Нахожденіе алгебраическихъ раціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ алгебраическими раціональными коэффиціентами.

П. А. Некрасова *).

Труды академика *В. Г. Имшенецкаго* и вызванный ими оживленный обмѣнъ мыслей между многими русскими математиками привели къ тому, что указанная въ заглавіи задача получила полное и всестороннее разъясненіе въ нашей литературѣ **). Въ настоящее время задача на столько исчерпана, что дѣло можетъ касаться улучшенія развѣ лишь изложенія теоріи.

*) Статья эта была предметомъ сообщенія автора Московскому Математическому Обществу въ засѣданіи 20 сентября 1894 г. и затѣмъ въ извлеченіи доложена Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіи 4 ноября 1894 г.

**) Привожу здѣсь эту литературу въ слѣдующемъ спискѣ:

В. Г. Имшенецкій. 1. Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами. (Записки Имп. Академіи Наукъ, т. LV, прилож. № 9. 1887).

2. Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами. (Записки Имп. Академіи Наукъ, т. LVIII. 1888).

3. Сообщеніе академика В. Г. Имшенецкаго въ засѣданіи Моск. Матем. Общества 19 мая 1892 года. (Матем. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 391—398. 1893).

К. А. Поссе. Извлеченіе изъ письма проф. К. А. Поссе (отъ него лично и отъ имени проф. А. Н. Коркина и проф. Д. К. Бобылева). (Математич. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 386—391. 1893).

П. А. Некрасовъ. Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія. (Матем. Сб., т. XVII, вып. 2, стр. 341—382. 1893).

К. А. Андреевъ. О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя. (Сообщенія Харьк. Матем. Общества, т. IV. 1894).

Н. Гюнтеръ. О нахожденіи дробныхъ раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. (Матем. Сб., т. XVII, в. 4, 1894). Статья Н. Гюнтера рекомендована академикомъ А. А. Марковымъ.

Въ предлагаемой статьѣ я намѣренъ представить новое изложенiе, не смотря на существованiе нѣсколькихъ изложенiй.

Имѣя дѣло въ настоящемъ изложенiи съ уравненiемъ:

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n y = V, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ P_0, P_1, ..., P_n и V суть цѣлые полиномы, не имѣющiе общаго дѣлителя, я не буду прибѣгать здѣсь къ посредствующей формѣ:

$$\frac{d^n(Q_0 y)}{dx^n} + \frac{d^{n-1}(Q_1 y)}{dx^{n-1}} + \dots + Q_n y = V, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

которую избралъ В. Г. Имшенецкiй и съ которою мнѣ, какъ комментатору В. Г. Имшенецкаго, пришлось имѣть дѣло въ статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ *).

Далѣе въ настоящемъ изложенiи я не намѣренъ слѣдовать безусловно одному какому-либо направленiю, а напротивъ буду относиться свободно ко всѣмъ направленiямъ, отовсюду извлекая то, что мнѣ представляется заслуживающимъ вниманiя, и приводя это въ такiя сочетанiя, какiя мнѣ кажутся болѣе удобными.

Въ §§ 2, 3 и 4 изложены основанiя теорiи безъ посредства интегрирующаго множителя. Въ это изложенiе я по возможности переношу всѣ тѣ усовершенствованiя, которыя были достигнуты при другомъ изложенiи теорiи, основанномъ на употребленiи интегрирующаго множителя В. Г. Имшенецкаго **). Такимъ образомъ я широко пользуюсь здѣсь свойствами полиномовъ ζ_n, на которые распадается полиномъ σ_n В. Г. Имшенецкаго ***) и которые теперь я обозначаю короче чрезъ ζ. Эти полиномы могли бы быть взяты прямо изъ моей статьи: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ при $m = n + \alpha - \beta - 1$; но здѣсь я получаю ихъ независимо, основываясь непосредственно на формѣ (1) дифференцiальнаго уравненiя и придавая имъ соотвѣтствующiй этой формѣ видъ ****). Вмѣстѣ съ тѣмъ я разсматриваю здѣсь полиномъ σ, который по своему

*) Прiемы вычисленiя, изложенные въ этой моей статьѣ, удобнѣе всего примѣняются тогда, когда дифференцiальное уравненiе дано непосредственно въ формѣ (A). Но если дифференцiальное уравненiе дано въ общеупотребительной формѣ (1), то, какъ видно изъ статьи проф. К. А. Андреева, предварительное приведенiе уравненiя (1) къ формѣ (A) является безполезнымъ и ненужнымъ осложненiемъ въ способѣ В. Г. Имшенецкаго.

**) Отчасти это перенесенiе уже осуществлено въ статьѣ Н. Гюнтера, рекомендованной академикомъ А. А. Марковымъ.

***) См. Матем. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 355, 366, 376 и 382. Собственно говоря, В. Г. Имшенецкiй употребляетъ въ своемъ мемуарѣ полиномъ S_n, а не σ_n; но полиномъ σ_n отличается отъ S_n лишь множителемъ, не играющимъ существенной роли въ нашемъ изложенiи.

****) Полиномы ζ_n, какъ въ теорiи сравненiй, могутъ являться въ различныхъ видахъ, сравнимыхъ другъ съ другомъ по извѣстному модулю. Это замѣчанiе надлежитъ имѣть въ виду при сопоставленiи полиномовъ ζ_n съ приводимыми здѣсь полиномами ζ.

значенію соотвѣтствуетъ полиному σ_n, а по составу болѣе соотвѣтствуетъ формѣ (1).

Полиномы ζ суть только различныя видоизмѣненія полинома σ, соотвѣтствующія различнымъ обстоятельствамъ.

Содержаніе §§ 2, 3 и 4 предлагаемой статьи, кажется, достаточно убѣждаетъ, что какимъ бы порядкомъ ни рѣшалась задача о нахожденіи раціональныхъ интеграловъ уравненія (1), полиномъ σ В. Г. Имшенецкаго и его видоизмѣненіе ζ всегда вносятъ въ теорію такую стройность, какой не было въ изложеніи Ліувилля *).

Въ § 5 предлагаемой статьи показано, что способъ, основанный на употребленіи интегрирующаго множителя, имѣетъ особое преимущество. Способъ этотъ даетъ возможность при изысканіи числителя дробнаго рѣшенія уничтожать въ дифференціальномъ уравненіи дроби подъ знакомъ дифференцированія. Интегрирующій множитель этого рода составляется порядкомъ, указаннымъ въ статьѣ проф. К. А. Андреева.

Укажу еще на слѣдующую особенность настоящей статьи.

Въ предлагаемой статьѣ, какъ и въ статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“, я, по примѣру Ліувилля, внимательно отношусь не только къ составу знаменателя дробнаго рѣшенія, но и къ составу числителя, выдѣляя въ немъ, по возможности, множители вида $(x+a)^m$, гдѣ $x+a$ есть линейный дѣлитель полинома P_0. Это выдѣленіе облегчаетъ послѣдующее вычисленіе числителя дробнаго рѣшенія, нисколько не осложняя труда въ остальныхъ отношеніяхъ, такъ какъ всѣ данныя для этого облегченія, когда оно возможно, являются сами собою въ процессѣ изысканія состава знаменателя. Въ связи съ этимъ облегченіемъ необходимо слѣдить за низшими предѣлами α' показателей α.

§ 1. Обозначенія; цѣлые частные интегралы.

Пусть данное линейное дифференціальное уравненіе будетъ:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_ny=V, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

гдѣ $P_0, P_1, \ldots, P_n$ и V суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя.

*) Не слѣдуетъ думать, что сущность изслѣдованій В. Г. Имшенецкаго сводится только къ пріему, состоящему въ употребленіи интегрирующаго множителя. Кромѣ этого примѣчательнаго *средства* рѣшеніе задачи В. Г. Имшенецкій подмѣтилъ *правило*, данное на страницѣ 28 перваго мемуара его и точнѣе выраженное по указаніямъ его сообщенія въ § 2 моей статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“. Правило это примѣчательно по чрезвычайной простотѣ его выраженія и лишь даетъ знаменатель въ формѣ недостаточно простой; но и этотъ недочетъ правила В. Г. Имшенецкаго легко пополненъ естественнымъ его продолженіемъ, указаннымъ въ § 3 статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“. Такимъ образомъ съ именемъ В. Г. Имшенецкаго связаны въ отношеніи рѣшенія данной задачи не только извѣстнаго рода средства, но и правила, неизмѣнно сохраняющіяся при любыхъ средствахъ ихъ полученія.

Пусть $\triangle$ есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ P_0 и $\dfrac{dP_0}{dx}$. Буквой p будемъ обозначать полиномъ, опредѣляемый равенствомъ:

$$p = \frac{P_0}{\triangle}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Всевозможные различные линейные дѣлители (т. е. дѣлители $x + a$) полинома P_0 будемъ обозначать такъ:

$$x + a_1,\ x + a_2,\ \ldots,\ x + a_\nu. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Очевидно, будемъ имѣть:

$$p = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_\nu). \quad \ldots\ldots (4)$$

Буквой D будемъ обозначать общій наибольшій дѣлитель полиномовъ:

$$P_0 p^{-1},\ P_1,\ P_2 p,\ \ldots,\ P_n p^{n-1}. \quad \ldots\ldots (5)$$

Разлагая D на линейные множители, будемъ это разложеніе обозначать такъ:

$$D = (x + a_1)^{\beta_1}(x + x_2)^{\beta_2}\ldots(x + a_\nu)^{\beta_\nu}, \quad \ldots\ldots (6)$$

гдѣ $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_\nu$ суть цѣлыя положительныя числа.

