О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя.

К. А. Андреева *).

1. Не подлежитъ сомнѣнію, что первенство въ разсмотрѣніи и разрѣшеніи вопроса о разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій принадлежитъ Ліувиллю. Во второмъ изъ мемуаровъ, представленныхъ имъ Парижской Академіи Наукъ въ 1832 и 1833 годахъ подъ заглавіемъ: „Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique“ **), этотъ ученый разсмотрѣлъ съ большою подробностью всѣ возможныя частности вопроса для уравненій двухъ первыхъ порядковъ и далъ затѣмъ весьма суммарныя указанія на возможность примѣненія употребленныхъ имъ для этихъ случаевъ сужденій къ уравненіямъ какого угодно высшаго порядка. Неопредѣленность этихъ указаній, главнымъ же образомъ безполезный и не приведенный въ систему разборъ подробностей, могущихъ представиться при разсмотрѣніи всѣхъ коэффиціентовъ уравненія одновременно, составляютъ слабую сторону изслѣдованія Ліувилля. По всей вѣроятности, эти недостатки были причиною того, что способъ Ліувилля для рѣшенія вопроса, имѣющаго важное значеніе въ систематическомъ изложеніи теоріи дифференціальныхъ уравненій, не былъ воспроизведенъ ни въ одномъ изъ трактатовъ, посвященныхъ этой теоріи, и, повидимому, оставался въ забвеніи въ теченіе болѣе полустолѣтія.

Еще Пуассонъ, представлявшій Парижской Академіи докладъ о мемуарахъ Ліувилля, обратилъ вниманіе на эти недостатки, но отсутствіе

*) Сообщеніе, сдѣланное въ засѣданіи Харьк. Мат. Общ. 17-го декабря 1893 г.

**) См. въ „Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences“ t. V, 1838, а также въ Journal de l'Ecole Polytechnique“, t. XIV, 22 cahier, 1833 p. 153—183.

точнаго изложенія метода для уравненій высшихъ порядковъ онъ объяснялъ сложностью вычисленій, зависящею отъ самаго существа вопроса. Это объясненіе едва-ли можно считать достаточнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы ни были сложны вычисленія, приводящія къ окончательному рѣшенію разсматриваемаго вопроса, число алгебраическихъ дѣйствій, изъ которыхъ они слагаются, конечное, и должны существовать общія правила, устанавливающія родъ и послѣдовательность этихъ дѣйствій.

По существу вопросъ о разысканіи раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій представляется въ значительной степени сходнымъ съ вопросомъ о разысканіи раціональныхъ корней алгебраическихъ уравненій съ численными раціональными коэффиціентами. Въ обоихъ вопросахъ полное рѣшеніе нельзя считать даннымъ, пока не дана схема для вычисленій, долженствующихъ приводить къ искомому рѣшенію, каковъ бы ни былъ порядокъ или степень уравненія.

Отсутствіе такой схемы у Ліувилля дѣлаетъ то, что его изслѣдованіе о дифференціальныхъ уравненіяхъ въ названномъ мемуарѣ нужно признать мастерскимъ эскизомъ, намѣчающимъ путь къ нахожденію раціональныхъ рѣшеній этихъ уравненій, но не дающимъ точнаго маршрута для желающихъ идти этимъ путемъ въ отдѣльныхъ частныхъ случаяхъ.

Новая обработка того же вопроса и выработка недостающаго маршрута или схемы представлялась поэтому необходимою въ интересахъ науки и приходится удивляться, если справедливо, что никто изъ ученыхъ въ теченіе болѣе пятидесяти лѣтъ съ появленія мемуаровъ Ліувилля этимъ не занялся.

2. Если не ошибаемся, покойный академикъ В. Г. Имшенецкій, былъ первый послѣ Ліувилля, обратившійся снова къ занимающему насъ вопросу. Въ 1887 году онъ помѣстилъ въ LV томѣ Записокъ Императорской Академіи Наукъ статью подъ заглавіемъ: „Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами“, въ которой разсматриваетъ вопросъ самостоятельно и пролагаетъ другой путь къ его рѣшенію, отличный отъ указаннаго Ліувиллемъ, хотя и близкій къ нему по самой сущности дѣла.

Къ сожалѣнію эта статья носитъ слѣды поспѣшности работы и имѣетъ тотъ же главный недостатокъ, какъ и изслѣдованіе Ліувилля. Въ ней мы также не находимъ полной схематической формулировки предлагаемаго способа *).

---

*) Этотъ недостатокъ не восполненъ и во второй статьѣ В. Г. Имшенецкаго, посвященной тому же предмету и напечатанной въ LVIII томѣ Записокъ Импер. Акад. Наукъ въ 1888 году подъ заглавіемъ: „Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами“.

Не смотря на это, изложенiе В. Г. Имшенецкаго представляетъ многiя выгодныя особенности и, между прочимъ, ту, что, идя указываемымъ имъ путемъ, не приходится дѣлать сразу такого множества частныхъ предположенiй о коэффицiентахъ даннаго уравненiя, какъ это дѣлается у Лiувилля, и легко замѣтить ту послѣдовательность и закономѣрность которымъ должны подчиняться эти предположенiя.

Спустя нѣсколько лѣтъ послѣ появленiя въ печати работы В. Г. Имшенецкаго она подверглась критикѣ со стороны нѣсколькихъ нашихъ ученыхъ, оставившихъ, къ сожалѣнiю, безъ вниманiя указанный выше главный недостатокъ и выставлявшихъ на видъ при посредствѣ частнаго примѣра недостатки второстепеннаго значенiя и, притомъ, легко исправимые *). Это заставило автора работы возвратиться снова къ предмету своихъ изслѣдованiй и дать своему способу небольшое измѣненiе, которое было имъ сообщено Московскому Математическому Обществу въ засѣданiи 19-го мая 1892 года.

За смертью В. Г. Имшенецкаго и не разысканiемъ въ его бумагахъ полнаго текста этого сообщенiя, оно не могло быть напечатано вполнѣ, но сущность его была воспроизведена профессоромъ П. А. Некрасовымъ въ видѣ особой замѣтки, составившей приложенiе къ протоколу одного изъ послѣдующихъ засѣданiй того же Общества **).

3. Одновременно съ этой замѣткой проф. П. А. Некрасовъ напечаталъ свое собственное изслѣдованiе подъ заглавiемъ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденiя алгебраическихъ рацiональныхъ дробныхъ рѣшенiй линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй" ***), представляющее новую обработку того же предмета, доведенную на этотъ разъ до конца и содержащую полную формулировку способа подъ видомъ двухъ особыхъ правилъ (стр. 372 и 379).

По словамъ самого автора, цѣлью этой статьи было дать способу В. Г. Имшенецкаго болѣе полное разъясненiе и такое дальнѣйшее усовершенствованiе, котораго корень заключался бы въ его основныхъ идеяхъ. Нельзя оспаривать, что цѣль эта авторомъ достигнута, но едва ли простѣйшимъ и прямымъ путемъ.

Намъ кажется, что, придерживаясь основныхъ идей В. Г. Имшенецкаго, проф. П. А. Некрасовъ придалъ въ то же время слишкомъ большой вѣсъ нѣкоторымъ его обозначенiямъ и вспомогательнымъ преобразованiямъ. Вслѣдствiе этого его правила, безъ выгоды для результата, даютъ указанiя дѣйствiй не надъ самыми коэффицiентами даннаго уравненiя, а надъ выраженiями, въ которыя они преобразуются лишь для общихъ теоретическихъ сужденiй. Къ тому же эти правила, представляя выводъ изъ предшествующихъ разсужденiй,

*) См. Мат. Сборн. Т. XVII, 1893, стр. 385—391.

