Гипотетическая среда Больтцмана
и
теорія Герца.

А. П. Грузинцева.

Больтцманъ въ концѣ прошлаго года опубликовалъ работу *), въ которой даетъ механическое толкованіе свойствъ гипотетической среды — („электромагнитной среды", какъ онъ ее называетъ, т. е. свѣтоваго эфира, по всей вѣроятности), приводящее его къ уравненіямъ Максуэлля въ теоріи электричества и магнетизма. Хотя свойства, приписываемыя Больтцманомъ той универсальной срединѣ, кинетическое состояніе которой обусловливаетъ электромагнитныя и оптическія явленія въ ней, совершенно гипотетическаго характера, но такъ какъ, съ одной стороны, они не противорѣчатъ общимъ взглядамъ физиковъ на сущность физическихъ явленій, а съ другой — крайне важно въ настоящее время имѣть хотя приблизительную картину кинетическаго состоянія діэлектрической универсальной среды, то мы думаетъ, что не безполезно будетъ разсмотрѣть предлагаемое Больтцманомъ. Задавшись такой цѣлью и вдумываясь въ соображенія мюнхенскаго физика, не трудно замѣтить, что его теорію должно дополнить условіемъ „несжимаемости электромагнитной среды"; когда же мы введемъ это условіе въ общія механическія уравненія Больтцмана, то увидимъ, что онѣ приводятъ не къ уравненіямъ Максуэлля, какъ полагаетъ Больтцманъ, а къ уравненіямъ Герца. Такой результатъ показываетъ всю важность предположеній Больтцмана и заставляетъ обработать ихъ съ болѣе общей точки зрѣнія черезъ введеніе силъ на границѣ срединъ, разсматривая „электромагнитную среду", какъ *упругую несжимаемую жидкость*, а не упругое твердое тѣло, какъ приходилось разсматривать „свѣтовой эфиръ" въ эластиціонныхъ теоріяхъ свѣта.

Такъ какъ расширеніе точки зрѣнія Больтцмана измѣняетъ результаты его теоріи и даетъ болѣе полную картину тѣхъ движеній, которыя

*) Wiedemann's Annalen, Bd. XLVIII, S. 78—99.

выполняются внутри діэлектрической средины, то мы раздѣлили настоящую замѣтку на двѣ части. *Въ первой* мы разсмотримъ теорію Больтцмана въ томъ видѣ, какъ онъ ее далъ самъ, дополнивъ ее лишь только въ одномъ пунктѣ, а именно введемъ въ уравненіе движенія условіе „несжимаемости" средины,—условіе, о которомъ Больтцманъ упоминаетъ, но не пользуется имъ *), что, по нашему мнѣнію, неправильно.

Во второй части я дополняю силы, приложенныя къ частицамъ средины согласно теоріи Больтцмана, новыми силами, которыя должны быть приложены къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину или, лучше, отдѣляющей ее отъ другой, т. е. отъ подобной же среды, но заполняющей другое тѣло. Эти силы, приложенныя къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину, мнѣ кажется, необходимо должны существовать, такъ какъ на поверхности, отдѣляющей одно тѣло отъ другого, могутъ происходить, да и дѣйствительно происходятъ, особыя явленія (напримѣръ, явленіе оптической поляризаціи), а разъ имѣетъ мѣсто явленіе, необходимо допустить существованіе силъ, вызывающихъ его.

I.

Изложимъ теперь теорію Больтцмана. Онъ предполагаетъ, что каждая частица „электромагнитной среды", или эфира, выполняетъ нѣкоторое движеніе общаго характера, т. е. поступательное и вращательное. Пусть

$$u\,,\quad v\,,\quad w$$

будутъ проекціи перемѣщенія частицы $M(x\,,\,y\,,\,z)$ на координатныя оси, а

$$\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma$$

проекціи удвоенной скорости вращенія эфирнаго элемента на тѣ же оси; тогда:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\\ \beta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\\ \gamma &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Къ частицѣ M, которую предполагаемъ внутри *изотропной* средины, ограниченной нѣкоторой поверхностью, приложены, по Больтцману, силы:

*) Его стѣсняетъ необходимость допускать въ такомъ случаѣ силы „гидростатическаго давленія", но, какъ увидимъ, эти силы исключаются.