Буквой σ обозначается полиномъ

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)\frac{P_i p^{i-1}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^{n-i} =$$

$$= (-1)^n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\frac{P_0 p^{-1}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^n + \ldots + \alpha(\alpha+1)\frac{P_{n-2}p^{n-3}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2$$

$$-\alpha\frac{P_{n-1}p^{n-2}}{D}\frac{dp}{dx} + \frac{P_n p^{n-1}}{D}. \quad \ldots\ldots (7)$$

Этотъ полиномъ по значенію своему вполнѣ аналогиченъ полиному σ_n В. Г. Имшенецкаго.

Полиномъ σ при произвольномъ α, очевидно, не имѣетъ общихъ дѣлителей съ полиномомъ p или P_0.

Полиномъ V представимъ подъ формой:

$$V = (x + a_1)^{\varepsilon_1}(x + a_2)^{\varepsilon_2}\ldots(x + a_\nu)^{\varepsilon_\nu}.\, U, \quad \ldots\ldots (8)$$

гдѣ $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_\nu$ суть цѣлыя числа и U есть цѣлый полиномъ, не имѣющій съ p общихъ дѣлителей.

Другія обозначенія выяснятся впослѣдствіи.

Изъ раціональныхъ интеграловъ уравненія (1) съ наибольшею простотою находятся цѣлые, если таковые существуютъ. Въ самомъ дѣлѣ, представивъ цѣлое рѣшеніе подъ формой:

$$y = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m,$$

мы можемъ внести это выраженіе y въ уравненіе (1) и опредѣлить показатель m по извѣстному правилу, которое Н. В. Бугаевъ называетъ началомъ наибольшихъ показателей и которое состоитъ въ сопоставленіи членовъ высшихъ степеней. Послѣ опредѣленія m находятся коэффиціенты B_0, $B_1, \ldots, B_m$ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Указанными ниже пріемами сама общая задача о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) приводится къ нахожденію цѣлыхъ рѣшеній преобразованнаго уравненія.

§ 2. Теорема Ліувилля; форма, подъ которою изыскиваются всѣ раціональныя рѣшенія.

Алгебраическое раціональное рѣшеніе уравненія (1), если таковое существуетъ, обозначимъ такъ:

$$y = \frac{X}{Y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

разумѣя подъ X и Y цѣлые полиномы, не имѣющіе общихъ дѣлителей.

Представимъ то же самое раціональное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{K}{(x+\alpha)^\alpha L}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

гдѣ α—цѣлое число, K и L—цѣлые полиномы, не дѣлящіеся на $x+\alpha$. Зимѣтимъ притомъ, что при $\alpha > 0$ сумма $x+a$ есть дѣлитель знаменателя Y раціональнаго рѣшенія (8′), а при $\alpha < 0$ сумма $x+a$ есть дѣлитель числителя X того же рѣшенія.

Дифференцируя равенство (9) послѣдовательно n разъ, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\alpha K}{L(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{K_2}{L^2(x+a)^\alpha}, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\alpha(\alpha+1)K}{L(x+\alpha)^{\alpha+2}} + \frac{K_2}{L^3(x+a)^{\alpha+1}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d^ny}{dx^n} &= \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)K}{(-1)^n L(x+a)^{\alpha+n}} + \frac{K_n}{L^{n+1}(x+a)^{\alpha+n-1}},
\end{aligned}\right\} \quad (9')$$

гдѣ K_1, $K_2, \ldots, K_n$ означаютъ цѣлыя функціи.

Подставивъ найденныя выраженія y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ въ уравненіе (1) и умноживъ обѣ части полученнаго равенства на

$$L^{n+1}(x+a)^{\alpha+n-1},$$

мы получимъ

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)P_0L^nK}{(x+a)} + H = L^{n+1}V(x+a)^{\alpha+n-1}, \quad (9'')$$

гдѣ H есть цѣлая функція.

Отсюда видно, что сумма $(x+a)$ должна быть дѣлителемъ полинома P_0 въ двухъ случаяхъ: 1) когда $\alpha > 0$ и 2) когда $-(\varepsilon+n-1) \leq \alpha < -(n-1)$, гдѣ ε опредѣляется при помощи равенства

$$V = v(x+a)^{\varepsilon},$$

въ которомъ v есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $(x+a)$.

Первый изъ этихъ случаевъ представляетъ теорему Ліувилля, утверждающую, что каждый линейный дѣлитель (т. е. дѣлитель вида $x+a$) знаменателя Y раціональнаго рѣшенія есть въ то же время дѣлитель полинома P_0.

Второй случай распространяетъ теорему Ліувилля, показывая, что линейный дѣлитель $(x+a)$ числителя X, дѣлящій его не менѣе n разъ и не болѣе $(\varepsilon+n-1)$ разъ, также долженъ быть дѣлителемъ полинома P_0. Это обстоятельство даетъ достаточныя основанія обращать вниманіе на связь линейныхъ дѣлителей полинома P_0 не только съ знаменателемъ Y, но и съ числителемъ X. Выдѣленіе въ числителѣ указанныхъ дѣлителей, когда къ тому представляется какая-либо возможность, полезно потому, что оно, какъ ниже увидимъ, облегчаетъ вычисленіе числителя по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и въ тоже время не осложняетъ остальныхъ вычисленій. Такое упрощеніе, если оно окажется возможнымъ, полезно даже тогда, когда искомое раціональное рѣшеніе оказывается цѣлымъ.

Въ томъ случаѣ, когда P_0 есть количество постоянное, уравненіе (1) не можетъ имѣть иныхъ раціональныхъ рѣшеній, кромѣ цѣлыхъ. Замѣтивъ это, мы въ дальнѣйшемъ изложеніи устранимъ изъ разсмотрѣнія случай, когда P_0 есть постоянное.

Легко видѣть, что разлагая на множители знаменатель Y раціональнаго рѣшенія, а также выдѣляя въ числителѣ всѣ его множители, общіе съ дѣлителями полинома P_0 (или p), и перенося эти множители въ знаменатель съ отрицательными показателями, мы можемъ представить раціональное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{Z}{(x+a_1)^{\alpha_1}(x+a_2)^{\alpha_2}\ldots(x+a_\nu)^{\alpha_\nu}}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

гдѣ Z есть цѣлый полиномъ, не имѣющій общихъ дѣлителей съ полиномомъ p. Задача о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній линейнаго уравненія сводится затѣмъ къ нахожденію показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, которые должны быть числами цѣлыми.

Какъ увидимъ ниже, при изысканіи показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ обнаруживается, что каждый изъ нихъ можетъ имѣть по одному, а иногда по нѣскольку значеній, и если $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ представляютъ соотвѣтственно высшіе предѣлы этихъ значеній (т. е. $\alpha_i \leqq A_i$, гдѣ $i = 1, 2, \ldots, \nu$), то очевидно, всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) могутъ быть изыскиваемы подъ общей формой:

$$y = \frac{\xi}{(x+a_1)^{A_1}(x+a_2)^{A_2}\ldots(x+a_\nu)^{A_\nu}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ.

Изыскивая ниже всевозможныя значенія показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ и затѣмъ опредѣляя ихъ высшіе предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ мы будемъ по возможности избѣгать излишнихъ повышеній этихъ предѣловъ, напримѣръ, не будемъ замѣнять нулями тѣ изъ нихъ, которые окажутся отрицательными (такъ какъ всякое повышеніе этихъ предѣловъ ведетъ къ повышенію степени полинома ξ и осложняетъ его вычисленіе). Если предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ выбраны съ указанными предосторожностями, то форму (11), подъ которой изыскиваются всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1), будемъ называть *наипростѣйшею* общею формою раціональныхъ рѣшеній.

Можно спросить между прочимъ, не представляется-ли выгоднымъ, для упрощенія вычисленія числителя раціональнаго рѣшенія уравненія (1), вводить въ знаменатель формы (11) факторы вида $(x+a)^A$, когда $(x+a)$ не есть дѣлитель полинома P_0. На этотъ вопросъ приходится отвѣтить отрицательно. Въ самомъ дѣлѣ, если P_0 не дѣлится на $(x+a)$, то равенство (9″), не представляетъ противорѣчія лишь въ томъ случаѣ, когда α имѣетъ одно изъ значеній:

$$-(n+\varepsilon), \quad -(n-1), \quad -(n-2), \ldots \quad -2, \ -1, \ 0.$$

Притомъ α можетъ совпадать съ каждымъ изъ этихъ чиселъ. Поэтому высшій предѣлъ A возможныхъ значеній α есть $A = 0$ и слѣдовательно знаменатель формы (11) не требуетъ включенія факторовъ вида $(x+a)^A$ при $(x+a)$ не дѣлящемъ полинома P_0.