**) Тамъ-же, стр. 391—398.

***) Тамъ же. стр. 341—382.

оказываются непонятными въ отдѣльности отъ нихъ и потому не могутъ съ удобствомъ служить схемою для выполненія вычисленій.

Все это заставляетъ насъ думать, что вопросъ остается еще не доведеннымъ до достаточной степени простоты и ясности, и потому мы рѣшаемся представить его въ новомъ изложеніи, имѣя главнымъ образомъ въ виду выводъ возможно простой и общей схемы вычисленій, которыя должны производиться надъ коэффиціентами даннаго линейнаго уравненія для нахожденія его раціональныхъ частныхъ интеграловъ.

Подобно проф. П. А. Некрасову, мы будемъ придерживаться въ нашемъ изложеніи того пути, по которому шелъ въ своихъ изслѣдованіяхъ В. Г. Имшенецкій, отдавая ему предпочтеніе предъ анализомъ Ліувилля главнымъ образомъ потому, что на этомъ пути сразу открывается передъ нами (какъ будетъ показано ниже) рядъ послѣдовательныхъ ступеней, приводящихъ неуклонно къ окончательному и простѣйшему рѣшенію вопроса, чего нельзя сказать о способѣ Ліувилля. Слѣдуя за Ліувиллемъ, мы не видимъ, напротивъ, ни начала, ни конца этого ряда, и примѣняющему этотъ способъ приходится, для установленія послѣдовательности вычисленій, руководствоваться въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ своею собственною сообразительностью.

4. Положимъ, что дано уравненіе

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = V, \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

въ которомъ P_0, P_1, ... P_n и V суть извѣстные полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя.

Помножимъ обѣ части этого уравненія на неопредѣленный полиномъ M и затѣмъ приведемъ его къ виду

$$\frac{d^n}{dx^n}(S_0 y) + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(S_1 y) + \ldots + \frac{d}{dx}(S_{n-1} y) + (S_n y) = MV. \quad . \ (2)$$

Здѣсь S_0, $S_1 \ldots S_n$ суть также полиномы, выражающіеся опредѣленнымъ образомъ чрезъ полиномы P_0, $P_1 \ldots P_n$ и M.

Чтобы получить эти выраженія, разложимъ каждое слагаемое первой части уравненія (2) по формулѣ Лейбница и сравнимъ сумму коэффиціентовъ при производной отъ y порядка $(n-i)$ съ коэффиціентомъ при той же производной въ уравненіи (1), умноженномъ на M. Въ результатѣ будемъ имѣть:

$$S_i + (n-i+1) S'_{i-1} + \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!} S''_{i-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!} S_0^{(i)} = MP_i.$$

Отсюда, измѣненіемъ указателя i и дифференцированіемъ, выводимъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$S_i+(n-i+1)S'_{i-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}S_0^{(i)}=MP_i$$

$$S'_{i-1}+(n-i+2)S''_{i-2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}S_0^{(i)}=(MP_{i-1})'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_1^{(i-1)}+nS_0^{(i)}=(MP_1)^{(i-1)}$$

$$S_0^{(i)}=(MP_0)^{(i)}$$

который представляетъ собою систему $(i+1)$ уравненій первой степени съ $(i+1)$ неизвѣстными S_i, $(S_{i-1})'$, $(S_{i-2})''$, $\ldots$ $S_0^{(i)}$.

Рѣшеніе этой системы по общимъ правиламъ и даетъ для полиномовъ S_i слѣдующее общее выраженіе:

$$\left.\begin{aligned} S_i=MP_i-(n-i+1)(MP_{i-1})'+\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}(MP_{i-2})''-\ldots\\ \ldots(-1)^i\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}(MP_0)^{(i)}.\end{aligned}\right\}(3)$$

Въ частности будемъ имѣть

$$S_n=MP_n-(MP_{n-1})'+(MP_{n-2})''-\ldots+(-1)^n(MP_0)^{(n)},$$

или

$$S_n=(-1)^n[(MP_0)^{(n)}-(MP_1)^{(n-1)}+(MP_2)^{(n-2)}-\ldots+(-1)^nMP_n].\ (4)$$

Выраженія (3) и (4) будутъ имѣть въ послѣдующемъ очень важное значеніе.

5. Допустимъ теперь, что данному уравненію (1) удовлетворяетъ раціональная дробь

$$y=\frac{Z}{Y},$$

подлежащая опредѣленію, и поставимъ себѣ ближайшею задачею найти такой видъ для полинома M, при которомъ всѣ полиномы

$$S_0,\ S_1,\ldots S_{n-1},\ S_n$$

дѣлятся на знаменателя Y этой дроби.

Множитель M, удовлетворяющій этому условію, В. Г. Имшенецкій называлъ интегрирующимъ на томъ основаніи, что при такомъ M, какъ показываетъ самый видъ уравненія (2), за знаменателя Y искомаго раціональнаго рѣшенія этого уравненія можетъ быть принятъ общій наибольшій дѣлитель полиномовъ S_0, $S_1 \ldots S_n$. Числитель же опредѣлится какъ цѣлая функція Z, удовлетворяющая уравненію, которое получимъ, раздѣливши въ уравненіи (2) полиномы S_0, $S_1 \ldots S_n$ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Наша задача будетъ, слѣдовательно, состоять въ нахожденіи интегрирующаго множителя, къ чему, такимъ образомъ, и сводится вся трудность разсматриваемаго вопроса.

Замѣтимъ прежде всего, что если M есть интегрирующій множитель, то произведеніе его на какой угодно полиномъ H будетъ также интегрирующимъ множителемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ M черезъ HM и обозначивъ черезъ $T_0, T_1, \ldots T_n$ полиномы, въ которые обратятся при этомъ $S_0, S_1, \ldots S_n$, получимъ изъ равенства (3) слѣдующее:

$$T_i = HMP_i - (n-i+1)(HMP_{i-1})' + \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}(HMP_{i-2})'' - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}(HMP_0)^{(i)},$$

которое примѣненіемъ формулы Лейбница легко преобразуется въ такое:

$$T_i = HS_i - (n-i+1)H'S_{i-1} + \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}H''S_{i-2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}H^{(i)}S_0.$$

Отсюда и видимъ, что всякій общій дѣлитель всѣхъ S_i будетъ общимъ дѣлителемъ и всѣхъ T_i. Слѣдовательно, при существованіи интегрирующаго множителя, такихъ множителей должно быть безчисленное множество.

Интегрирующій множитель возможно низшей степени, т. е. такой, который уже не будетъ произведеніемъ другого интегрирующаго множителя на цѣлую функцію, мы будемъ называть абсолютно наименьшимъ.

Изъ сказаннаго выше видно, что всякій интегрирующій множитель можетъ служить для нахожденія раціональнаго рѣшенія уравненія (1), но въ то-же время очевидно, что, въ видахъ упрощенія вычисленій и съ цѣлью полученія простѣйшаго результата, нужно стараться найти интегрирующій множитель возможно низшей степени при существующихъ условіяхъ или относительно наименьшій.

6. Для того чтобы полиномъ M былъ интегрирующимъ множителемъ уравненія (1), вполнѣ достаточно, чтобы онъ дѣлалъ дѣлящимися на Y только полиномы

$$S_0, S_1, \dots S_{n-1}.$$

Дѣлимость же на Y полинома S_n есть необходимое слѣдствіе этого условія.

Въ самомъ дѣлѣ, при этомъ условіи всѣ слагаемыя первой части уравненія (2), за исключеніемъ послѣдняго, равно какъ и вторая часть, будутъ функціи цѣлыя. Таковою же функціей должно быть, слѣдовательно, и послѣднее слагаемое $S_n y$.