1. Ускорительныя, работа которыхъ за элементъ времени можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\delta T = \frac{k d\tau}{4\pi}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial t} + v'\frac{\partial v'}{\partial t} + w'\frac{\partial w'}{\partial t}\right) dt\,, \quad \ldots\ldots \text{(b)}$$

если масса единицы объема эфира будетъ:

$$\frac{k}{4\pi}\,,$$

а элементъ объема средины около точки $M(x\,,\,y\,,\,z)$ будетъ:

$$d\tau\,,$$

и кромѣ того:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}\,,\quad v' = \frac{\partial v}{\partial t}\,,\quad w' = \frac{\partial w}{\partial t}\,.$$

2. Сопротивленія среды движенію точки M; силу сопротивленія Больтцманъ принимаетъ пропорціональной скорости частицы, т. е. проекціи этой силы будутъ:

$$\lambda_1 u' d\tau\,,\quad \lambda_1 v' d\tau\,,\quad \lambda_1 w' d\tau\,,$$

гдѣ λ_1 коэффиціентъ пропорціональности.

Элементарная работа этихъ силъ будетъ:

$$\delta R = \lambda_1 d\tau (u'^2 + v'^2 + w'^2)\, dt\,. \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Эта работа обращается внутри средины въ теплоту, которая извѣстна подъ именемъ „теплоты Джауля".

3. Затѣмъ Больтцманъ допускаетъ существованіе силъ сопротивленія вращенію элемента; эти силы пропорціональны проекціямъ $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,$ а слѣдовательно проекціи ихъ, обозначая коэффиціентъ пропорціональности черезъ $\frac{1}{4\pi\mu}$, будутъ:

$$\frac{\alpha d\tau}{4\pi\mu}\,,\quad \frac{\beta d\tau}{4\pi\mu}\,,\quad \frac{\gamma d\tau}{4\pi\mu}\,.$$

Работа ихъ должна состоять въ стремленіи уничтожить вращеніе элемента, т. е. сообщить ему перемѣщеніе, проекціи котораго должны быть:

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,dt\,,\quad -\frac{\partial\beta}{\partial t}\,dt\,,\quad -\frac{\partial\gamma}{\partial t}\,dt\,;$$

слѣдовательно, эта работа можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\delta G = -\frac{d\tau}{4\pi\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)dt \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (\mathrm{d})$$

4. Наконецъ, къ точкѣ M приложены внѣшнія силы, проекціи которыхъ пусть будутъ:

$$Xd\tau\,,\quad Yd\tau\,,\quad Zd\tau\,,$$

а слѣдовательно, элементарная работа ихъ будетъ:

$$\delta U = (Xu' + Yv' + Zw')d\tau\, dt \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (\mathrm{e})$$

Сложивъ выраженія (b), (c), (d) и (e) и взявъ интегралъ по всему объему средины, мы, по закону сохраненія энергіи, получимъ:

$$\int(\delta T + \delta G + \delta R + \delta U) = 0\,,$$

т. е.

$$dt\int d\tau\left\{k\left(u'\frac{du'}{dt}+v'\frac{dv'}{dt}+w'\frac{dw'}{dt}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{dt}+\beta\frac{\partial\beta}{dt}+\gamma\frac{\partial\gamma}{dt}\right)+\right.$$
$$\left.+4\pi\lambda_1(u'^2+v'^2+w'^2)+4\pi(Xu'+Yv'+Zw')\right\}=0\,.\,\,.\,.\, (\mathrm{f})$$

Преобразуя это равенство при помощи интегрированія по частямъ, послѣ подстановки значеній

$$\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma$$

изъ равенства (a), Больтцманъ получаетъ уравненія движенія въ томъ видѣ, въ какомъ ихъ далъ Максуэлль; но при этомъ онъ опустилъ изъ вида, что количества

$$u'dt\,,\quad v'dt\,,\quad w'dt$$

не совершенно произвольны, а должны удовлетворять нѣкоторому соотношенію. Дѣйствительно, вслѣдствіе несжимаемости средины имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

или, по дифференцированіи по t:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0\,.\,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (\mathrm{g})$$

Вотъ этому уравненію и должны удовлетворять значенія $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$.