§ 3. Нахожденіе всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) въ томъ случаѣ, когда дано полное разложеніе полинома p на линейные множители. Примѣры.

Будемъ ниже разумѣть подъ $x+a$ одинъ изъ линейныхъ дѣлителей полинома p, подъ α соотвѣтственный изъ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, входящихъ въ знаменатель второй части равенства (10), подъ β соотвѣтственный изъ показателей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$, входящихъ во вторую часть равенства (6), и подъ ε соотвѣтственный изъ показателей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$, входящихъ во вторую часть равенства (8). Изъ опредѣленія числа β слѣдуетъ, что функціи

$$P_0(x+a)^{-1-\beta}, \ P_1(x+a)^{-\beta}, \ P_2(x+a)^{1-\beta}, \ldots, \ P_n(x+a)^{n-1-\beta} \quad (12)$$

суть цѣлыя и не имѣютъ общаго дѣлителя $(x+a)$.

Представивъ искомое дробное рѣшеніе y и его производныя подъ формами (9) и (9′) и внеся эти ихъ выраженія въ уравненіе (1), мы получимъ:

$$\frac{K\zeta}{(x+a)^{\alpha+n-\beta-1}L}+\frac{H}{(x+a)^{\alpha+n-\beta-2}L^{n+1}}=V,\;.\;.\;.\;.\;(13)$$

гдѣ ζ и H суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый представляется такъ:

$$\zeta=(-1)^n\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)P_0(x+a)^{-1-\beta}+\ldots$$

$$\ldots+\alpha(\alpha+1)P_{n-2}(x+a)^{n-3-\beta}-\alpha P_{n-1}(x+a)^{n-2-\beta}+P_n(x+a)^{n-1-\beta}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)P_i(x+a)^{i-1-\beta}.\;.\;(14)$$

Представивъ полиномъ V подъ формой

$$V=v.(x+a)^{\varepsilon},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(15)$$

гдѣ v есть цѣлая функція, не дѣлящаяся не $(x+a)$, и умноживъ обѣ части равенства (13) на

$$(x+a)^{\alpha+n-\beta-1}L^{n+1},$$

будемъ имѣть:

$$KL^n\zeta+r(x+a)=L^{n+1}v(x+a)^{\alpha+n-\beta-1+\varepsilon}\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

гдѣ r есть цѣлый полиномъ.

Разсмотримъ, во первыхъ, тотъ случай, когда показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) *положительный*, т. е. когда

$$\alpha>\alpha',\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(17)$$

гдѣ

$$\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(18)$$

Въ этомъ случаѣ равенство (16) получаетъ видъ:

$$KL^n\zeta=R(x+a),\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(19)$$

гдѣ R есть цѣлый полиномъ. Такъ какъ K и L, по условію, не дѣлятся на $x+a$, то, какъ показываетъ равенство (19), полиномъ ζ долженъ дѣлиться на $x+a$. Этимъ необходимымъ признакомъ въ достаточной мѣрѣ характеризуются значенія α, удовлетворяющія условію (17). Въ самомъ дѣлѣ, по свойству полиномовъ (12) функція ζ при произвольномъ значеніи α не можетъ дѣлиться на $x+a$. Чтобы ζ дѣлилось на $x+a$, количество α должно удовлетворять условію:

$$\Phi(\alpha)=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

гдѣ $\Phi(\alpha)$ есть значеніе ζ при $x=-a$ или, иначе, первый членъ въ разложеніи ζ по восходящимъ степенямъ $x+a$.

Цѣлыя значенія α, удовлетворяющія условіямъ (17) и (20), будемъ ниже обозначать чрезъ α'', α''',....

Разсмотримъ, во вторыхъ, тотъ случай, когда показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) равенъ *нулю*, т. е. когда

$$\alpha=\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon. \quad \ldots\ldots (21)$$

Въ этомъ случаѣ равенство (16) приводится къ виду:

$$L^n[Lv-K\zeta]=r(x+a)$$

и показываетъ, что полиномъ

$$Lv-K\zeta$$

дѣлится на $x+a$, т. е. имѣетъ мѣсто условіе:

$$[Lv-K\zeta]_{x=-a}=0.$$

Условіе это можетъ быть удовлетворено на счетъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ числителя Z во второй части равенства (10). Поэтому число α' нужно присоединить къ значеніямъ, которыя можетъ принимать показатель α.

Легко наконецъ видѣть, что показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) не можетъ быть отрицательнымъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ равенство (16) было бы противорѣчивымъ. Поэтому число α' есть *низшій* предѣлъ показателя α.

Итакъ, вышеуказанными числами α', α'', α''',... исчерпываются всѣ возможныя значенія показателя α въ раціональномъ рѣшеніи (9). Наибольшее изъ чиселъ α', α'', α''',... опредѣлитъ *высшій* предѣлъ значеній α. Этотъ предѣлъ обозначимъ буквой A.

Можетъ иногда случиться, что не существуетъ цѣлыхъ значеній α, удовлетворяющихъ условіямъ (17) и (20). Въ этомъ случаѣ высшій предѣлъ A показателя α и его низшій предѣлъ α', очевидно, должны совпадать. Такимъ образомъ, даже при отсутствіи цѣлыхъ значеній α, удовлетворяющихъ вышеуказаннымъ условіямъ, раціональное рѣшеніе уравненія (1) можетъ существовать; лишь для уравненія безъ второй части при этихъ обстоятельствахъ представляется особенность, разъясненная ниже.

Примѣняя указанный порядокъ вычисленія къ каждому изъ линейныхъ дѣлителей

$$x+a_1, \quad x+a_2, \ldots, \quad x+a_\nu$$

полинома p, получимъ всѣ соотвѣтственные высшіе предѣлы A_1, $A_2, \ldots, A_\nu$ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Зная эти предѣлы, мы можемъ отыскать наконецъ всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) при посредствѣ равенства (11), въ которомъ числитель ξ при существованіи раціональныхъ рѣшеній долженъ быть цѣлымъ полиномомъ, опредѣляемымъ какъ цѣлое рѣшеніе преобразованнаго при посредствѣ равенства (11) дифференціальнаго уравненія.

Такимъ образомъ, при разсматриваемыхъ данныхъ задачу о нахожденіи раціональныхъ интеграловъ уравненія (1) можно считать разрѣшенною.

Теперь остановимся на разсмотрѣніи нѣкоторыхъ заслуживающихъ особаго вниманія свойствахъ полиномовъ ζ. Начнемъ съ указанія связи этихъ полиномовъ съ полиномомъ σ.

Замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x+a}+\varrho(x+a),$$

гдѣ ϱ есть цѣлый полиномъ, затѣмъ внеся это выраженіе $\frac{dp}{dx}$ во вторую часть равенства (7) и принявъ во вниманіе равенство (14), находимъ:

$$G\sigma=H\zeta+U(x+a), \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ G, H и U суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый и второй выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$G=\frac{D}{(x+a)^\beta} \quad \text{и} \quad H=\left(\frac{p}{x+a}\right)^{n-1}.$$

Такъ какъ полиномы G и H не могутъ дѣлиться на $x+a$, то связь между полиномами σ и ζ, выражаемая равенствомъ (22), показываетъ, что *значенія a, при которыхъ полиномъ ζ дѣлится на $(x+a)$, вполнѣ совпадаютъ съ значеніями a, при которыхъ полиномъ σ дѣлится на тотъ же дѣлитель $(x+a)$ полинома p*. Такимъ образомъ разсмотрѣніе всѣхъ полиномовъ ζ, опредѣляемыхъ при помощи равенства (14), сводится къ разсмотрѣнію одного только полинома σ.

Этому свойству полинома σ, вполнѣ аналогичному со свойствомъ полинома σ_n В. Г. Имшенецкаго, мы дадимъ примѣненіе въ теоріи, которая изложена въ § 4.

Далѣе перейдемъ къ другимъ свойствамъ полиномовъ ζ.

Изыскивая условіе (20), при выполненіи котораго ζ дѣлится на $x+a$, можно полиномъ ζ упрощать, отбрасывая или прибавляя въ немъ члены, кратные $x+a$, и множители, которые ни при какомъ значеніи α не дѣлятся на $x+a$.

Эти отбрасыванія и прибавленія членовъ и множителей ведутъ къ многочисленнымъ видоизмѣненіямъ формы полинома ζ. Разсмотримъ важнѣйшія изъ этихъ видоизмѣненій.