Эта дѣлимость полинома S_n на общаго дѣлителя полиномовъ S_0, $S_1, \dots S_{n-1}$, принимаемаго за знаменателя Y искомаго раціональнаго рѣшенія даннаго дифференціальнаго уравненія, есть обстоятельство первостепенной важности. Основываясь на немъ, всегда можно достигнуть нахожденія интегрирующаго множителя.

7. Положимъ, что $(x-a)$ есть одинъ изъ линейныхъ множителей знаменатель Y, входящій въ него въ степени α, и допустимъ, что тотъ же множитель входитъ въ интегригующій множитель M въ степени β, такъ что

$$M = (x-a)^\beta N,$$

гдѣ N означаетъ полиномъ, не дѣлящійся на $(x-a)$.

Условимся, далѣе, обозначать чрезъ K всякій полиномъ, дѣлящійся на $(x-a)$, и чрезъ $P_0(a)$, $P_1(a) \dots P_0'(a)$, $P_1'(a) \dots$ значенія функцій P_0, $P_1, \dots$ и ихъ производныхъ при $x = a$.

Въ такомъ случаѣ по теоремѣ Тейлора будемъ имѣть:

$$P_0 = P_0(a) + K, \quad P_1 = P_1(a) + K, \dots$$

Вслѣдствіе этого, полагая $\beta > n-1$, получимъ: *)

$$(MP_0)^{(n)} = \Big\{(x-a)^\beta [NP_0(a) + K]\Big\}^{(n)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n}[\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)NP_0(a) + K],$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \Big\{(x-a)^\beta [NP_1(a) + K]\Big\}^{(n-1)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+1}[\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+2)NP_1(a) + K],$$

. . . .

*) Возможность неравенства $\beta > n-1$ не можетъ подлежать сомнѣнію, если не ставить необходимымъ условіемъ, чтобы разсматриваемый интегрирующій множитель былъ абсолютно наименьшій.

и потому по формулѣ (4):

$$S_n = (-1)^n (x-a)^{\beta-n}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1)NP_0(a)+K].$$

Въ то же время, какъ видно изъ формулы (3), будемъ имѣть вообще:

$$S_i = (x-a)^{\beta-i}\,U_i\,,$$

гдѣ U_i есть нѣкоторый опредѣленный полиномъ.

Слѣдовательно, полиномы

$$S_0\,,\ S_1\,,\ldots S_{n-1}$$

будутъ имѣть общимъ множителемъ

$$(x-a)^{\beta-n+1}$$

и для того, чтобы множитель M былъ интегрирующимъ и притомъ возможно меньшимъ, нужно положить

$$\beta - n + 1 = \alpha.$$

Такъ какъ при этомъ и полиномъ S_n долженъ дѣлиться на $(x-a)^{\beta-n+1}$, то, принимая во вниманіе послѣднее выраженіе для этого полинома, будемъ имѣть

$$P_0(a) = 0\,,$$

ибо полиномъ N не дѣлится на $(x-a)$, а множители β, $(\beta-1)$, ... всѣ положительны.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что всякій линейный множитель, входящій въ знаменателя Y раціональнаго рѣшенія, есть дѣлитель полинома P_0, и потому его можно считать извѣстнымъ.

8. На основаніи доказаннаго будемъ имѣть по теоремѣ Тейлора

$$P_0 = (x-a)P_0'(a) + K$$

и потому, полагая $\beta > n-2$, получимъ:

$$(MP_0)^{(n)} = \Big\{(x-a)^{\beta+1}[NP_0'(a)+K]\Big\}^{(n)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+1}[(\beta+1)\beta\ldots(\beta-n+2)NP_0'(a)+K]\,,$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \Big\{(x-a)^{\beta}[NP_1(a)+K]\Big\}^{(n-1)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+1}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+2)NP_1(a)+K]\,,$$

и т. д.

Слѣдовательно, согласно равенству (4),

$$S_n=(-1)^n(x-a)^{\beta-n+1}\Big\{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+2)N[(\beta+1)P_0'(a)-P_1(a)]+K\Big\}.$$

Въ тоже время, какъ показываетъ общая формула (3), будемъ имѣть:

$$S_i=(x-a)^{\beta-i+1}\,U_i.$$

Полиномы $S_0, S_1, \dots S_{n-1}$ будутъ, слѣдовательно, имѣть общимъ множителемъ

$$(x-a)^{\beta-n+2}$$

и для того, чтобы полиномъ M былъ возможно меньшимъ интегрирующимъ множителемъ, нужно положить

$$\beta-n+2=\alpha.$$

При этомъ полиномъ S_n долженъ дѣлиться также на $(x-a)^{\beta-n+2}$, для чего, какъ видно изъ послѣдняго выраженія для S_n, должно выполняться условіе:

$$(\beta+1)P_0'(a)-P_1(a)=0\,,\quad\dots\dots\dots\dots(5)$$

т. е. полиномъ

$$(\beta+1)P_0'-P_1$$

долженъ дѣлиться на $(x-a)$.

Это возможно въ двухъ случаяхъ: 1) когда множитель $(x-a)$ входитъ въ общаго наибольшаго дѣлителя D_1 полиномовъ P_0' и P_1, и 2) когда D_1 не дѣлится на $(x-a)$.

Остановимся сперва на второмъ изъ нихъ.

Въ этомъ случаѣ изъ равенства (5) можно по данному a опредѣлить соотвѣтственное β, т. е. найти показателя степени, въ которой биномъ $(x-a)$, взятый изъ числа дѣлителей полинома P_0, долженъ входить въ интегрирующаго множителя M.

Согласно предположеніямъ, на которыхъ основывается нашъ выводъ, β должно быть цѣлымъ, положительнымъ, конечнымъ числомъ, большимъ $(n-2)$. Поэтому въ случаѣ, когда изъ уравненія (5) такого значенія для β не получается, $(x-a)$ вовсе не будетъ дѣлителемъ полинома M.

9. Если подъ $(x-a)$ будемъ подразумѣвать не какой-либо опредѣленный биномъ, служащій дѣлителемъ полинома P_0, а любой изъ линейныхъ множителей этого послѣдняго, не входящій въ D_1, то a будетъ общимъ корнемъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}(\beta+1)P_0'-P_1&=0\,,\\ X_1&=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\dots\dots\dots\dots(6)$$

и

гдѣ X_1 есть произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей P_0, не входящихъ въ D_1.

Слѣдовательно, для опредѣленія β нужно будетъ въ этомъ случаѣ исключить изъ двухъ послѣднихъ уравненій неизвѣстное x, что дастъ нѣкоторое алгебраическое уравненіе

$$F_1(\beta)=0, \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

содержащее только одно неизвѣстное β. При этомъ первое изъ уравненій (6) можетъ быть предварительно раздѣлено на D_1. Что же касается второго, то его первая часть X_1, какъ показываетъ самое ея значеніе, легко опредѣляется слѣдующимъ образомъ.

Сперва находимъ произведеніе X всѣхъ линейныхъ множителей полинома P_0, раздѣливъ для этого P_0 на его общаго наибольшаго дѣлителя съ P_0', и затѣмъ раздѣляемъ X на его общаго наибольшаго дѣлителя съ D_1.

Уравненіе (7) будетъ, вообще говоря, степени выше первой. Только цѣлыя, положительныя, большія $(n-2)$, числа, ему удовлетворяющія, будутъ показателями линейныхъ множителей полинома M изъ числа входящихъ въ X_1.

Если назовемъ черезъ β_1 наибольшій изъ цѣлыхъ, положительныхъ корней уравненія (7), то интегрирующій множитель M можетъ быть отыскиваемъ подъ видомъ

$$M=X_1^{\beta_1}M_1,$$

гдѣ M_1 есть полиномъ, состоящій только изъ такихъ линейныхъ множителей полинома P_0, которые входятъ въ D_1.