Чтобы ввести условіе (g) въ равенство (f) мы умножаемъ это уравненіе на $H\,dt\,d\tau$, если H—неизвѣстная функція координатъ (x, y, z) и времени t, беремъ интегралъ по всему объему и прикладываемъ результатъ къ равенству (f); получаемъ:

$$dt\int d\tau\left\{k\left(u'\frac{\partial u'}{\partial t}+v'\frac{\partial v'}{\partial t}+w'\frac{\partial w'}{\partial t}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+4\pi\lambda_1(u'^2+v'^2+w'^2)+4\pi(Xu'+Yv'+Zw')+H\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\right\}=0. \text{(h)}$$

Но при помощи равенствъ (a) имѣемъ:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{\partial w'}{\partial y}-\frac{\partial v'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y};$$

поэтому получимъ, пользуясь преобразованіемъ Грина:

$$\int\frac{d\tau}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)=-\int d\tau\left\{u'\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+v'\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\right]+w'\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)\right]\right\}-\int\frac{dS}{\mu}\left[u'(C_1\beta-B_1\gamma)+\right.$$

$$\left.+v'(A_1\gamma-C_1\alpha)+w'(B_1\alpha-A_1\beta)\right]\quad\ldots\ldots\text{(k)}$$

$$\int H d\tau\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)=-\int d\tau\left(u'\frac{\partial H}{\partial x}+v'\frac{\partial H}{\partial y}+w'\frac{\partial H}{\partial z}\right)-$$

$$-\int H dS(A_1u'+B_1v'+C_1w').\quad\ldots\ldots\ldots\text{(l)}$$

Въ правыхъ частяхъ этихъ равенствъ первые интегралы относятся ко всему объему, занятому срединой, а вторые—ко всѣмъ точкамъ поверхности, ограничивающей этотъ объемъ, и кромѣ того dS обозначаетъ элементъ поверхности, а

$$A_1,\ \ B_1,\ \ C_1$$

косинусы угловъ нормала къ поверхности, проведеннаго внутрь объема.

Подставляя эти значенія интеграловъ изъ равенствъ (k) и (l) въ равенство (h), получимъ:

$$dt\int d\tau\left\{u'\left[k\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial u}{dt}+4\pi X-\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\right.$$

$$+v'\left[k\frac{\partial^2 v}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial v}{dt}+4\pi Y-\frac{\partial H}{\partial y}\right]+$$

$$\left.+w'\left[k\frac{\partial^2 w}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial w}{dt}+4\pi Z-\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}+$$

$$+dt\int dS\left\{u'\left[C_1\frac{\beta}{\mu}-B_1\frac{\gamma}{\mu}-A_1H\right]+v'\left[A_1\frac{\gamma}{\mu}-C_1\frac{\alpha}{\mu}-B_1H\right]+\right.$$

$$\left.+w'\left[B_1\frac{\alpha}{\mu}-A_1\frac{\beta}{\mu}-C_1H\right]\right\}=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(f')}$$

Теперь имѣемъ право считать $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$ совершенно произвольными количествами, а потому послѣднее равенство распадается на слѣдующія двѣ системы уравненій:

А. *внутри* средины:

$$\left.\begin{aligned}
k\frac{\partial^2 u}{dt^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial u}{dt}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-4\pi X+\frac{\partial H}{\partial x}\\
k\frac{\partial^2 v}{dt^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial v}{dt}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-4\pi Y+\frac{\partial H}{\partial y}\\
k\frac{\partial^2 w}{dt^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial w}{\delta t}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-4\pi Z+\frac{\partial H}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;\text{(A)}$$

и В. *на границѣ* средины:

$$\left.\begin{aligned}
C_1\beta-B_1\gamma&=A_1H\mu\\
A_1\gamma-C_1\alpha&=B_1H\mu\\
B_1\alpha-A_1\beta&=C_1H\mu
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(B)}$$

Если въ этихъ уравненіяхъ положимъ:

$$H=0\,,$$

то они обратятся въ уравненія, полученныя Больтцманомъ, какъ легко можно убѣдиться *).