Если эти видоизмѣненія привели отъ полинома ζ къ полиному ς, то эту связь между полиномами ζ и ς будемъ обозначать такъ:

$$\zeta \equiv \varsigma.$$

Между прочимъ при $\beta=0$ будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)[(\alpha+n-1)\,P_0(x+a)^{-1}-P_1];$$

при $\beta=1$ будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-3)[(\alpha+n-2)(\alpha+n-1)\,P_0(x+a)^{-2} \\ -(\alpha+n-2)\,P_1(x+a)^{-1}+P_2];$$

и т. д. Если условимся полагать: $k=\beta+1$ при $\beta<n-1$ и $k=n$ при $\beta \geqq n-1$, то будемъ имѣть вообще:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)\,P_i(x+a)^{i-1-\beta}.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующая форма полинома ζ, данная при другихъ обозначеніяхъ проф. К. А. Андреевымъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-i}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)}{(1+\beta-i)!}\frac{d^{1+\beta-i}P_i}{dx^{1+\beta-i}}. \quad (22')$$

Послѣ всевозможныхъ отбрасываній въ полиномѣ ζ членовъ, кратныхъ $x+a$, и множителей, не дѣлящихся на $x+a$ ни при какомъ значеніи α, въ концѣ концовъ получимъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \Phi(\alpha),$$

гдѣ $\Phi(\alpha)$ лишь постояннымъ множителемъ можетъ отличаться отъ первой части равенства (20).

Остановимъ вниманіе на случаѣ, когда уравненіе (1) не имѣетъ второй части, т. е. имѣетъ видъ:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_ny=0. \quad \ldots\ldots (23)$$

Въ этомъ случаѣ цѣлое положительное число ε, которое для уравненія (1) опредѣлялось равенствомъ (15), нужно считать равнымъ $+\infty$. Слѣдовательно, $\alpha' = -\infty$ и низшій предѣлъ α' самъ собою отпадаетъ. Такимъ образомъ, въ случаѣ уравненія (23) условіе (17) для всякаго конечнаго α само собою выполняется, значеніе α, опредѣляемое равенствомъ (21), отпадаетъ и всѣ значенія показателя α опредѣляются всевозможными цѣлыми числами, удовлетворяющими только уравненію (20). Отсутствіе таковыхъ цѣлыхъ чиселъ есть рѣшительный признакъ того, что уравненіе (23) не имѣетъ раціональныхъ рѣшеній.

Приведемъ для поясненія теоріи три примѣра.

Примѣръ 1. Данное уравненіе пусть будетъ:

$$x^7 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x^4 \frac{dy}{dx} + 2(2-3x^2)xy = 2(2-5x^2+x^4).$$

Въ этомъ случаѣ $p = x$, $D = x^2$, $\beta = 2$, $\varepsilon = 0$, $\alpha' = 1$,

$$\zeta = \alpha(\alpha+1)x^4 - 4\alpha x^2 + 2(2-3x^2) \equiv 4.$$

Очевидно, не существуетъ значеній α, при которыхъ полиномъ ζ дѣлится на x. Поэтому $A = \alpha' = 1$ и раціональное рѣшеніе изыскивается подъ формой:

$$y = \frac{\xi}{x^A} = \frac{\xi}{x},$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Отыскивая этотъ полиномъ, получимъ: $\xi = 1$, т. е. данное уравненіе допускаетъ раціональное рѣшеніе

$$y = \frac{1}{x}.$$

Примѣръ 2. Данное уравненіе пусть будетъ:

$$(1+x)^3[x^6 \frac{d^2y}{dx^2} + 2(45-80x+36x^2)y] =$$
$$= 2x^{10}(45-80x+36x^2)[(1+x)^2+x^4].$$

Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$P_0 = x^6(1+x)^3,\ \ P_1 = 0\,,\ \ P_2 = 2(1+x)^3(45-80x+36x^2);$$
$$p = x(1+x)\,,\ \ D = x(1+x)^2.$$

Для дѣлителя $x + a_1 = x$ полинома p имѣемъ:

$$\beta_1 = 1,\ \ \varepsilon_1 = 10\,,\ \ \alpha'_1 = -10\,,$$
$$\zeta = [\alpha(\alpha+1)x^4 + 2(45-80x+36x^2)](1+x)^3 \equiv 90.$$

Очевидно, не существуетъ значеній α, при которыхъ этотъ полиномъ ζ дѣлится на $x+a_1$. Слѣдовательно, $A_1=\alpha_1'=-10$.

Далѣе, для дѣлителя $x+a_2=1+x$ полинома p имѣемъ:

$$\beta_2=2\,,\ \ \varepsilon_2=0\,,\ \ \alpha_2'=1\,,$$

$$\zeta=\alpha(\alpha+1)x^6+2(1+x)^2(45-80x+36x^2)\equiv\alpha(\alpha+1).$$

Этотъ полиномъ дѣлится на $x+a_2=1+x$ при $\alpha=0$ и при $\alpha=-1$; но эти значенія не годятся, такъ какъ они ниже низшаго предѣла α_2'. Выше же этого предѣла не существуетъ цѣлыхъ значеній α, при которыхъ ζ дѣлится на $x+a_2$. Поэтому $A_2=\alpha_2'=1$.

Итакъ, раціональное рѣшеніе изыскивается подъ формой:

$$y=\frac{\xi}{x^{A_1}(1+x)^{A_2}}=\frac{x^{10}.\,\xi}{1+x}\,,$$

гдѣ ξ есть полиномъ. Отыскивая этотъ полиномъ, получаемъ: $\xi=1$, т. е. данное уравненіе допускаетъ раціональное рѣшеніе:

$$y=\frac{x^{10}}{1+x}\,.$$

Примѣръ 3. Дано дифференціальное уравненіе:

$$(x-1)^2\frac{d^3y}{dx^3}+10\,(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-(x^2-2x-19)\frac{dy}{dx}$$
$$-\,2\,(x-1)y=0.$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$p=x-1\,,\ \ D=x-1\,,\ \ \beta=1\,,\ \ \varepsilon=+\infty\,,\ \ \alpha'=-\infty\,,$$

$$\zeta=-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)+10\alpha(\alpha+1)+\alpha(x^2-2x-19)-2\,(x-1)^2\equiv$$
$$\equiv-\alpha(\alpha-3)(\alpha-4).$$

Этотъ полиномъ ζ дѣлится на $x-1$ при слѣдующихъ значеніяхъ α:

$$\alpha''=0\,,\ \ \alpha'''=3\,,\ \ \alpha''''=4.$$

Поэтому $A=4$ и раціональное рѣшеніе даннаго уравненія изыскивается подъ формой:

$$y=\frac{\xi}{(x-1)^4}\,,$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Опредѣляя ξ, находимъ: $\xi = x^2 - 2x + 3$, т. е. данное уравненіе имѣетъ раціональное рѣшеніе

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^4}.$$

Примѣръ этотъ заимствованъ изъ перваго мемуара В. Г. Имшенецкаго.

§ 4. Нахожденіе раціональныхъ рѣшеній въ томъ случаѣ, когда не дано полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$. Примѣры.

Въ этомъ случаѣ полиномъ p находится при помощи формулы (2), представленіе же его подъ формой (4) не считается даннымъ.

Будемъ предполагать, что требуется не только избѣгнуть полнаго рѣшенія уравненія $p = 0$, но также требуется: 1) избѣгнуть обязательности имѣть напередъ заданное полное разложеніе полинома p на неприводимые множители, такъ какъ это дѣйствіе иногда сопряжено съ затрудненіями *) и 2) при этихъ обстоятельствахъ составить *наипростѣйшую* форму, при помощи которой изыскиваютя всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) **), т. е. форму, совпадающую въ сущности съ формой (11), найденной по указаннымъ въ § 3 правиламъ.

Предлагаемый процессъ вычисленія, основанный на разсмотрѣніи общихъ наибольшихъ дѣлителей различныхъ данныхъ полиномовъ, даже при полномъ незнаніи неприводимыхъ дѣлителей полинома p самъ собою приводитъ къ разложенію полинома p на такіе именно множители, какіе нужны при составленіи искомой наипростѣйшей общей формы всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1). Если же мы знаемъ напередъ нѣкоторые изъ неприводимыхъ дѣлителей полинома p, то при помощи ихъ предлагаемый процессъ еще болѣе облегчается (что и понятно въ виду связи этого процесса съ теоріей общихъ дѣлителей). Переходя къ изложенію этого процесса, условимся всякій полиномъ, не имѣющій кратныхъ корней, называть *первичнымъ* ***).

Прежде всего отыскиваемъ общій наибольшій дѣлитель D полиномовъ (5). Затѣмъ извѣстнымъ способомъ, сводящимся въ сущности къ повторенію процесса нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя данной

---

*) Затрудненія эти нельзя считать маловажными, такъ какъ не существуетъ общей схемы вычисленій съ конечнымъ числомъ дѣйствій, которая всегда рѣшала бы вопросъ о разложеніи даннаго полинома на неприводимые множители.

**) Въ моей статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ указанъ способъ составленія этой формы въ предположеніи, что не дано полнаго рѣшенія уравненія $p = 0$, но дано разложеніе полинома p на *неприводимые* дѣлители. Это ограниченіе теперь устраняется если разложеніе полинома p на неприводимые множители по какой либо причинѣ затруднено.