Понятно, что въ этомъ видѣ интегрирующій множитель не будетъ, вообще говоря, наименьшимъ. Онъ будетъ, однако, возможно меньшимъ изъ тѣхъ, которые можно найти, не прибѣгая къ разложенію полинома X_1 на множители.

10. Обратимся теперь къ первому изъ названныхъ выше случаевъ дѣлимости на $(x-a)$ полинома

$$(\beta+1)P_0'-P_1,$$

т. е. положимъ, что $(x-a)$ входитъ множителемъ въ D_1.

Въ этомъ случаѣ по теоремѣ Тейлора будемъ имѣть:

$$P_0=\frac{(x-a)^2}{2!}[P_0''(a)+K],$$

$$P_1=(x-a)\,[P_1'(a)+K].$$

Слѣдовательно, при условіи $\beta > n-3$, должно быть:

$$(MP_0)^{(n)} = \left\{\frac{(x-a)^{\beta+2}}{2!}[NP_0''(a)+K]\right\}^{(n)} =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta-n+2}}{2!}[(\beta+2)(\beta+1)\ ..(\beta-n+3)NP_0''(a)+K],$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \left\{(x-a)^{\beta+1}[NP_1'(a)+K]\right\}^{(n-1)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+2}[(\beta+1)\beta\ldots(\beta-n+3)NP_1'(a)+K],$$

$$(MP_2)^{(n-2)} = \left\{(x-a)^{\beta}[NP_2(a)+K]\right\}^{(n-2)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+2}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+3)NP_2(a)+K],$$

и потому, по формулѣ (4),

$$S_n = (-1)^n(x-a)^{\beta-n+2}\left\{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+3)N\left[\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P_0''(a)-(\beta+1)P_1'(a)+P_2(a)\right]+K\right\}.$$

Въ то же время, на основаніи общей формулы (3), имѣемъ:

$$S_i = (x-a)^{\beta-i+2}U_i,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$(x-a)^{\beta-n+3}$$

будетъ общимъ дѣлителемъ полиномовъ

$$S_0,\ S_1,\ldots S_{n-1},$$

и если M есть интегрирующій множитель, то можно положить

$$\beta-n+3=\alpha.$$

Такъ какъ при этомъ на $(x-a)^{\beta-n+3}$ долженъ дѣлиться полиномъ S_n, то, принимая во вниманіе послѣднее выраженіе для S_n, мы будемъ имѣть:

$$\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P_0''(a)-(\beta+1)P_1'(a)+P_2(a)=0. \quad . \quad . \quad (8)$$

Отсюда и опредѣлится β подобно тому, какъ ранѣе изъ уравненія (5), если только $(x-a)$ не будетъ входить множителемъ въ общаго наибольшаго дѣлителя D_2 полиномовъ P_0'', P_1' и P_2.

11. Подъ $(x-a)$ можетъ быть подразумѣваемъ въ предыдущемъ любой изъ линейныхъ множителей полинома D_1, не входящій въ D_2. Произведеніе X_2 всѣхъ такихъ множителей найдемъ, раздѣливши общій

наибольшій дѣлитель $\triangle_1$ полиномовъ X и D_1 на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $\triangle_1$ и D_2.

Тогда a будетъ общимъ корнемъ уравненій:

$$\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P''_0-(\beta+1)P'_1+P_2=0$$

и

$$X_2=0,$$

такъ что, исключивъ изъ этихъ уравненій неизвѣстное x (причемъ первое должно быть предварительно раздѣлено на D_2), получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

$$F_2(\beta)=0,$$

служащее для опредѣленія β.

При этомъ по условіямъ, положеннымъ въ основаніе нашихъ разсужденій, β должно быть цѣлымъ, положительнымъ, конечнымъ числомъ, большимъ $(n-3)$.

Пусть β_2 будетъ наибольшій изъ корней послѣдняго уравненія, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ. Такъ какъ въ такомъ случаѣ всякій линейный множитель полинома X_2 будетъ входить въ $X_2^{\beta_2}$ въ степени не низшей чѣмъ въ M, то интегрирующій множитель можетъ быть отыскиваемъ подъ видомъ

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}M_2.$$

12. Для нахожденія показателей степеней, въ которыхъ входятъ въ интегрирующій множитель такіе линейные дѣлители полинома P_0, которые содержатся въ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ D_2 полиномовъ P''_0, P'_1, P_2, придется, очевидно, повторять періодически тѣ же разсужденія. При этомъ число послѣдовательныхъ коэффиціентовъ даннаго уравненія (1), вліяющихъ на значеніе опредѣляемаго показателя, будетъ постепенно возрастать, равно какъ и порядокъ ихъ производныхъ.

Изысканіе окончится лишь тогда, когда мы дойдемъ до ряда полиномовъ

$$P_0^{(k)},\ P_1^{(k-1)},\ P_2^{(k-2)}\ldots,$$

которые не будутъ имѣть общаго дѣлителя, входящаго въ P_0, что необходимо должно случиться (вслѣдствіе конечности степеней полиномовъ P_0, $P_1\ldots$), если не при $k\leqq n$, то при $k>n$.

Случай, когда $k>n$, не представляетъ никакихъ особенностей, какъ для примѣненія общаго хода сужденій, такъ и для формулировки вывода. Чтобы выяснить все это, повторимъ предыдущія разсужденія въ общемъ видѣ.

Положимъ, что на $(x-a)$ дѣлятся полиномы

$$P_0,\ P_1,\ P_2, \ldots P_{k-1},$$

а также и ихъ послѣдовательныя производныя до

$$P_0^{(k-1)},\ P_1^{(k-2)},\ P_2^{(k-3)}, \ldots P'_{k-2}$$

включительно.

Здѣсь k означаетъ какое угодно цѣлое положительное число, но при $k > n$ должно, очевидно, полагать: $P_{n+1} = 0,\ P_{n+2} = 0, \ldots$

По теоремѣ Тейлора мы будемъ имѣть:

$$P_0 = \frac{(x-a)^k}{k!} P_0^{(k)}(a) + K,$$

$$P_1 = \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} P_1^{(k-1)}(a) + K,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

вслѣдствіе чего получимъ, полагая $\beta > n-k-1$,

$$(MP_0)^{(n)} = \left\{ \frac{(x-a)^{\beta+k}}{k!} [NP_0^{(k)}(a) + K] \right\}^{(n)} =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+k-n}}{k!} [(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)NP_0^{(k)}(a) + K]$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \left\{ \frac{(x-a)^{\beta+k-1}}{(k-1)!} [NP_1^{(k-1)}(a) + K] \right\}^{(n-1)} =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+k-n}}{(k-1)!} [(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)NP_1^{(k-1)}(a) + K]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

При помощи этихъ значеній выраженіе (4) для S_n приметъ видъ:

$$S_n = (-1)^n (x-a)^{\beta+k-n} \left\{ N \left[\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!} P_0^{(k)}(a) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!} P_1^{(k-1)}(a) + \ldots \right] + K \right\}.$$

Въ тоже время по общей формулѣ (3) будемъ имѣть:

$$S_i = (x-a)^{\beta+k-i} U_i,$$

откуда заключаемъ, что

$$(x-a)^{\beta+k-n+1}$$

будетъ общимъ дѣлителемъ полиномовъ

$$S_0,\ S_1,\ \ldots S_{n-1},$$

такъ что можно положить

$$\beta+k-n+1=\alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \tag{9}$$

Но для того, чтобы на этого дѣлителя дѣлился и полиномъ S_n, нужно, какъ показываетъ предыдущее выраженіе для S_n, чтобы β удовлетворяло условію:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k\,!}\,P_0^{(k)}(a)- \\[2ex] -\dfrac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)\,!}\,P_1^{(k-1)}(a)+\ldots=0, \end{array}\right\} \tag{10}$$

откуда значеніе β и можетъ быть опредѣлено.