---

*) L. c. стр. 82, уравненія (12); разница только въ обозначеніяхъ.

Предполагая средину неограниченной, мы увидимъ, что уравненія (B) сами собой удовлетворяются, ибо на безконечности всѣ функціи:

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad H$$

обращаются въ нуль. Такимъ образомъ, для неограниченной средины условія на границахъ удовлетворяются; что же касается средины, ограниченной нѣкоторой поверхностью, то Больтцманъ вмѣсто системы (B) (при $H = 0$) выводитъ другую, состоящую въ равенствѣ проекцій α, β, γ и u', v', w' на касательную плоскость; проекціи же на нормалъ къ поверхности не равны. Подробный выводъ этихъ условій Больтцмана можно найти въ его „Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und Lichtes", II Theil, S. 19—21 (Leipzig 1893). Но такой пріемъ совершенно искусственный: основное уравненіе движенія въ срединѣ должно дать и условія на границахъ, какъ это показано во *второй* части этой замѣтки. Уравненія (A) заключаютъ въ себѣ неизвѣстную функцію H, входящую въ видѣ членовъ:

$$\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial z},$$

аналогичныхъ проекціямъ „гидростатическаго давленія" въ уравненіяхъ гидродинамики; хотя подобныя силы ни Максвелль, ни Герцъ не разсматривали, но онѣ не вредятъ дѣлу, ибо, вслѣдствіе физической неопредѣленности функціи H, уравненія (A) не будутъ окончательными: эта функція H должна быть исключена изъ нихъ *). Для исключенія продифференцируемъ 3ье уравненіе въ системѣ (A) по y, 2ое по z и изъ перваго результата вычтемъ второй; получимъ при помощи (a) въ предположеніи, что силы

$$X, \quad Y, \quad Z$$

имѣютъ потенціалъ:

$$k\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \Delta\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) - \frac{\partial l_1}{\partial x},$$

---

*) Если желаемъ опредѣлить аналитически эту функцію, то продифференцируемъ уравненія (A) по x, y, z и результаты сложимъ; получимъ вслѣдствіе равенства (g):

$$\Delta H = 4\pi\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Если силы X, Y, Z удовлетворяютъ тождественно уравненію:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

то функція H опредѣлится изъ болѣе простого уравненія:

$$\Delta H = 0.$$

гдѣ:

$$l_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \ldots\ldots\ldots \text{(m)}$$

Положимъ:

$$\int_0^t \alpha dt = A\varepsilon\xi\,, \quad \int_0^t \beta dt = A\varepsilon\eta\,, \quad \int_0^t \gamma dt = A\varepsilon\zeta\,, \ldots\ldots \text{(n)}$$

считая время отъ момента начала движенія, т. е. отъ момента, когда всѣ функціи α, β, γ, u, v, w равны нулю, и подразумѣвая подъ A и ε двѣ постоянныя.

При такихъ положеніяхъ предыдущее уравненіе можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\Delta\left(\frac{\xi}{\mu}\right) - \frac{\partial l'}{\partial x}\right],$$

гдѣ

$$l' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta}{\mu}\right) \ldots\ldots\ldots \text{(p)}$$

Интегрируя по t и помня, что для $t = 0$ всѣ функціи равны нулю, получаемъ:

$$k\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial t} = \Delta\frac{\xi}{\mu} - \frac{\partial l'}{\partial x} \ldots\ldots\ldots \text{(q)}$$

Если примемъ, что μ постоянно, и положимъ:

$$k = A^2\varepsilon\,, \quad \lambda_1 = A^2\lambda\,, \ldots\ldots\ldots \text{(r)}$$

то уравненіе (q) обратимъ въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\varkappa\frac{\partial\xi}{\partial t} = \omega^2\left(\Delta\xi - \frac{\partial l}{\partial x}\right), \ldots\ldots \text{(q bis)}$$

гдѣ

$$\varkappa = \frac{\lambda_1}{k}\,, \quad \omega^2 = \frac{1}{k\mu}$$

и

$$l = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}. \ldots\ldots\ldots \text{(s)}$$

Уравненіе (q bis) и ему аналогичныя съ η и ζ тождественны съ уравненіями (XIII) въ моей „Электромагнитной теоріи свѣта“ (стр. 11), выведенными изъ общихъ уравненій Г. Герца.

