 3A_2x^2y + 3A_3xy^2 + A_4y^3 + 3C_1x + 3C_2y)\cos\varphi + \\ + (A_2x^3 + 3A_3x^2y + 3A_4xy^2 + A_5y^3 + 3C_2x + 3C_3y)\sin\varphi] = 0\,, \end{aligned}$$

получимъ уравненіе діаметральной кривой перваго рода въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &(A_1 + A_2m)\,x^3 + 3\,(A_2 + A_3m)\,x^2y + 3\,(A_3 + A_4m)\,xy^2 + \\ &+ (A_4 + A_5m)\,y^3 + 3(C_1 + C_2m)\,x + 3\,(C_2 + C_3m)\,y = 0\,, \end{aligned}\right\} . \ (4)$$

гдѣ m имѣетъ то же значеніе.

Если діаметръ (3) есть ось симметріи, то, представляя его уравненіе въ видѣ $y = m'x$, будемъ имѣть $mm' = -1$, или, замѣняя здѣсь m' его значеніемъ изъ уравненія (3),

$$\frac{m(A_1 + 3A_2m + 3A_3m^2 + A_4m^3)}{A_2 + 3A_3m + 3A_4m^2 + A_5m^3} = 1$$

или наконецъ

$$A_2 + (3A_3 - A_1)\,m + 3\,(A_4 - A_2)\,m^2 + (A_5 - 3A_3)\,m^3 - A_4m^4 = 0\,. \quad (5)$$

Такъ какъ въ то же время первая часть уравненія (3), какъ показано выше, должна быть точнымъ дѣлителемъ первой части уравненія (4), то подстанавливая въ это послѣднее $-\frac{1}{m}x$ на мѣсто y, мы должны получить равенство тождественное, т. е. справедливое при всякомъ значеніи x; а это приводитъ къ двумъ слѣдующимъ условіямъ:

$$A_4 + (A_5 - 3A_3)\,m + 3\,(A_2 - A_4)\,m^2 + (3A_3 - A_1)\,m^3 - A_2m^4 = 0\,. \quad (6)$$

$$C_2 + (C_3 - C_1)\,m - C_2m^2 = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (7)$$

Каждое изъ условій (5), (6), (7) опредѣляетъ m, т. е. направленіе оси симметріи; изъ нихъ первые два суть относительно m уравненія четвертой степени, а послѣднее второй. Существованіе оси симметріи возможно, слѣдовательно, только тогда, когда всѣ эти три условія имѣютъ по крайней мѣрѣ одно общее рѣшеніе.

5. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, исключая изъ условій (5), (6) и (7) m, какъ величину имъ одновременно удовлетворяющую, мы получимъ зависимость между коэффиціентами уравненія (2), при которой оно выражаетъ кривую, имѣющую ось симметріи.

Это исключеніе m можетъ быть достигнуто слѣдующимъ образомъ. Складывая уравненія (5) и (6), получимъ

$$(A_2 + A_4)(1 - m^4) + (A_5 - A_1)(1 + m^2)\,m = 0$$

или

$$(A_2 + A_4)(1 - m^2) + (A_5 - A_1)\,m = 0\,,$$

откуда

$$\frac{m}{m^2 - 1} = \frac{A_2 + A_4}{A_5 - A_1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (8)$$

Съ другой стороны изъ уравненія (7) имѣемъ

$$\frac{m}{m^2 - 1} = \frac{C_2}{C_3 - C_1}\,;$$

слѣдовательно

$$\frac{C_2}{C_3 - C_1} = \frac{A_2 + A_4}{A_5 - A_1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (9)$$

Вычитая же одно изъ другого уравненія (5) и (6) получимъ

$$(A_2 - A_4)(1 - 6m^2 + m^4) - (A_1 - 6A_2 + A_5)(1 - m^2)m = 0$$

или

$$(A_2 - A_4)[(1 - m^2)^2 - 4m^2] - (A_1 - 6A_3 + A_5)(1 - m^2)m = 0$$

или

$$(A_2 - A_4)\left[1 - \frac{4m^2}{(1 - m^2)^2}\right] - (A_1 - 6A_3 + A_5)\frac{m}{1 - m^2} = 0\,,$$

откуда вслѣдствіе равенства (8) находимъ

$$(A_2 - A_4)\left[1 - 4\frac{(A_2 + A_4)^2}{(A_5 - A_1)^2}\right] + (A_1 - 6A_3 + A_5)\frac{A_2 + A_4}{A_5 - A_1} = 0$$

или по преобразованіи

$$3A_3 = \frac{A_1A_4 + A_2A_5}{(A_2 + A_4)} + 2\,\frac{A_2{}^2 - A_4{}^2}{A_1 - A_5}\,.\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

Равенства (9) и (10) и представляютъ искомыя соотношенія между коэффиціентами уравненія (2). Въ такомъ же видѣ они были даны и г. Постниковымъ [1]).