Въ первой части послѣдняго равенства число слагаемыхъ равно $k+1$, когда $k<n$, и $n+1$, когда $k\overline{\geqslant}n$. Кромѣ того, при $k<n$, эти слагаемыя будутъ имѣть, какъ мы видѣли ранѣе, общихъ множителей, зависящихъ отъ β, чего не будетъ, очевидно, при $k\overline{\geqslant}n$.

Если общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P_0^{(k)},\ P_1^{(k-1)},\ \ldots P_k,$$

есть постоянная величина или такая цѣлая функція, которая не имѣетъ общихъ множителей съ P_0, то уравненіе (10) будетъ опредѣлять показателя β для всякаго линейнаго множителя полинома P_0, входящаго въ общій наибольшій дѣлитель D_{k-1} полиномовъ

$$P_0^{(k-1)},\ P_1^{(k-2)},\ \ldots P_{k-1}.$$

Обозначая чрезъ X_k произведеніе всѣхъ такихъ линейныхъ множителей, будемъ имѣть, что соотвѣтствующіе имъ показатели, съ которыми они входятъ въ интегрирующій множитель M, опредѣлятся, какъ цѣлыя, положительныя и притомъ большія чѣмъ $n-k-1$, если $k<n-1$, рѣшенія уравненія

$$F_k(\beta)=0,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \tag{11}$$

получаемаго по исключеніи неизвѣстнаго x изъ двухъ уравненій:

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}-$$

$$-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}+\ldots=0$$

и

$$X_k=0.$$

Интегрирующій множитель M можетъ быть разсматриваемъ поэтому, какъ содержащій множителя $X_k^{\beta_k}$, гдѣ β_k есть наибольшій изъ цѣлыхъ, положительныхъ корней уравненія (11), большихъ $n-k-1$.

Изъ сказаннаго видимъ, что, при

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}\ldots X_k^{\beta_k},$$

полиномы

$$S_0,\ S_1,\ldots S_{n-1},\ S_n$$

будутъ дѣлиться на всѣ линейные множители, могущіе входить въ знаменателя Y искомаго раціональнаго рѣшенія даннаго уравненія (1), и притомъ взятые въ степеняхъ не низшихъ, чѣмъ въ этомъ знаменателѣ. Эти полиномы будутъ, слѣдовательно, дѣлиться на Y.

Такимъ образомъ, при извѣстныхъ $X_1,\ X_2,\ldots X_k$ и $\beta_1,\ \beta_2\ldots\beta_k$, интегрирующій множитель нужно считать найденнымъ.

Само собою понятно, что несуществованіе интегрирующаго множителя еще не есть признакъ несуществованія дробнаго раціональнаго рѣшенія, такъ какъ полиномы $S_0,\ S_1,\ldots S_n$ могутъ имѣть общаго дѣлителя независимо отъ интегрирующаго множителя, т. е. при $M=1$.

Прибавимъ къ сказанному, что общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $S_0,\ S_1,\ldots S_n$ будетъ общимъ знаменателемъ всѣхъ раціональныхъ дробей, удовлетворяющихъ данному уравненію (1), если при разысканіи числителя получится нѣсколько рѣшеній.

13. Все вышеизложенное приводитъ насъ къ возможности формулировать правила для нахожденія интегрирующаго множителя, служащаго для разысканія дробныхъ раціональныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія (1), въ видѣ слѣдующей *схемы вычисленій*.

1) Сперва нужно составить изъ коэффиціентовъ даннаго уравненія и ихъ производныхъ таблицу полиномовъ:

$$\left.\begin{array}{l} P_0, \\ P_0', \quad P_1, \\ P_0'', \quad P_1', \quad P_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_0^{(k)}, \quad P_1^{(k-1)}, \ldots P_{k-1}', \; P_k \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_0^{(n)}, \quad P_1^{(n-1)}, \ldots P_{n-1}', \; P_n \\ P_0^{(n+1)}, P_1^{(n)}, \ldots P_{n-1}'', \; P_n' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\}, \; \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

отыскивая для полиномовъ каждой строки (начиная со второй) общихъ наибольшихъ дѣлителей D_1, D_2, D_3, ... и заканчивая ее тою строкою, для которой общій наибольшій дѣлитель не будетъ имѣть общихъ множителей съ P_0.

2) Затѣмъ нужно составить рядъ полиномовъ:

$$X, \; X_1, \; X_2 \ldots X_k, \ldots X_n, \; X_{n-1} \ldots,$$

опредѣляя каждый изъ нихъ по коэффиціентамъ даннаго уравненія слѣдующимъ образомъ.

Полиномъ X есть произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей, входящихъ въ P_0, и получается раздѣленіемъ P_0 на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_0$ полиномовъ P_0 и P_0'.

Полиномъ X_1 есть произведеніе линейныхъ множителей, входящихъ въ x, но не входящихъ въ D_1. Онъ получается раздѣленіемъ X на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_1$ полиномовъ X и D_1, такъ что $X = X_1 \triangle_1$.

Полиномъ X_2 есть произведеніе линейныхъ множителей, входящихъ въ $\triangle_1$, но не входящихъ въ D_2, и, слѣдовательно, получается раздѣленіемъ $\triangle_1$ на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_2$ полиномовъ $\triangle_1$ и D_2, такъ что $\triangle_1 = X_2 \triangle_2$.

И вообще

$$X_k = \frac{\triangle_{k-1}}{\triangle_k},$$

гдѣ $\triangle_k$ означаетъ общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ $\triangle_{k-1}$ и D_k.

3) Послѣ этого нужно составить уравненія:

$$F_1(\beta) = 0, \; F_2(\beta) = 0, \ldots F_k(\beta) = 0, \ldots F_n(\beta) = 0, \; F_{n+1}(\beta) \ldots$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ извѣстнаго x изъ двухъ уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}- \\ -\dfrac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_0^{(k-1)}+\ldots=0 \\ \text{и} \\ X_k=0 \end{array}\right\}(13)$$

при $k=1, 2, \ldots n, (n+1), \ldots$

4) Наконецъ нужно найти рядъ чиселъ:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k, \ldots \beta_n, \beta_{n+1}, \ldots$$

изъ которыхъ каждое, напр. β_k, есть наибольшій изъ цѣлыхъ положительныхъ, и притомъ большихъ $(n-k-1)$, корней уравненія

$$F_k(\beta)=0$$

и, въ случаѣ не существованія такихъ корней, должно считаться равнымъ нулю.

Послѣ всѣхъ этихъ вычисленій интегрирующій множитель M опредѣлится формулою

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}\ldots X_k^{\beta_k}\ldots X_n^{\beta_n}X_{n+1}^{\beta_{n+1}}\ldots \ldots \ldots (14)$$

14. Вычисленія по предложенной схемѣ не допускаютъ никакого упрощенія лишь въ томъ случаѣ, когда полиномы $X_1, X_2\ldots$ не могутъ быть разложены на множители. Когда же какой-либо изъ нихъ можно разложить на множители, напр.

$$X_k=V_kW_k,$$

то составленіе уравненія $F_k(\beta)=0$ достигается проще, если въ системѣ уравненій (13) будемъ брать вмѣсто уравненія $X_k=0$ отдѣльно два уравненія $V_k=0$ и $W_k=0$.

Проще всего уравненіе $F_k(\beta)=0$ составляется, очевидно, тогда, когда X_k состоитъ только изъ одного линейнаго множителя или можетъ быть разложено на такіе множители.