***) Этотъ терминъ заимствую изъ теоріи чиселъ, именно изъ сочиненія Н. В. Бугаева: „Ученіе о числовыхъ производныхъ“.

цѣлой функціи и ея производной, достигаемъ представленія функціи D подъ формой:

$$D = D_1^{d_1} D_2^{d_2} \dots D_{k-1}^{d_{k-1}},$$

гдѣ $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ суть различныя цѣлыя положительныя числа и $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$ суть цѣлые первичные полиномы, не имѣющіе попарно общихъ дѣлителей. Если къ этимъ полиномамъ присоединимъ цѣлый полиномъ:

$$D_k = \frac{p}{D_1 D_2 \dots D_{k-1}},$$

то будемъ имѣть:

$$D = D_1^{d_1} D_2^{d_2} \dots D_{k-1}^{d_{k-1}} D_k^{d_k}, \quad \dots \dots \dots (24)$$

$$d_k = 0, \quad D_1 D_2 \dots D_{k-1} D_k = p.$$

Далѣе и полиномъ V можемъ представить такъ:

$$V = V_1^{b_1} V_2^{b_2} \dots V_{s-1}^{b_{s-1}},$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$ суть различныя цѣлыя положительныя числа и $V_1, V_2, \dots, V_{s-1}$ суть первичные полиномы, не имѣющіе попарно общихъ дѣлителей. Въ этихъ полиномахъ насъ должны интересовать особенно лишь общіе наибольшіе дѣлители каждаго изъ нихъ съ полиномомъ p, которые пусть соотвѣтственно будутъ:

$$W_1, W_2, \dots, W_{s-1}.$$

Къ этимъ полиномамъ присоединимъ еще полиномъ

$$W_s = \frac{p}{W_1 W_2 \dots W_{s-1}}.$$

Затѣмъ полиномъ V представимъ такъ:

$$V = W_1^{b_1} W_2^{b_2} \dots W_{s-1}^{b_{s-1}} W_s^{b_s} \cdot U, \quad \dots \dots \dots (25)$$

$$b_s = 0, \quad W_1 W_2 \dots W_s = p,$$

при чемъ U есть цѣлый полиномъ, не имѣющій общихъ дѣлителей съ полиномомъ p.

Равенства:

$$p = D_1 D_2 \dots D_k = W_1 W_2 \dots W_s$$

показываютъ, что каждый изъ полиномовъ $D_1, D_2, \dots, D_k$ долженъ имѣть общихъ наибольшихъ дѣлителей съ нѣкоторыми изъ полиномовъ W_1, W_2, ..., W_s и наоборотъ. Разсмотрѣніе и выдѣленіе этихъ дѣлителей иногда ведетъ къ дальнѣйшему распаденію полиномовъ D_1, D_2, ..., D_k, а также полиномовъ W_1, W_2, ..., W_s на множители представляемые полиномами низшихъ степеней. Выдѣленіе этихъ множителей необходимо для дальнѣйшаго.

Сверхъ того рекомендуется достигать всякими другими способами разложенія полиномовъ $D_1, \ldots, D_k, W_1, \ldots, W_s$ на приводимые и, еще лучше, неприводимые множители, но это добавочное разложеніе, весьма полезное для облегченія послѣдующихъ дѣйствій, теоретически вовсе не обязательно.

Изъ числа полученныхъ такимъ образомъ полиномовъ $D_1, \ldots, D_k$, $W_1, \ldots, W_s$ и ихъ найденныхъ дѣлителей надлежитъ выбрать полиномы F_1, F_2, ..., F_t, которые удовлетворяютъ условію

$$p = F_1 F_2 \ldots F_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

и чрезъ которые сверхъ того представляются въ видѣ произведеній каждый изъ полиномовъ D_1, D_2, ..., D_k, W_1, W_2, ..., W_s и каждый изъ ихъ дѣлителей, на которые они распались.

Внеся выраженія полиномовъ $D_1, \ldots, D_k, W_1, \ldots, W_s$ чрезъ полиномы F_1, F_2, ..., F_t въ равенства (24) и (25), получимъ:

$$D = F_1^{\beta_1} F_2^{\beta_2} \ldots F_t^{\beta_t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$$V = F_1^{\varepsilon_1} F_2^{\varepsilon_2} \ldots F_t^{\varepsilon_t} . U. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Равенство (27) опредѣляетъ показатели β_1, β_2, ..., β_t, котоорые при другомъ порядкѣ обозначеній входятъ, какъ показатели, во вторую часть равенства (6). Равенство (28) опредѣляетъ показатели ε_1, ε_2, ..., ε_t, которые при другомъ порядкѣ обозначеній опредѣлялись равенствомъ (8). Опредѣленіе показателей β и ε важно для полученія низшихъ предѣловъ α' значеній показателей α, каковые предѣлы опредѣляются равенствомъ вида (18).

Пусть F есть одинъ изъ полиномовъ F_1, F_2, ..., F_t и пусть β и ε будутъ показатели во вторыхъ частяхъ равенствъ (27) и (28), соотвѣтствующіе полиному F. Затѣмъ вообразимъ, что $x+a$ есть одинъ изъ линейныхъ дѣлителей полинома F. Мы можемъ не знать разложенія полинома F на дѣлители этого рода, но мы беремъ дѣлитель $x+a$ лишь для теоретическихъ соображеній. Соотвѣтствующій дѣлителю $x+a$ показатель α, входящій въ раціональное рѣшеніе, представленное подъ видомъ (9), какъ видно изъ предшествующаго §, либо опредѣляется равенствомъ:

$$\alpha = \alpha' = 1 + \beta - n - \varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

либо долженъ удовлетворять неравенству

$$\alpha > \alpha' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

и притомъ характеризуется тѣмъ свойствомъ, что полиномъ σ, опредѣляемый равенствомъ (7), долженъ дѣлиться на $x+a$. Слѣдовательно, въ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто условіе (30), *полиномы* σ *и* F *должны имѣть общій дѣлитель*.

Этимъ признакомъ сразу охарактеризованы и удовлетворяющіе условію (30) показатели α, соотвѣтствующіе дѣлителямъ полинома F, и самые эти дѣлители. Въ самомъ дѣлѣ, для существованія общихъ дѣлителей полиномовъ σ и F цѣлое число α должно удовлетворять уравненію:

$$\Theta(\alpha) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

гдѣ $\Theta(\alpha)$ представляетъ собою послѣдній остатокъ въ процессѣ послѣдовательнаго дѣленія полиномовъ σ и F, посредствомъ котораго находится ихъ общій наибольшій дѣлитель *). Затѣмъ, при найденномъ изъ условій (30) и (31) цѣломъ значеніи α, тотчасъ же опредѣляется и соотвѣтствующій общій наибольшій дѣлитель δ полиномовъ σ и F. Притомъ въ силу равенства (22) найденный показатель α соотвѣтствуетъ *каждому* изъ линейныхъ дѣлителей полинома δ (этихъ линейныхъ дѣлителей мы можемъ даже и не имѣть въ явной формѣ). Слѣдовательно, среди раціональныхъ рѣшеній можетъ существовать такое, которое представляется подъ формой:

$$y = \frac{K}{\delta^\alpha L}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

гдѣ K и L суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общихъ дѣлителей съ полиномомъ δ.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ будутъ *всѣ* цѣлыя значенія α, удовлетворяющія условіямъ (30) и (31). Соотвѣтствующіе этимъ значеніямъ α общіе наибольшіе дѣлители полиномовъ σ и F пусть будутъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$

Полиномы $\delta_1, \delta_2, \ldots$ надлежитъ сопоставить попарно другъ съ другомъ, отыскивая у каждой пары, если окажется возможнымъ, общаго наибольшаго дѣлителя, каковые дѣлители поведутъ къ дальнѣйшему распаденію полиномовъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$ на множители пониженныхъ степеней. Затѣмъ изъ числа всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ полиномовъ $\delta_1 . \delta_2, \ldots$ и множителей ихъ, на которые они распались, мы можемъ выдѣлить рядъ такихъ полиномовъ

$$X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

---

*) Условіе (31) иначе получается какъ результатъ исключенія x изъ уравненій: $\sigma = 0$ и $F = 0$.

которые попарно не имѣютъ общихъ дѣлителей и чрезъ которые выражаются въ видѣ произведеній каждый изъ полиномовъ δ_1, δ_2, ...

Присоединимъ къ полиномамъ (33) еще полиномъ

$$X_m = \frac{F}{X_1 X_2 \ldots X_{m-1}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

который не можетъ имѣть съ полиномами δ_1, δ_2, ... общихъ дѣлителей. Полиномъ X_m (если онъ не приводится къ виду: $X_m = 1$) примѣчателенъ въ томъ отношеніи, что для его дѣлителей не существуетъ соотвѣтствующихъ значеній α, удовлетворяющихъ условіямъ (30) и (31). Слѣдовательно, дѣлители полинома X_m должны входить въ раціональное рѣшеніе не иначе, какъ подъ формой, приводимой къ виду:

$$y = \frac{K}{X_m^{\alpha'} L}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

гдѣ K и L суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общихъ дѣлителей съ X_m. Если же уравненіе (1) не имѣетъ второй части, т. е. совпадаетъ съ уравненіемъ (26), то $\alpha' = -\infty$ и, если X_m не приводится къ виду: $X_m = 1$, уравненіе (27) не допускаетъ никакихъ раціональныхъ рѣшеній.