6. Замѣтимъ далѣе, что уравненія (5) и (6) обращаются одно въ другое при замѣнѣ m чрезъ $-\frac{1}{m}$. Это показываетъ, что если эти уравненія имѣютъ общій корень m_1, то они должны имѣть еще общій корень $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Въ такой же зависимости находятся и корни уравненія (7). Слѣдовательно, при выполненіи условій (9) и (10) кривая (2) имѣетъ двѣ перпендикулярныя между собою оси симметріи, направленіе которыхъ опредѣляется корнями уравненія (7).

Если кромѣ названныхъ двухъ корней m_1 и m_2 уравненія (5) и (6) имѣютъ еще третій общій корень m_3, то они будутъ удовлетворяться и при $m = -\frac{1}{m_3} = m_4$, т. е. будутъ имѣть всѣ четыре общіе корня. Въ этомъ случаѣ ихъ коэффиціенты должны быть пропорціональны, т. е.

$$\frac{A_2}{A_4} = \frac{3A_3 - A_1}{A_5 - 3A_3} = \frac{A_4 - A_2}{A_2 - A_4} = \frac{A_5 - 3A_3}{3A_3 - A_1} = \frac{A_4}{A_2},$$

откуда

$$A_4 = -A_2 \qquad \text{и} \qquad A_5 = A_1\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

---

[1]) См. назван. сочин. стр. 15 и 16.

Для того чтобы всѣ четыре корня уравненій (5) и (6) соотвѣтствовали направленіямъ различныхъ осей симметріи, нужно, чтобы всѣ они удовлетворяли и уравненію (7), что возможно только тогда, когда это уравненіе тождественно, т. е. при

$$C_2 = 0 \quad \text{и} \quad C_3 = C_1 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Итакъ, при условіяхъ (11) и (12) кривая (2) имѣетъ четыре оси симметріи по двѣ перпендикулярныя между собою. Ихъ направленіе опредѣляется корнями уравненія (5), которое въ этомъ случаѣ обращается въ

$$A_2 + (3A_3 - A_1)\,m - 6A_2 m^2 - (3A_3 - A_1)\,m^3 + A_2 m^4 = 0 .$$

По извѣстному соотношенію между коэффиціентами и корнями уравненій будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_2 m_4 + m_3 m_4 = -6$$

или

$$m_1 m_2 + m_3 m_4 + (m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = -6 ,$$

откуда, замѣчая, что

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{и} \quad m_4 = -\frac{1}{m_3} ,$$

получимъ

$$-2 + \left(m_1 - \frac{1}{m_1}\right)\left(m_3 - \frac{1}{m_3}\right) = -6$$

или

$$(m_1{}^2 - 1)(m_3{}^2 - 1) + 4m_1 m_3 = 0 ,$$

что можно представить еще въ слѣдующемъ видѣ

$$(m_1 m_3 + 1)^2 - (m_1 - m_3)^2 = 0 .$$

Слѣдовательно

$$\frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3} = \pm 1 .$$

Такъ какъ первая часть этого равенства представляетъ тангенсъ угла между прямыми, угловые коэффиціенты которыхъ равны m_1 и m_3, то заключаемъ, что всякія двѣ оси симметріи кривой (2), не перпендикулярныя между собою, составляютъ уголъ въ 45^0.

Возможенъ наконецъ случай, когда всѣ три уравненія (5), (6) и (7) удовлетворяются тождественно, т. е. при всякомъ m, и когда, слѣдовательно, всякая прямая, проходящая черезъ центръ, будетъ осью симметріи. Коэффиціенты уравненія (2) удовлетворяютъ въ этомъ случаѣ условіямъ (12) и еще условіямъ

$$A_2 = A_4 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 = A_5 = 3A_3.$$

Слѣдовательно, это уравненіе обращается въ

$$A_1(x^2+y^2)^2 + 6C_1(x^2+y^2) + E = 0$$

и выражаетъ, очевидно, совокупность двухъ концентрическихъ круговъ.

7. Выводъ уравненій (5), (6) и (7), послужившихъ намъ для изслѣдованія всѣхъ возможныхъ случаевъ относительно существованія осей симметріи, можетъ быть основанъ еще на другихъ соображеніяхъ, вытекающихъ изъ того, что сказано нами въ началѣ. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что ось симметріи всякой кривой четнаго порядка, будучи ея прямолинейнымъ діаметромъ, должна быть въ то же время діаметромъ для всякой діаметральной линіи, соотвѣтствующей тому же направленію. Примѣнимъ это къ діаметральнымъ кривымъ второго рода $\triangle_2 f = 0$. Для кривой четвертаго порядка, данной уравненіемъ (2), это будутъ кривыя второго порядка, выражаемыя вообще уравненіемъ

$$(A_1 + 2A_2m + A_3m^2)\,x^2 + 2\,(A_2 + 2A_3m + A_4m^2)\,xy +$$
$$+ (A_3 + 2A_4m + A_5m^2)\,y^2 + (C_1 + 2C_2m + C_3m^2) = 0.$$