Разсмотримъ ближе положенія (n). Подставляя значенія α, β, γ изъ (n) въ равенства (a), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ A\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ A\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (\mathrm{t})$$

а это уравненія (XI) моей теоріи (стр. 10).

Если внѣшнихъ силъ нѣтъ, т. е., если

$$X = Y = Z = 0\,,$$

тогда изъ уравненій (A) можемъ получить систему (X) стр. 9 моей „Электромагнитной теоріи свѣта".

Дѣйствительно, положимъ:

$$H = \frac{\partial H_1}{\partial t}\,,$$

тогда первое изъ уравненій (A) будетъ при помощи (a):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{k\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi\lambda_1 u - \frac{\partial H_1}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{A\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right\},$$

откуда:

$$k\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi\lambda_1 u - \frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{A\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

или, если примемъ въ разсчетъ обозначенія (r):

$$A\mu\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi A\mu\varkappa(u - u_0) = \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\,,$$

и два подобныхъ уравненія для v и w.

Въ нихъ положено:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = 4\pi A^2\lambda u_0\,,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = 4\pi A^2\lambda v_0\,,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} = 4\pi A^2\lambda w_0\,.$$

Такимъ образомъ, получимъ уравненія (X) стр. 9; кромѣ того, видимъ, что

$$H_1 = 4\pi A^2 \lambda \psi.$$

Хотя, какъ показано дальше, при

$$X = Y = Z = 0$$

функція $H = 0$, но функція H_1 будетъ существовать, и она будетъ функціей только координатъ (x, y, z); въ этомъ убѣждаемся прямымъ интегрированіемъ по t уравненій (A): H_1 явится какъ постоянное интегрированія.

Займемся теперь уравненіями (B). Исключая изъ нихъ H, найдемъ:

$$\frac{\alpha}{A_1} = \frac{\beta}{B_1} = \frac{\gamma}{C_1}, \ldots \ldots \ldots \ldots (u)$$

что показываетъ, что вращеніе элемента эфира происходитъ въ плоскости касательной къ поверхности, ограничивающей средину.

Равенства (u) показываютъ, что если средина безпредѣльна, то

$$H = 0$$

на границѣ средины. Если силы X, Y, Z удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

то тогда

$$H = 0$$

вездѣ.

Равенства (u) даютъ для ξ, η, ζ подобныя же соотношенія:

$$\frac{\xi}{A_1} = \frac{\eta}{B_1} = \frac{\zeta}{C_1} \ldots \ldots \ldots \ldots (v)$$

II.

Хотя мы и получили вполнѣ опредѣленныя рѣшенія, но во всякомъ случаѣ нашъ анализъ не полонъ, ибо несомнѣнно, что на границѣ срединъ дѣйствуютъ нѣкоторыя силы, къ разсмотрѣнію которыхъ и перейдемъ.

Пусть

$$X_n, \quad Y_n, \quad Z_n$$

будутъ проекціи силъ приложенныхъ къ каждому элементу dS поверхности, ограничивающей средину; въ такомъ случаѣ работа этихъ силъ за безконечно-малый элементъ времени будетъ:

$$dt\int dS(X_n u' + Y_n v' + Z_n w') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

и въ уравненіяхъ (f) и (f′) прибавится въ лѣвой части этотъ членъ (α).

Преобразуя эти уравненія такъ же, какъ и выше, мы найдемъ для всякой точки *внутри* средины тѣ же уравненія (A), а для точекъ на границахъ получимъ новую систему, а именно:

$$\left.\begin{aligned} C_1\beta - B_1\gamma - A_1H\mu + X_n\mu = 0 \\ A_1\gamma - C_1\alpha - B_1H\mu + Y_n\mu = 0 \\ B_1\alpha - A_1\beta - C_1H\mu + Z_n\mu = 0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{B bis})$$