15. Приложимъ сказанное къ примѣрамъ. Пусть дано уравненіе

$$x(x+1)^2(x-2)^4\frac{d^2y}{dx^2}+(x-3)(x+1)(x-2)^4\frac{dy}{dx}-$$

$$-(35x^2-51x+17)(x+1)(x-2)^2y=-(31x^3-114x^2+123x-36).$$

Здѣсь имѣемъ:

$$P_0 = x(x+1)^2(x-2)^4\,, \quad P_1 = (x-3)(x+1)(x-2)^4\,,$$
$$P_3 = (35x^2 - 51x + 17)(x+1)(x-2)^2.$$

Такъ какъ полиномъ P_0 состоитъ изъ линейныхъ дѣлителей x, $(x+1)$, $(x-2)$, то интегрирующій множитель будетъ имѣть видъ

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}(x-2)^{\beta_3}.$$

Слѣдовательно, нужно найти β_1, β_2 и β_3.

Для опредѣленія β_1 полагаемъ $x=0$; тогда

$$P_0(0) = 0\,,$$
$$P_0'(0) = 16\,,\ P_1(0) = -3.16\,.$$

Уравненіе, опредѣляющее β, будетъ, слѣдовательно,

$$(\beta+1)16 + 3.16 = 0\,,$$

откуда $\beta = -4$, и потому $\beta_1 = 0$.

Для опредѣленія β_2 полагаемъ $x = -1$; тогда

$$P_0(-1) = 0\,,$$
$$P_0'(-1) = 0\,,\ P_1(-1) = 0\,,$$
$$P_0''(-1) = -2.3^4\,,\ P_1'(-1) = -4.3^4\,,\ P_2(-1) = 0\,,$$

и уравненіе, опредѣляющее β, будетъ

$$-\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2}.2.3^4 + (\beta+1).4.3^4 = 0$$

или

$$-81(\beta+1)[(\beta+2)-4] = 0\,,$$

откуда $\beta = -1$, $\beta = 2$. Слѣдовательно, $\beta_2 = 2$.

Для опредѣленія β_3 полагаемъ $x = 2$; тогда

$$P_0(2) = 0\,,$$
$$P_0'(2) = 0\,,\ P_1(2) = 0\,,$$
$$P_0''(2) = 0\,,\ P_1'(2) = 0\,,\ P_2(2) = 0\,,$$
$$P_0'''(2) = 0\,,\ P_1''(2) = 0\,,\ P_2'(2) = 0\,,$$
$$P_0^{\text{IV}}(2) = 4!.2.3^2,\ P_1'''(2) = 0\,,\ P_2'' = -45.2.3\,,$$

и уравненіе, опредѣляющее β, будетъ

$$\frac{(\beta+4)(\beta+3)}{4\,!}.4\,!.2.3^2-\frac{1}{2!}.45.2.3=0$$

или

$$9[2(\beta+4)(\beta+3)-15]=0.$$

Такъ какъ это уравненіе не имѣетъ положительныхъ корней, то $\beta_3=0$.

Итакъ, интегрирующій множитель есть $(x+1)^2$.

Поэтому будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}
MP_0 &= x(x+1)^4(x-2)^4,\\
(MP_0)' &= (x+1)^3(x-2)^3(9x^2-5x-2),\\
(MP_0)'' &= 4(x+1)^2(x-2)^2(18x^3-20x^2-7x+4),\\
MP_1 &= (x-3)(x+1)^3(x-2)^4,\\
(MP_1)' &= 4(x+1)^2(x-2)^3(2x^2-6x+1),\\
MP_2 &= -(35x^2-51x+7)(x+1)^3(x-2)^2.
\end{aligned}$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned}
S_0 &= MP_0 = x(x+1)^4(x-2)^4,\\
S_1 &= MP_1-2(MP_0') = -(x+1)^3(x-2)^3(17x^2-5x-10),\\
S_2 &= MP_2-(MP_1)'+(MP_0)'' = (x+1)^3(x-2)^2(29x^2-53x+17).
\end{aligned}$$

Отсюда видимъ, что знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія, будучи общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцій S_0, S_1 и S_2, есть

$$(x+1)^3(x-2)^2.$$

Для опредѣленія же числителя будемъ имѣть уравненіе вида (2):

$$\frac{d^2}{dx^2}[x(x+1)(x-2)^2z]-\frac{d}{dx}[(x-2)(17x^2-5x-10)z]+(29x^2-53x+17)z=$$
$$=-(x+1)^2(31x^3-114x^2+123x-36)$$

или

$$[(x^4-3x^3+4x)z]''-[(17x^3-39x^2+20)z]'+(29x^2-53x+17)z=$$
$$=-31x^5+52x^4+74x^3-96x^2-51x+36.$$

Полагая $z = Ax^\alpha + v$, находимъ изъ сравненія показателей и коэффиціентовъ старшихъ членовъ:

$$\alpha = 3, \ A = 1$$

и, слѣдовательно,

$$z = x^3 + v.$$

Вслѣдствіе этого для опредѣленія v получимъ уравненіе

$$[(x^4 - 3x^3 + 4x)v]'' - [(17x^3 - 39x^2 + 20)v]' + (29x^2 - 53x + 17)v =$$
$$= 57x^3 - 84x^2 - 51x + 36.$$

Полагая $v = Bx^\beta + w$, получимъ изъ сравненія старшихъ членовъ:

$$\beta = 1, \ B = -3;$$

слѣдовательно,

$$v = -3x + w.$$

По подстановкѣ этого значенія въ предыдущее уравненіе будемъ имѣть:

$$[(x^4 - 3x^2 + 4x)w]'' - [17x^3 - 39x^2 + 20)w]' + (29x^2 - 53x + 17)w = 0,$$

откуда

$$w = 0,$$

и потому

$$z = x^3 - 3x = x(x^2 - 3).$$

Итакъ, данное уравненіе имѣетъ единственное раціональное рѣшеніе:

$$y = \frac{x(x^2 - 3)}{(x + 1)^3(x - 2)^2}.$$

16. Возьмемъ еще уравненіе

$$x^2(x + 1)^5 \frac{dy}{dx} + x(x + 1)^2(3x^3 + 19x^2 + 17x + 5)y =$$
$$= 4(9 + 9x - x^2),$$

предложенное профессоромъ К. А. Поссе *).

*) Матем. Сборн. Т. XVII, 1893. стр. 389.

Здѣсь

$$P_0 = x^2(x+1)^5\,,\ P_1 = x(x+1)^2(3x^3+19x^2+17x+5).$$

Интегрирующій множитель долженъ имѣть видъ

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}.$$

Для опредѣленія β_1, полагаемъ $x=0$; тогда

$$P_0(0)=0\,,$$

$$P_0'(0)=0\,,\ P_1(0)=0\,,$$

$$P_0''(0)=2\,,\ P_1'(0)=5\,,$$

и уравненіе, опредѣляющее β, будетъ

$$\frac{(\beta+2)}{2}.2-5=0\,,$$

или

$$\beta-3=0.$$

Слѣдовательно,

$$\beta_1=3.$$

Полагая, для опредѣленія β_2, $x=-1$, будемъ имѣть:

$$P_0(-1)=0\,,$$

$$P_0'(-1)=0\,,\ P_1(-1)=0\,,$$

$$P_0''(-1)=0\,,\ P_1'(-1)=0$$

$$P_0'''(-1)=0\,,\ P_1''(-1)=-2.4\,,$$

и потому β должно опредѣляться изъ уравненія

$$\frac{\beta+3}{3\,!}.0+\frac{1}{2\,!}.2.4=0.$$

Но это уравненіе конечнаго значенія для β не даетъ; стало быть

$$\beta_2=0.$$

Интегрирующій множитель будетъ, слѣдовательно,

$$M=x^3.$$

По умноженіи на этого множителя, данное уравненіе обращается въ

$$x^5(x+1)^5\frac{dy}{dx}+x^4(x+1)^2(3x^3+19x^2+17x+5)y=4x^3(9+9x-x^2)$$

или

$$[x^5(x+1)^5y]'+x^4(x+1)^2[(3x^3+19x^2+17x+5)-5(x+1)^2(2x+1)]y=$$
$$=4x^3(9+9x-x^2)$$