Для дѣлителей полинома X_m (если онъ не приводится къ виду: $X_m = 1$) высшій предѣлъ A_m показателя α совпадаетъ съ низшимъ предѣломъ α', т. е.

$$A_m = \alpha'.$$

Высшіе предѣлы A_1, A_2, ..., A_{m-1} значеній показателя α для дѣлителей каждаго изъ полиномовъ (33) будутъ болѣе α' и могутъ быть получены изъ предшествующихъ вычисленій слѣдующимъ порядкомъ. Пусть X есть одинъ изъ полиномовъ (33). Изъ числа полиномовъ

$$\delta_1, \ \delta_2, \ldots$$

отмѣтимъ всѣ тѣ, которые дѣлятся на X, и изъ вышеуказанныхъ показателей α_1, α_2, ... выберемъ тѣ, которые соотвѣтствуютъ отмѣченнымъ полиномамъ δ. Пусть эти показатели будутъ: α'', α''', ... Наибольшее изъ чиселъ α'', α''', ... и представитъ высшій предѣлъ A показателя α, соотвѣтствующаго полиному X. По этому плану получатся всѣ высшіе предѣлы A_1, A_2, ..., A_{m-1}.

Составимъ затѣмъ выраженіе N, опредѣляемое такъ:

$$N = X_1^{A_1} X_2^{A_2} \ldots X_m^{A_m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

Это выраженіе представляетъ ту часть знаменателя формы, служащей для изысканія всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1), которая соотвѣтствуетъ дѣлителямъ полинома F. Выраженіе N этого рода нужно составить для каждаго изъ полиномовъ $F_1, F_2, \ldots, F_t$. Пусть эти выраженія N соотвѣтственно будутъ; $N_1, N_2, \ldots, N_t$. Всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) изыскиваются подъ формой:

$$y = \frac{\S}{N_1 N_2 \ldots N_t}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (37)$$

гдѣ $\S$ есть цѣлый полиномъ.

Форма (37) должна по существу совпадать съ формой (11), опредѣляемой по правиламъ, изложеннымъ въ § 3. Но особенность формы (37) въ томъ, что для составленія ея не только не нужно знать полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$, но не требуется имѣть и разложенія полинома P_0 на неприводимые множители (хотя, какъ сейчасъ увидимъ, знать неприводимые множители полинома P_0 или p весьма полезно).

Въ изложенномъ процессѣ играетъ существенную роль изысканіе условія (31) существованія общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ σ и F, а также, если это условіе и условіе (30) выполнены, изысканіе общаго наибольшаго дѣлителя δ тѣхъ же полиномовъ. Въ этихъ изысканіяхъ полиномъ σ можно замѣнять болѣе простыми полиномами, отбрасывая или прибавляя въ немъ члены, кратные полиному F, и устраняя или присоединяя множители, не имѣющіе съ F общихъ дѣлителей ни при какихъ значеніяхъ α. Основываясь на этомъ свойствѣ, мы можемъ подвергать полиномъ σ различнымъ видоизмѣненіямъ.

Если при этихъ видоизмѣненіяхъ полиномъ σ приводится къ полиному ς, то эту связь полиномовъ σ и ς будемъ обозначать такъ:

$$\sigma \equiv \varsigma .$$

Докажемъ затѣмъ, что

$$\sigma \equiv \zeta ,$$

гдѣ *)

$$\zeta = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n-i-1) P_i F^{i-1-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^{n-i} =$$

$$= (-1)^n \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n-1) P_0 F^{-1-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^n + \ldots +$$

$$+ \alpha(\alpha+1) P_{n-2} F^{n-3-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - \alpha P_{n-1} F^{n-2-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right) + P_n F^{n-1-\beta} . \quad (38)$$

*) Этотъ полиномъ ζ соотвѣтствуетъ полиному ζ_n, который въ статьѣ „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ опредѣляется равенствомъ (68). Очевидно, полиномъ ζ, опредѣляемый равенствомъ (14), есть частный случай полинома ζ, опредѣляемаго равенствомъ (38).

*

Замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{F}\frac{dF}{dx} + \varrho . F,$$

гдѣ ϱ есть цѣлый полиномъ, затѣмъ внеся это выраженіе $\frac{dp}{dx}$ во вторую часть равенства (7) и принявъ во вниманіе равенство (38), находимъ:

$$G . \sigma = H . \zeta + F . U, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

гдѣ G, H и U суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый и второй выражаются такъ:

$$G = \frac{D}{F^\beta} \quad \text{и} \quad H = \left(\frac{p}{F}\right)^{n-1}.$$

Такъ какъ полиномы G и H не имѣютъ общихъ дѣлителей съ полиномомъ F, то равенство (39) непосредственно показываетъ, что $\sigma \equiv \zeta$, что̀ и требовалось доказать. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ процессѣ вмѣсто полинома σ можно брать полиномъ ζ, опредѣляемый равенствомъ (38).

Это замѣчаніе относится къ каждому изъ полиномовъ $F_1, F_2, \ldots, F_t$, которымъ соотвѣтствуетъ t полиномовъ ζ, вводимыхъ вмѣсто одного только полинома σ. Эта замѣна полинома σ нѣсколькими полиномами ζ можетъ оказаться полезною, такъ какъ на практикѣ въ разныхъ случаяхъ могутъ имѣть значеніе разныя видоизмѣненія функціи σ. Прослѣдимъ нѣкоторыя изъ дальнѣйшихъ видоизмѣненій этого рода.

При $\beta = 0$ находимъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)\left[(\alpha+n-1)P_0F^{-1}\frac{dF}{dx} - P_1\right],$$

при $\beta = 1$ находимъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-3)\left[(\alpha+n-2)(\alpha+n-1)P_0F^{-2}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - (\alpha+n-2)P_1F^{-1}\frac{dF}{dx} + P_2\right],$$

и т. д. Если условимся полагать: $k = \beta + 1$ при $\beta < n-1$ и $k = n$ при $\beta \geqq n$, то будемъ имѣть вообще:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-i}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)P_iF^{i-1-\beta}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{n-i}. \quad (40)$$

Отсюда легко усмотрѣть, что полиномъ ζ, опредѣляемый равенствомъ (38), можно привести къ указанному въ статьѣ проф. К. А. Андреева виду (22'), т. е.

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^{n-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)}{(1+\beta-i)!} \frac{d^{1+\beta-i} P_i}{dx^{1+\beta-i}}. \quad (41)$$

Изъ этого разнообразія формъ, къ которымъ приводятся полиномы σ и ζ, можно выбирать любую, смотря по обстоятельствамъ.

Покажемъ наконецъ, что въ отношеніи легкости разсматриваемаго процесса вычисленія идеальнымъ случаемъ будетъ тотъ, когда полиномъ F есть *неприводимый*. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣетъ мѣсто этотъ случай и если α есть цѣлое число, удовлетворяющее условію (31), то общій наибольшій дѣлитель δ полиномовъ ζ и F непремѣнно долженъ совпадать съ F; полиномы X_1, $X_2, \ldots$ въ формулахъ (33), (34) и (36) должны сводиться къ одному только полиному F, и сверхъ того будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \Theta(\alpha),$$

т. е. первая часть равенства (31) получается посредствомъ однихъ только отбрасываній въ полиномѣ σ или ζ членовъ, кратныхъ F, и множителей, которые ни при какомъ значеніи α не дѣлятся на F. Въ виду этихъ упрощеній на практикѣ никогда не слѣдуетъ упускать случаевъ выдѣлять изъ полинома p его неприводимые дѣлители и вводить ихъ въ число полиномовъ F_1, $F_2, \ldots, F_t$, входящихъ въ равенства (26), (27) и (28). Но окончательная форма (37) не будетъ однако зависѣть отъ этихъ промежуточныхъ упрощеній.

Примѣнимъ изложенную теорію къ двумъ примѣрамъ.

Примѣръ 1. Данное уравненіе пусть будетъ:

$$(x^2+gx+h)^2 x^5 \frac{d^2y}{dx^2} - 6(x^3-hx-gh)x^4 y =$$
$$= 12h(x^2+gx+h)^3(gx+h).$$

Имѣемъ:

$$P_0 = (x^2+gx+h)^2 x^5, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = -6(x^3-hx-gh)x^4,$$
$$V = 12h(x^2+gx+h)^3(gx+h).$$

Отыскивая раціональныя рѣшенія, удовлетворяющія данному уравненію при произвольныхъ g и h, получаемъ:

$$p = (x^2+gx+h)x, \quad D = (x^2+gx+h)x^4,$$

$$F_1 = x^2+gx+h, \quad F_2 = x, \quad D = F_1 F_2^4, \quad V = F_1^3 F_2^0 \cdot 12h(gx+h).$$

Дѣлители F_1 и F_2 полинома p неприводимые, чтò служитъ къ облегченію вычисленій.