Если умножимъ эти равенства на dt и возьмемъ интегралъ отъ 0 до t, то эти уравненія дадутъ при помощи (n):

$$\left.\begin{aligned} C_1\eta - B_1\zeta - A_1H_1 + \Xi = 0 \\ A_1\zeta - C_1\xi - B_1H_1 + H = 0 \\ B_1\xi - A_1\eta - C_1H_1 + Z = 0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{C})$$

гдѣ положено:

$$\int_0^t H\mu dt = A\varepsilon H_1 ,$$

$$\frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t X_n\mu dt = \Xi , \quad \frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t Y_n\mu dt = H , \quad \frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t Z_n\mu dt = Z . \; . \; . \; (\beta)$$

Не трудно видѣть, что Ξ, H, Z суть проекціи нѣкотораго вектора P, т. е., что

$$\Xi = P\cos(Px) , \quad H = P\cos(Py) , \quad Z = P\cos(Pz) . \; . \; . \; (\gamma)$$

Выведемъ слѣдствія изъ условій (C).

Сначала напишемъ уравненія (C) въ болѣе ясномъ видѣ.

Пусть

$$\varrho = +\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

и

$$\frac{\xi}{\varrho} = \cos(\varrho x) , \quad \frac{\eta}{\varrho} = \cos(\varrho y) , \quad \frac{\zeta}{\varrho} = \cos(\varrho z) .$$

Введемъ два направленія: S и T; первое перпендикулярное къ плоскости nMP, а другое перпендикулярное къ плоскости nMS, тогда для косинусовъ угловъ этихъ перпендикуляровъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\cos(Sx)\sin(Pn) &= C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)\\ \cos(Sy)\sin(Pn) &= A_1\cos(Pz) - C_1\cos(Px)\\ \cos(Sz)\sin(Pn) &= B_1\cos(Px) - A_1\cos(Py)\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (\delta)$$

затѣмъ

$$\left.\begin{aligned}\cos(Tx) &= B_1\cos(Sz) - C_1\cos(Sy)\\ \cos(Ty) &= C_1\cos(Sx) - A_1\cos(Sz)\\ \cos(Tz) &= A_1\cos(Sy) - B_1\cos(Sx)\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

Напишемъ уравненія (C) въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\Xi = P\cos(Px) &= A_1H_1 + \varrho\,[B_1\cos(\varrho z) - C_1\cos(\varrho y)]\\ H = P\cos(Py) &= B_1H_1 + \varrho\,[C_1\cos(\varrho x) - A_1\cos(\varrho z)]\\ Z = P\cos(Pz) &= C_1H_1 + \varrho\,[A_1\cos(\varrho y) - B_1\cos(\varrho x)]\end{aligned}\right\}\ldots (\text{C bis})$$

Умножимъ эти равенства сначала на A_1, B_1, C_1, а потомъ на $\cos(\varrho x)$, $\cos(\varrho y)$, $\cos(\varrho z)$, и складывая результаты, получимъ:

$$P\cos(Pn) = H_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\varkappa)$$

$$P\cos(P\varrho) = H_1\cos(\varrho n) \ldots\ldots\ldots\ldots (\lambda)$$

Уравненіе ($\varkappa$) показываетъ, что функція H_1 численно равна проекціи давленія P на нормалъ къ поверхности.

Умножимъ тѣ же уравненія (C bis) на $\cos(Sx)$, $\cos(Sy)$ и $\cos(Sz)$ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$P\cos(PS) = \varrho\,\{\cos(\varrho x)\,[C_1\cos(Sy) - B_1\cos(Sz)] + \ldots\}$$

или при помощи (ε):

$$P\cos(PS) = -\varrho\cos(\varrho T).$$

Но по условію

$$\cos(PS) = 0\,,$$

слѣдовательно:

$$\cos(\varrho T) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mu)$$

т. е. прямая T перпендикулярна къ ϱ: значитъ, векторъ ϱ лежитъ въ плоскости nMS.