или

$$[x^5(x+1)^5y]'-x^5(x+1)^2(7x^2+6x+3)y=4x^3(9+9x-x^2).$$

Знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія будетъ, слѣдовательно,

$$x^5(x+1)^2$$

и потому, полагая

$$y=\frac{z}{x^5(x+1)^2},$$

получимъ:

$$[(x+1)^3z]'-(7x^2+6x+3)z=4x^3(9+9x-x^2).$$

Подобно тому, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ находимъ, что это уравненіе удовлетворяется цѣлою функціей

$$z=4x^3+3$$

и потому

$$y=\frac{4x^3+3}{x^5(x+1)^2}.$$

17. Предложенная въ 13-мъ параграфѣ схема вычисленій даетъ правила для нахожденія интегрирующаго множителя, по которому знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія опредѣляется чрезъ посредство полиномовъ S_0, S_1, ... S_n, какъ ихъ общій наибольшій дѣлитель.

Легко видѣть, однако, что между интегрирующимъ множителемъ и знаменателемъ искомаго рѣшенія существуетъ прямая связь, въ силу которой одна изъ этихъ функцій опредѣляется непосредственно черезъ другую. Связь эта выражается равенствомъ (9), представляющимъ зависимость между показателями степеней α и β, въ которыхъ одинъ и тотъ же линейный множитель $(x-a)$ входитъ въ искомаго знаменателя Y и въ интегрирующаго множителя M.

Изъ общихъ соображеній параграфа 12-го слѣдуетъ, однако, что, допуская равенство (9), мы признаемъ въ то же время существующимъ такое цѣлое положительное значеніе для β, при которомъ на общаго дѣлителя

$$(x-a)^{\beta+k-n+1}$$

полиномовъ $S_0, S_1 \ldots S_{n-1}$ дѣлится и полиномъ S_n. Если же такого значенія не существуетъ, то, какъ показываетъ выраженіе для S_n, биномъ $(x-a)$ будетъ входить множителемъ въ общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ полиномовъ $S_0, S_1 \ldots S_n$ въ степени $\beta + k - n$. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ вмѣсто равенства (9) будемъ имѣть

$$\beta + k - n = \alpha.$$

На этомъ основаніи, имѣя интегрирующій множитель въ видѣ

$$M = (x-a_1)^{\beta_1}(x-a_2)^{\beta_2}\ldots(x-a_k)^{\beta_k}\ldots,$$

мы можемъ вычислить знаменателя искомой дроби по формулѣ

$$Y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}\ldots,$$

гдѣ вообще

$$\alpha_k = \beta_k + k - n + 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

при существованіи цѣлаго положительнаго значенія для β_k, и

$$\alpha_k = \beta_k + k - n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

въ противномъ случаѣ.

Въ первомъ изъ приведенныхъ выше примѣровъ мы имѣли

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}(x-2)^{\beta_3},$$

причемъ только для β_2 получилось цѣлое положительное значеніе $\beta_2 = 2$.

Такъ какъ мы видѣли кромѣ того, что при $x=0$, $k=1$; при $x=-1$, $k=2$ и при $x=2$, $k=4$, то знаменатель Y опредѣлится формулою

$$Y = x^{\alpha_1}(x+1)^{\alpha_2}(x-2)^{\alpha_3},$$

гдѣ

$$\alpha_1 = 0 + 1 - 2, \quad \text{слѣд. } \alpha_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = 2 + 2 - 2 + 1 = 3,$$

$$\alpha_3 = 0 + 4 - 2 = 2,$$

т. е.

$$Y = (x+1)^3(x-2)^2.$$

Во второмъ примѣрѣ мы имѣли

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2},$$

причемъ $\beta_1 = 3$, а для β_2 не получилось цѣлаго конечнаго значенія.

Такъ какъ при этомъ мы видѣли, что для перваго множителя $k=2$, а для второго $k=3$, то

$$\alpha_1 = 3+2-1+1=5,$$

$$\alpha_2 = 0+3-1=2.$$

Слѣдовательно,

$$Y = x^5(x+1)^2.$$

Изъ равенствъ (15) и (16) видно, что съ прибавленіемъ къ β_k какого нибудь цѣлаго положительнаго числа увеличивается на то же число и α_k. Отсюда заключаемъ, что этими равенствами можно пользоваться для нахожденія знаменателя искомой дроби и въ томъ случаѣ, когда найденный интегрирующій множитель не есть наименьшій, и между прочимъ при интегрирующемъ множителѣ, найденномъ, согласно предложенной нами схемѣ, въ видѣ (14).

Но такой знаменатель также не будетъ, вообще говоря, наименьшимъ, т. е. онъ будетъ имѣть общихъ дѣлителей съ числителемъ. Этого, впрочемъ, нельзя избѣжать вообще, не прибѣгая къ разложенію полинома P_0 на линейные множители.

18. Вмѣсто того, чтобы находить знаменателя искомаго раціональнаго рѣшенія по найденному интегрирующему множителю, можно воспользоваться соотношеніемъ (9) между β и α для того, чтобы самыя уравненія, служащія для опредѣленія β, преобразовать въ уравненія, опредѣляющія α.

Мы видѣли въ параграфѣ 12-мъ, что для опредѣленія β служитъ вообще уравненіе вида

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}(a) -$$

$$-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a) + \ldots = 0.$$

По замѣнѣ въ немъ β выраженіемъ чрезъ α, взятымъ изъ равенства (9), получимъ уравненіе, служащее для опредѣленія α,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{k!}P_0^{(k)}(a) - \\ &-\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a) + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (17)$$

Чтобы пользоваться этимъ уравненіемъ для нахожденія значеній α, соотвѣтствующихъ смыслу вопроса, нужно, однако, принять во вниманіе слѣдующее.

Такъ какъ $(\beta + 1)$ есть число положительное, то изъ соотношенія (9) слѣдуетъ, что

$$\alpha > k - n,$$

условіе, не включающееся въ $\alpha > 0$, только при $k > 1$ и въ этомъ случаѣ существенное.

Въ то же время изъ выраженія для S_i въ параграфѣ 12-мъ видно, что при $k > n$, всѣ полиномы $S_0, S_1 \dots S_n$ дѣлятся на $(x - a)$ въ степени по меньшей мѣрѣ равной $(k - n)$.

Вслѣдствіе этихъ замѣчаній при опредѣленіи показателя α изъ уравненія (17) нужно различать случаи: когда $k \overline{<} n$ и когда $k > n$. Въ первомъ случаѣ искомымъ показателемъ будетъ всякое цѣлое, положительное, конечно число, удовлетворяющее этому уравненію, и при несуществованіи такихъ чиселъ, должно положить $\alpha = 0$. Во второмъ же случаѣ искомый показатель будетъ равняться всякому цѣлому положительному корню уравненія (17), большему $(k - n)$, и при несуществованіи такихъ корней долженъ считаться равнымъ $(k - n)$.