Для дѣлителя F_1 полинома p имѣемъ:

$$\beta_1 = 1\,, \ \varepsilon_1 = 3\,, \ \alpha_1' = -3\,,$$

$$\zeta = x^4 [\alpha(\alpha+1)\, x (2x+g)^2 - 6(x^3 - hx - gh)] \equiv$$

$$\equiv \alpha(\alpha+1)\, x(2x+g)^2 - 6(x^3 - hx - gh) \equiv$$

$$\equiv (g^2 - 4h)\, \alpha(\alpha+1) - 6(g^2 - 2h).$$

Условіе (31) при этихъ данныхъ получаетъ видъ:

$$(g^2 - 4h)\, \alpha(\alpha+1) - 6(g^2 - 2h) = 0\,.$$

Получаемыя отсюда значенія α, при произвольныхъ g и h, не будутъ вообще цѣлыми и, слѣдовательно, должно полагать: $A_1 = \alpha_1' = -3$.

Для дѣлителя $F_2 = x$ полинома p имѣемъ:

$$\beta_2 = 4\,, \ \varepsilon_2 = 0\,, \ \alpha_2' = 3\,,$$

$$\zeta = \alpha(\alpha+1)(x^2+gx+h)^2 - 6x(x^3 - hx - gh) \equiv \alpha(\alpha+1)\, h^2\,.$$

Очевидно, ζ не можетъ дѣлиться на F_2 ни при какихъ значеніяхъ α, бóльшихъ предѣла α_2'. Поэтому $A_2 = \alpha_2' = 3$.

Раціональное рѣшеніе даннаго уравненія изыскивается подъ формой:

$$y = \frac{\xi}{F_1^{A_1} F_2^{A_2}} = \frac{(x^2+gx+h)^3\, \xi}{x^3}\,,$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Изыскивая ξ, получаемъ: $\xi = 1$ и, слѣдовательно, при произвольныхъ g и h существуетъ раціональное рѣшеніе:

$$y = \left(\frac{x^2+gx+h}{x}\right)^3.$$

Примѣръ 2. Данное уравненіе пусть будетъ:

$$x(x^5 - h)(x^5 + 5gx + 4h)\, \frac{d^2y}{dx^2} +$$

$$+ (7x^{10} - 5gx^6 - 24hx^5 - 20ghx - 8h^2)\, \frac{dy}{dx} +$$

$$+ (5x^9 - 15gx^5 - 30hx^4 - 10gh)\, y = 0\,.$$

Имѣемъ:

$$P_0 = x(x^5 - h)(x^5 + 5gx + 4h),$$

$$P_1 = 7x^{10} - 5gx^6 - 24hx^5 - 20ghx - 8h^2,$$

$$P_2 = 5x^9 - 15gx^5 - 30hx^4 - 10gh, \quad V = 0.$$

Отыскивая раціональныя рѣшенія, удовлетворяющія данному уравненію при произвольныхъ g и h, находимъ:

$$p = P_0 = F_1 F_2 F_3,$$

гдѣ F_1, F_2, F_3 суть неприводимые полиномы, опредѣляемые такъ:

$$F_1 = x, \; H_2 = x^5 - h, \; F_3 = x^5 + 5gx + 4h.$$

Далѣе находимъ: $D = 1$, т. е. для всѣхъ дѣлителей полинома p имѣемъ: $\beta = 0$. Сверхъ того для тѣхъ же дѣлителей имѣемъ: $\varepsilon = +\infty$ и, слѣдовательно, $\alpha' = -\infty$.

Для дѣлителя $F_1 = x$ полинома p имѣемъ:

$$\zeta \equiv -4h^2\alpha(\alpha - 1) \equiv \alpha(\alpha - 1).$$

Отсюда видно, что ζ дѣлится на $F_1 = x$ при слѣдующихъ цѣлыхъ значеніяхъ α:

$$\alpha_1'' = 0, \; \alpha_1''' = 1.$$

Слѣдовательно, $A_1 = \alpha_1''' = 1$.

Для дѣлителя $F_2 = x^5 - h$ полинома p имѣемъ:

$$\zeta \equiv 5x^4[5\alpha(\alpha + 1)x(x^5 + 5gx + 4h) - \alpha P_1] \equiv \alpha(\alpha + 2).$$

Отсюда видно, что ζ будетъ дѣлиться на F_2 при слѣдующихъ цѣлыхъ значеніяхъ α:

$$\alpha_2'' = -2, \; \alpha_2''' = 0.$$

Слѣдовательно, $A_2 = \alpha_2''' = 0$.

Для дѣлителя $F_3 = x^5 + 5gx + 4h$ полинома p находимъ:

$$\zeta \equiv 5(x^4 + g)\alpha[5(\alpha + 1)x(x^5 - 1)(x^4 + g) - P_1] \equiv$$

$$\equiv \alpha[5(\alpha + 1)x(x^5 - 1)(x^4 + g) - P_1] \equiv$$

$$\equiv 5\alpha(\alpha - 1)x(x^5 - h)(x^4 + g) \equiv \alpha(\alpha - 1).$$

Очевидно, ξ дѣлится на F_3 при слѣдующихъ значеніяхъ α:

$$\alpha_3''=0\,,\ \alpha_3'''=1\,.$$

Поэтому $A_3=\alpha_3'''=1$.

Всѣ искомыя раціональныя рѣшенія даннаго уравненія опредѣляются при посредствѣ формы:

$$y=\frac{\xi}{F_1^{A_1}F_2^{A_2}F_3^{A_3}}=\frac{\xi}{x(x^5+5gx+4h)}\,,$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Опредѣляя полиномъ ξ, находимъ:

$$\xi=C_1x^5+C_2x+4C_1q\,,$$

гдѣ C_1 и C_2 суть произвольныя постоянныя. Слѣдовательно общій интегралъ даннаго уравненія представляется въ раціональной формѣ:

$$y=\frac{C_1(x^5+4q)+C_2x}{x(x^5+5gx+4h)}\,.$$

Примѣръ этотъ съ небольшою перемѣною въ обозначеніяхъ заимствованъ изъ перваго мемуара В. Г. Имшенецкаго.

§ 5. Особое преимущество способа, основаннаго на употребленіи интегрирующаго множителя.

Изложеніе теоріи, основанное на употребленіи интегрирующаго множителя В. Г. Имшенецкаго, представлено въ статьѣ проф. К. А. Андреева и въ моей статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ съ такою полнотою, что считаю излишнимъ излагать здѣсь эту теорію и коснусь лишь одной ея особенности.

Послѣ перенесенія всѣхъ усовершенствованій изъ этой теоріи въ вышеприведенную теорію, изложенную безъ посредства интегрирующаго множителя, обѣ эти теоріи почти сливаются, такъ какъ различіе между ними остается главнымъ образомъ только формальное, исключая одного пункта, касающагося вычисленія числителя ξ въ равенствѣ (11) или (37).

Представивъ равенство (11) или (37) въ формѣ:

$$y=\frac{M_1\xi}{M}\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

гдѣ M_1 и M суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя, мы должны внести это выраженіе y въ уравненіе (1). Если не прибѣгать къ интегрирующему множителю, то послѣ указанной замѣны получимъ уравненіе вида:

$$\Phi_0\frac{d^n\xi}{dx^n}+\Phi_1\frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}}+\cdots+\Phi_n\xi=V\,,\ \ldots\ldots \quad (43)$$

гдѣ вообще

$$\Phi_i = P_i + \binom{n-i+1}{1} P_{i-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{M_1}{M}\right) + \dots$$

$$+ \binom{n-i+s}{s} P_{i-s} \frac{d^s}{dx^s}\left(\frac{M_1}{M}\right) + \dots + \binom{n}{i} P_0 \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{M_1}{M}\right), \quad . \; . (44)$$

при чемъ

$$\binom{k}{s} = \frac{k(k-1)\dots(k-s+1)}{1.2\dots s}.$$

При вычисленіи выраженій $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ приходится, такимъ образомъ, производить дифференцированіе дроби $\frac{M_1}{M}$.

При употребленіи интегрирующаго множителя μ можно вовсе избѣгнуть дифференцированія дробей. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ уравненіемъ:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{S_0 M_1}{M}\xi\right) + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{S_1 M_1}{M}\xi\right) + \dots + \frac{S_n M_1}{M}\xi = V\mu, \quad . \; . (45)$$

гдѣ вообще

$$S_i = \mu P_i - \binom{n-i+1}{1}\frac{d(\mu P_{i-1})}{dx} + \dots +$$

$$+ (-1)^s \binom{n-i+s}{s}\frac{d^s(\mu P_{i-s})}{dx^s} + \dots + (-1)^i \binom{n}{i}\frac{d^i(\mu P_0)}{dx^i}. \quad (46)$$

Существуетъ множество способовъ выбрать интегрирующій множитель μ такъ, чтобы онъ представлялъ функцію *цѣлую* и чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ полиномы $S_0, S_1, \dots, S_n$ имѣли общій дѣлитель M. Если множитель μ выбранъ съ соблюденіемъ этихъ условій, то функціи

$$\frac{S_0}{M}, \frac{S_1}{M}, \dots, \frac{S_n}{M}$$

должны быть цѣлыми и ни въ формулахъ (46), ни въ коэффиціентахъ уравненія (45) не будетъ дробныхъ выраженій *).