Такъ какъ предполагаемая ось симметріи должна совпадать съ одною изъ осей этой кривой, то, обозначая чрезъ α уголъ наклоненія этой оси къ оси абсциссъ, будемъ имѣть, какъ извѣстно изъ теоріи кривыхъ второго порядка,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2(A_2 + 2A_3m + A_4m^2)}{(A_3 - A_1) + 2\,(A_4 - A_2)\,m + (A_5 - A_3)\,m^2}$$

но такъ какъ

$$m = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha + 90^0) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

то

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2m}{1 - m^2}$$

и слѣдовательно

$$\frac{m}{1-m^2} = \frac{-(A_2 + 2A_3m + A_4m^2)}{(A_3 - A_1) + 2(A_4 - A_2)\,m + (A_5 - A_3)\,m^2}.$$

Отсюда, по уничтоженіи знаменателей и приведеніи, и получимъ уравненіе (5).

Уравненіе (6) получимъ точно также, предполагая направленіе сѣкущихъ перпендикулярнымъ къ прежнему, т. е. замѣняя m чрезъ $-\dfrac{1}{m}$.

Что касается уравненія (7), то его получимъ, примѣняя тѣ же разсужденія непосредственно къ уравненію кривой (2). Въ самомъ дѣлѣ, измѣнивши направленіе осей координатъ такъ, чтобы ось абсциссъ совпадала съ осью симметріи, мы будемъ имѣть, что въ новомъ уравненіи исчезнутъ всѣ члены, содержащіе нечетныя степени y и въ частности обратится въ нуль коэффиціентъ при произведеніи xy. Такъ какъ формулы для такого преобразованія координатъ суть

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad \text{и} \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

то этотъ коэффиціентъ будетъ

$$6[-2(C_1 - C_3)\sin\alpha\cos\alpha + 2C_2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)];$$

слѣдовательно

$$(C_3 - C_1)\operatorname{tg}\alpha + C_2(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 0.$$

Здѣсь α имѣетъ то же значеніе, какъ и въ предыдущемъ, а потому, замѣняя $\operatorname{tg}\alpha$ чрезъ $-\dfrac{1}{m}$, мы и получимъ уравненіе (7).

8. Разсмотрѣніе діаметральныхъ кривыхъ различныхъ порядковъ, соотвѣтствующихъ осямъ симметріи, можетъ быть очень полезно при изслѣдованіи возможныхъ частныхъ видовъ центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка или ихъ классификаціи. Если предположимъ, что двѣ перпендикулярныя между собою оси симметріи такой кривой приняты за оси координатъ, то ея уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4 + Dx^2 + Ey^2 + F = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Уравненія ея діаметральныхъ кривыхъ перваго рода, соотвѣтствующихъ сѣкущимъ, перпендикулярнымъ къ этимъ осямъ, будутъ

$$x(2Ax^2 + By^2 + D) = 0 \quad \text{и} \quad y(Bx^2 + 2Cy^2 + E) = 0.$$

Отъ вида и взаимныхъ отношеній кривыхъ второго порядка

$$2Ax^2 + By^2 + D = 0 \quad \text{и} \quad Bx^2 + 2Cy^2 + E = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

должны, очевидно, зависѣть видъ и частныя свойства самой кривой. Вторую изъ этихъ кривыхъ второго порядка г. Постниковъ дѣйствительно разсматриваетъ съ цѣлью классификаціи кривыхъ четвертаго

*

порядка, называя ее основаніемъ. Намъ кажется, что въ видахъ геометрической наглядности и ясности полѣзнѣе разсматривать обѣ эти кривыя совмѣстно. Случаи, когда онѣ обѣ суть эллипсы, обѣ гиперболы, одна эллипсъ, а другая гипербола, когда онѣ пересѣкаются или соприкасаются, когда онѣ подобны и т. д., должны быть особыми случаями по отношенію къ свойствамъ самой кривой (13), также какъ и обратно. Такъ напр., когда кривая (13) имѣетъ четыре оси симметріи, то, согласно сказанному выше, должно быть

$$A = C \quad \text{и} \quad D = E.$$

Слѣдовательно, кривыя (14) въ этомъ случаѣ тождественны и различаются только положеніемъ. Каждая изъ нихъ приводится въ совпаденіе съ другою, будучи повергнута около центра на прямой уголъ.

Систематическое изслѣдованіе центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка на основаніи указанныхъ признаковъ не входитъ, впрочемъ, въ скромныя цѣли настоящей замѣтки.