Пользуясь уравненіемъ (17) для непосредственнаго нахожденія знаменателя искомаго раціональнаго рѣшенія въ первомъ изъ приведенныхъ выше примѣровъ, будемъ имѣть:

При $x = 0$, $k = 1$,

$$\alpha(\alpha + 1)P_0'(0) - \alpha P_1(0) = 0$$

или

$$\alpha(\alpha + 1).16 = \alpha.3.16 = 16\alpha(\alpha + 4) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_1 = 0.$$

При $x = -1$, $k = 2 = n$,

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_0''(-1) - \alpha P_1'(-1) + P_2(-1) = 0$$

или

$$-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}.2.3^4 + \alpha.4.3^4 = -3^4\alpha(\alpha + 1 - 4) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_2 = 3.$$

При $x = 2$, $k = 4 > n$,

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{4!} P_0^{\mathrm{IV}}(2) - \frac{\alpha}{3!} P_1'''(2) + \frac{1}{2!} P_2''(2) = 0$$

или

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{4!} . 4! . 2 . 3^2 - \frac{1}{2!} . 45 . 2 . 3 = 0$$

или

$$9[2\alpha(\alpha+1) - 15] = 0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_3 = k - n = 4 - 2 = 2.$$

Итакъ,

$$Y = (x+1)^3 (x-2)^2.$$

Самая схема вычисленій, предложенная нами выше для нахожденія интегрирующаго множителя, превращается въ служащую для опредѣленія знаменателя искомаго раціональнаго интеграла, если въ ней уравненія

$$F_1(\beta) = 0,\ F_2(\beta) = 0, \ldots F_k(\beta) = 0 \ldots$$

будутъ замѣнены уравненіями

$$\Phi_1(\alpha) = 0,\ \Phi_2(\alpha) = 0, \ldots \Phi_k(\alpha) = 0 \ldots$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ неизвѣстнаго x изъ двухъ уравненій:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{k!} P_0^{(k)} - \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)}{(k-1)!} P_1^{(k-1)} + \ldots = 0$$

и

$$X_k = 0,$$

при $k = 1, 2, 3 \ldots$

19. Изъ того, что нахожденіе знаменателя раціональнаго интеграла даннаго линейнаго уравненія (1) можетъ быть достигнуто непосредственно, т. е. безъ предварительнаго опредѣленія интегрирующаго множителя и полиномовъ $S_0, S_1, \ldots S_n$, было бы ошибочно заключить, что и самый интегралъ получается такимъ путемъ проще, т. е. при помощи менѣе сложныхъ вычисленій.

Въ самомъ дѣлѣ, когда извѣстны полиномы S_0, S_1, $\ldots S_n$, то, какъ мы видѣли ранѣе, будетъ извѣстно въ формѣ (2) и уравненіе, опредѣляющее числителя искомой дроби. Если же извѣстенъ только знаменатель этой дроби, то уравненіе, служащее для опредѣленія числителя, должно быть еще найдено. Въ какомъ бы видѣ мы его ни предполагали, задача будетъ состоять въ нахожденіи $(n+1)$ полиномовъ, служащихъ коэффиціентами этого уравненія.

Вычисленія для нахожденія этихъ полиномовъ по знаменателю Y представляютъ тѣ же затрудненія и по меньшей мѣрѣ ту же степень сложности, какъ и вычисленія полиномовъ S_0, $S_1 \ldots S_n$ по множителю M.

Что же касается опредѣленія числителя искомой дроби, какъ цѣлой функціи, удовлетворяющей найденному дифференціальному уравненію, то оно представляетъ одинаковыя трудности, въ какомъ бы изъ двухъ видовъ (1) и (2) это уравненіе ни было получено.

Такимъ образомъ заключаемъ, что разысканіе раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя нельзя считать пріемомъ менѣе выгоднымъ даже въ практическомъ отношеніи, чѣмъ какой-либо другой пріемъ, служащій для той же цѣли. О теоретическомъ значеніи этого пріема, какъ орудія для вывода схемы вычисленій, предоставляемъ судить читателю на основаніи всего вышеизложеннаго.

20. Въ заключеніе скажемъ нѣсколько словъ о тѣхъ видахъ интегрирующаго множителя, въ которыхъ онъ разыскивался В. Г. Имшенецкимъ.

Изъ опредѣленія функцій X, X_1, $X_2 \ldots X_k \ldots$ слѣдуетъ, что

$$X = X_1 X_2 \ldots X_k \ldots$$

Поэтому, обозначая буквою γ наибольшій изъ показателей β_1, β_2, $\ldots$ въ выраженіи интегрирующаго множителя

$$M = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_k^{\beta_k} \ldots,$$

будемъ имѣть

$$X^\gamma = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_k^{\beta_k} \ldots H = MH,$$

гдѣ H есть нѣкоторый полиномъ.

Слѣдовательно, X^γ есть также интегрирующій множитель.

Если положимъ, далѣе, что Q есть какая-нибудь извѣстная цѣлая функція, дѣлящаяся на X, то получимъ

$$Q^\gamma = X^\gamma G$$

и въ частности

$$P_0^{\gamma} = X^{\gamma} G_0\,,$$

гдѣ G и G_0 суть нѣкоторые полиномы.

Слѣдовательно, Q^{γ} и P_0^{γ} будутъ также интегрирующіе множители.

Виды интегрирующаго множителя

$$P_0^{\gamma} \text{ и } X^{\gamma}$$

и суть тѣ, которые разсматривались В. Г. Имшенецкимъ.

Разысканіе множителя подъ этими видами имѣетъ ту теоретическую выгоду, что задача сводится при этомъ на опредѣленіе одного только числа γ. Вмѣстѣ съ тѣмъ и самый процессъ вычисленій можетъ быть формулированъ проще, а именно слѣдующимъ образомъ.

Для нахожденія интегрирующаго множителя подъ видомъ P_0^{γ} нужно составить рядъ уравненій

$$F_1(\beta) = 0\,,\; F_2(\beta) = 0\,, \ldots F_k(\beta) \ldots,$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ неизвѣстнаго x изъ уравненія

$$P_0 = 0$$

и уравненія

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k\,!} P_0^{(k)} -$$

$$-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)\,!} P_1^{(k-1)} + \ldots = 0$$

при $k = 1\,,\ 2\,,\ 3\,, \ldots$

Наибольшій изъ цѣлыхъ положительныхъ корней составленныхъ такимъ образомъ уравненій будетъ искомымъ значеніемъ γ.

Замѣтимъ, что замѣна каждаго изъ уравненій

$$X_1 = 0\,,\; X_2 = 0\,, \ldots X_k = 0\,, \ldots$$

разсматривавшихся нами прежде, однимъ и тѣмъ же

$$P_0 = 0$$

позволительна потому, что P_0 содержитъ множителемъ каждый изъ полиномовъ X_1, $X_2 \ldots X_k \ldots$, вслѣдствіе чего и уравненіе

$$F_k(\beta) = 0$$

(каково бы въ немъ ни было k) можетъ получить отъ такой замѣны только нѣсколько лишнихъ корней, не утрачивая всѣхъ прежнихъ. Эти лишніе корни не нарушаютъ, однако, правильности результата, такъ какъ въ случаѣ, когда между ними не будетъ большаго чѣмъ наибольшій изъ прежнихъ корней, значеніе числа γ не измѣнится; въ противномъ же случаѣ это значеніе увеличится, отъ чего P_0^γ не перестанетъ быть интегрирующимъ множителемъ.

Допущеніе излишнихъ множителей въ полиномахъ, надъ которыми производятся вычисленія, не вредящее дѣлу теоретически, можетъ, впрочемъ, повлечь за собою слишкомъ большое усложненіе вычисленій. Въ этомъ и заключается единственное неудобство разысканія интегрирующаго множителя подъ тѣми видами, въ которыхъ онъ разсматривался В. Г. Имшенецкимъ.