Итакъ, интегрирующій множитель μ, надлежащимъ образомъ выбранный, уничтожаетъ въ дифференціальномъ уравненіи (45) дроби подъ знаками дифференцированія.

*) Форма (45) сама по себѣ удобна также для дальнѣйшаго вычисленія полинома ξ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и не нуждается въ приведеніи ея къ виду:

$$f_0 \frac{d^n\xi}{dx^n} + f_1 \frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} + \dots + f_n\xi = V.\mu.$$

Это преимущество неотъемлемо принадлежитъ способу, основанному на употребленіи интегрирующаго множителя. Вмѣстѣ съ тѣмъ выборъ цѣлаго множителя μ, уничтожающаго въ уравненіи (45) дроби, представлялъ съ самаго начала одну изъ существенныхъ особенностей способа В. Г. Имшенецкаго, которую впослѣдствіи съ наибольшею полнотою развилъ въ своей статьѣ проф. К. А. Андреевъ.

Слѣдуя схемѣ проф. К. А. Андреева, займемся составленіемъ болѣе простаго множителя μ, уничтожающаго въ уравненіи (45) дроби и представляемаго цѣлою функціей.

Замѣтимъ прежде всего, что въ функцію μ, удовлетворяющую предъявленнымъ къ ней требованіямъ, нужно вводить лишь такіе множители вида $(x+a)^\gamma$, для которыхъ $x+a$ есть дѣлитель знаменателя M. Поэтому линейные дѣлители полинома p, на которые не дѣлится полиномъ M, вовсе устранимъ изъ дальнѣйшаго разсмотрѣнія.

Пусть $x+a$ есть дѣлитель полинома M и пусть A есть соотвѣтствующій изъ показателей $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, входящихъ въ знаменатель второй части равенства (11). Очевидно, будемъ имѣть:

$$A > 0 \quad \text{и} \quad M = (x+a)^A \cdot H, \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

гдѣ H есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $x+a$. Далѣе представимъ искомый интегрирующій множитель μ такъ:

$$\mu = (x+a)^\gamma \cdot G, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

гдѣ G есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $x+a$. Цѣлое число γ надлежитъ опредѣлить.

Очевидно, число γ, удовлетворяя условію:

$$\gamma \geqq 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ должно быть таково, чтобы полиномы

$$S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n$$

дѣлились на $(x+a)^A$. Но для выполненія этого послѣдняго требованія необходимо и достаточно, чтобы только полиномы

$$S_0, S_1, \ldots, S_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

дѣлились на $(x+a)^A$, такъ какъ при этомъ условіи полиномъ S_n непремѣнно раздѣлится на $(x+a)^A$ (иначе уравненіе (45) привело бы къ противорѣчію). Замѣтивъ при этомъ, что на основаніи равенствъ (46) и (48) и свойствъ функцій (12) должно имѣть силу равенство:

$$S_i = (x+a)^{\gamma+1+\beta-i}\, T_i, \; (i = 0, 1, \ldots, n)$$

гдѣ T_1 есть цѣлый полиномъ, усматриваемъ, что функціи (50) дѣлятся нацѣло на

$$(x+a)^{\gamma+2+\beta-n}.$$

Поэтому число γ удовлетворитъ указанному требованію, если положимъ:

$$\gamma+2+\beta-n=A+\omega, \quad \ldots \ldots \ldots (51)$$

гдѣ ω есть цѣлое число, не меньшее нуля и выбираемое такъ, чтобы имѣло силу неравенство (49). При соблюденіи этихъ условій число ω выгодно брать наименьшимъ.

Выбирая число ω, предположимъ во-первыхъ, что имѣетъ мѣсто совпаденіе A съ α', т. е.

$$A=\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon.$$

Имѣя въ виду, что $A>0$, убѣждаемся, что $1+\beta-n>0$. Отсюда и изъ разсмотрѣнія полиномовъ (12) вытекаетъ, что полиномы P_0, $P_1, \ldots, P_n$ имѣютъ общій дѣлитель $x+a$. Слѣдовательно, полиномъ V не дѣлится $x+a$ или, иначе, $\varepsilon=0$. Поэтому $A=\alpha'=1+\beta-n$ и $\gamma=\omega-1$. Отсюда видно, что наименьшее положительное ω, удовлетворяющее условію (49), будетъ: $\omega=1$, и слѣдовательно

$$\gamma=0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (52)$$

Этотъ результатъ показываетъ, что $x+a$ не будетъ дѣлителемъ искомаго полинома μ въ томъ случаѣ, когда $A=\alpha'$.

Во-вторыхъ предположимъ, что A не совпадаетъ съ α' и слѣдовательно $A>\alpha'$. Покажемъ, что въ этомъ случаѣ условіе (49) соблюдается при $\omega=0$, т. е. число

$$\gamma=A+n-\beta-2 \quad \ldots \ldots \ldots (53)$$

удовлетворяетъ условію: $A+n-\beta-2 \geqq 0$. Если допустимъ противное, то помня, что $A>0$, будемъ имѣть:

$$0<A<\beta+2-n$$

и, слѣдовательно, $1+\beta-n>0$. Отсюда и изъ разсмотрѣнія полиномовъ (12) убѣждаемся, что полиномы $P_0, P_1, \ldots, P_n$ имѣютъ общаго дѣлителя $x+a$ и, слѣдовательно, полиномъ V не дѣлится на $x+a$, иначе, $\varepsilon=0$. Поэтому $\alpha'=1+\beta-n$ и неравенство $A>\alpha'$ получаетъ видъ: $\beta+1-n<A$. Такимъ образомъ приходимъ къ противорѣчивымъ для цѣлаго числа A неравенствамъ:

$$\beta+1-n<A<\beta+2-n.$$

Поэтому нельзя допустить неравенства $A+n-\beta-2<0$ и, слѣдовательно, число γ, опредѣляемое равенствомъ (53), удовлетворитъ неравенству (49).

Распространяя указанный порядокъ вычисленія показателя γ на всѣ линейные дѣлители $x+a$ полинома M, вполнѣ опредѣлимъ цѣлый интегрирующій множитель μ, уничтожающій въ уравненіи (45) дроби.

Если не дано разложенія полинома p на линейные дѣлители, то вмѣсто этихъ дѣлителей можно брать дѣлители вида (33) и (34), находимые процессомъ вычисленія, указаннымъ въ § 4.

Выясненное сейчасъ преимущество способа, основаннаго на употребленіи интегрирующаго множителя, приводитъ къ заключенію, что вообще этотъ способъ безусловно превосходитъ всѣ остальные, если поставить себѣ главной задачей только свести нахожденіе всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) къ нахожденію цѣлыхъ рѣшеній преобразованнаго уравненія, каковая задача находится въ связи съ опредѣленіемъ лишь знаменателя M.

Чтò же касается опредѣленія полинома M_1, то интегрирующій множитель при этомъ опредѣленіи теряетъ свои преимущества *), уступая въ своихъ достоинствахъ другимъ пріемамъ вычисленія, изложеннымъ выше въ §§ 3 и 4.

Само собою разумѣется, что теорія нахожденія раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) не нуждается въ опредѣленіи полинома M_1, какъ въ неизбѣжной необходимости. Но выдѣленіе полинома M_1 вообще приноситъ существенное и естественное облегченіе, благодаря пониженію степени того цѣлаго рѣшенія, къ которому задача приводится. Подобнымъ облегченіемъ теорія не должна пренебрегать.

Если при рѣшеніи задачи о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) нужно дорожить всѣми упрощеніями, какія допускаются характеромъ данныхъ, то, мнѣ кажется, удобнѣе всего отыскивать сначала знаменатель формы (11) или (37), опредѣляющій полиномы M и M_1, по указаннымъ въ § 3 или 4 правиламъ. Затѣмъ указаннымъ сейчасъ порядкомъ опредѣлять цѣлый интегрирующій множитель μ. Очевидно, вычисленіе множителя μ не представляется уже никакихъ затрудненій, послѣ того какъ найдены полиномы M и M_1. Наконецъ слѣдуетъ вычислять полиномъ ξ при посредствѣ уравненія (45).

---

*) Въ § 3 моей статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ даны средства опредѣлять при помощи интегрирующаго множителя всѣ показатели $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и слѣдовательно оба полинома M и M_1. Но при опредѣленіи состава полинома M_1 и соотвѣтствующихъ факторовъ множителя μ приходится брать отрицательные показатели, т. е. считать множитель μ дробнымъ. Пользуясь этимъ множителемъ, можно было бы достигнуть сокращенія въ уравненіи (45) не только полинома M, но и полинома M_1. Но невыгода этого вычисленія въ томъ, что формулы (46) осложняются, содержа дифференцированіе дробнаго выраженія μ.