Итакъ, векторы P и ϱ лежатъ въ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, что видно и изъ сравненія равенствъ $(\varkappa)$ и (λ), которыя даютъ по исключеніи H_1:

$$\cos(P\varrho) = \cos(Pn)\cos(\varrho n).$$

Умножая уравненія (ε) на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$ и $\cos(Pz)$, по сложеніи получимъ:

$$\cos(PT) = \cos(Sx)\left[C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)\right] +$$
$$+ \cos(Sy)\left[A_1\cos(Pz) - C_1\cos(Px)\right] + \cos(Sz)\left[B_1\cos(Px) - A_1\cos(P_1 y)\right]$$

или, при помощи (δ):

$$\cos(PT) = \sin(Pn). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\nu)$$

Умножимъ теперь уравненія (C bis) на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$ и $\cos(Pz)$; получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P = H_1\cos(Pn) + \varrho\left\{\cos(\varrho x)\left[C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)\right] + \ldots\right\},$$

т. е.

$$P = H_1\cos(Pn) + \varrho\sin(Pn)\cos(\varrho S). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\omega)$$

Подставляя сюда значеніе H_1 изъ равенства $(\varkappa)$, получимъ:

$$P\sin^2(Pn) = \varrho\sin(Pn)\cos(\varrho S)$$

или, если P не совпадаетъ съ n:

$$P\sin(Pn) = \varrho\cos(\varrho S). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\pi)$$

Возведемъ уравненія (C bis) въ квадратъ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$P^2 = H_1^2 + \varrho^2\sin^2(\varrho n). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\varrho)$$

Складывая же квадраты $(\varkappa)$ и (π), получимъ:

$$P^2 = H_1^2 + \varrho^2\cos^2(\varrho S). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\tau)$$

Сравнивая съ (ϱ), находимъ:

$$\cos(\varrho S) = \pm\sin(\varrho n). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\sigma)$$

Къ тѣмъ же результатамъ мы пришли бы, если бы представили формулы (C bis) въ иной формѣ. Съ этой цѣлью умножимъ второе изъ уравненій (C bis) на C_1, третье на $-B_1$ и сложимъ результаты; найдемъ при помощи (σ) первое изъ ниженаписанныхъ уравненій; остальныя два получатся подобнымъ же образомъ:

$$P\sin(Pn)\cos(Sx)=\varrho[\cos(\varrho x)-A_1\cos(\varrho n)],$$
$$P\sin(Pn)\cos(Sy)=\varrho[\cos(\varrho y)-B_1\cos(\varrho n)],$$
$$P\sin(Pn)\cos(Sz)=\varrho[\cos(\varrho z)-C_1\cos(\varrho n)].$$

Отсюда, умножая на $\cos(\varrho x)$, $\cos(\varrho y)$, $\cos(\varrho z)$, получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P\sin(Pn)\cos(S\varrho)=\varrho\sin^2(\varrho n).$$

Умножимъ на $\cos(Sx)$, $\cos(Sy)$, $\cos(Sz)$ и сложимъ; найдемъ:

$$P\sin(Pn)=\varrho\{\cos(\varrho S)-\cos(\varrho n)\cos(nS)\},$$

т. е.

$$P\sin(Pn)=\varrho\cos(\varrho S).$$

Сравнивая съ предыдущимъ, получимъ равенство (σ).

Умножимъ на $\cos(Tx)$, $\cos(Ty)$, $\cos(Tz)$, получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P\sin(Pn)\cos(ST)=\varrho\{\cos(\varrho T)-\cos(\varrho n)\cos(Tn)\},$$

т. е.

$$\cos(\varrho T)=0.$$

Умножимъ на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$, $\cos(Pz)$; получимъ:

$$P\sin(Pn)\cos(PS)=\varrho\{\cos(P\varrho)-\cos(\varrho n)\cos(Pn)\},$$

т. е.

$$\cos(\varrho P)=\cos(nP)\cos(n\varrho),$$

или: плоскости nMP и $nM\varrho$ взаимно перпендикулярны.

Если давленіе P перпендикулярно къ поверхности, то предыдущія соотношенія дадутъ:

$$\cos(\varrho S)=0,$$

т. е. и векторъ ϱ совпадаетъ съ нормаломъ къ поверхности; другими словами, частицы среды вращаются въ плоскостяхъ касательныхъ къ поверхности. Затѣмъ находимъ, что

$$H_1=P.$$

До сихъ поръ мы разсматривали условія на границахъ по отношенію къ одной средѣ; разсмотримъ ихъ по отношенію къ обѣимъ срединамъ, раздѣленнымъ поверхностью, нормалъ къ которой мы теперь обозначимъ знакомъ N. Возьмемъ на касательной плоскости двѣ ортогоналеныя прямыя MP и MQ; въ такомъ случаѣ система прямыхъ:

$$MP, \quad MQ, \quad MN$$

будетъ ортогональная система и пусть косинусы направленія MP будутъ A'', B'', C'', а $MQ - A_{''}$, $B_{''}$, $C_{''}$. Пусть проекціи ξ, η, ζ на прямыя MP, MQ и MN будутъ: ξ', η', ζ'; тогда, умножая уравненія (C) сначала на A'', B'', C'', потомъ на $A_{''}$, $B_{''}$, $C_{''}$ и наконецъ на A_1, B_1, C_1 и складывая результаты, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta' + P\cos(PP) &= 0 \\ \xi' - P\cos(PQ) &= 0 \\ H_1 - P\cos(PN) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$

ибо

$$B_1C'' - C_1B'' = A_{''} \text{ и т. п.}$$
$$B_1C_{''} - C_1B_{''} = -A'' \text{ и т. п.}$$

Но по физическому смыслу силъ давленія на поверхности, имѣемъ:

$$(X_n)_1 = (X_n)_2, \quad (Y_n)_1 = (Y_n)_2, \quad (Z_n)_1 = (Z_n)_2, \quad \ldots\ldots \text{(E)}$$

да при помощи равенства (β) находимъ:

$$P\cos(PP) = \frac{\mu}{A\varepsilon}\int_0^t X'_n dt, \quad P\cos(PQ) = \frac{\mu}{A\varepsilon}\int_0^t Y'_n dt;$$

поэтому, обозначая указателями (1) и (2) принадлежность количества *первой* или *второй* средѣ получимъ:

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}P_1\cos(P_1P) = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}P_2\cos(P_2P),$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}P_1\cos(P_1Q) = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}P_2\cos(P_2Q),$$

если μ отъ времени не зависитъ. Подставляя въ первыя уравненія (D), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\eta'\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\eta'\right]_2 \\ \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\xi'\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\xi'\right]_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$

Третье уравненіе въ системѣ (D) по равенству ($\varkappa$) есть тождество.

Условія (B bis), обработанныя такимъ же образомъ, дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} \beta' + \mu X'_n &= 0 \\ \alpha' - \mu Y'_n &= 0 \\ H - Z'_n &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (G)$$

Отсюда найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\alpha'}{\mu}\right]_1 &= \left[\frac{\alpha'}{\mu}\right]_2 \\ \left[\frac{\beta'}{\mu}\right]_1 &= \left[\frac{\beta'}{\mu}\right]_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (H)$$

Имѣя условія относительно ξ' и η', или для α' и β', безъ труда составимъ условія для u', v' и w'.

Именно при помощи уравненій (H) и (n) или уравненій (F) и (t) получаемъ равенства:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}\right)\right]_1 &= \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}\right)\right]_2 \\ \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\right]_1 &= \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\right]_2, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (K)$$

гдѣ u', v', w' суть проекціи u, v, w на прямыя MP, MQ и MN, а x', y', z' координаты точки поверхности по отношенію тѣхъ же осей: MP, MQ, MN.

Такимъ образомъ теорія Больтцмана, надлежащимъ образомъ разработанная, приводитъ къ условіямъ на границахъ въ видѣ системы условій Фрэнэля, т. е. или (F) или (H) и ихъ слѣдствій. Что касается третьихъ уравненій въ системахъ (D) и (G), то они опредѣляютъ измѣняемость функцій H или H_1 на поверхности двухъ срединъ въ видѣ условій

$$\left.\begin{aligned} [H]_1 &= [H]_2 \\ \left[\frac{\varepsilon}{\mu} H_1\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu} H_1\right]_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Эти условія необходимы для полнаго опредѣленія функцій H и H_1.

Всѣ эти условія суть слѣдствія положеній (E); если же мы не примемъ этихъ положеній, то и условія на границахъ будутъ иными.

23 Сентября 1894 г.