Объ автоморфной функціи, аналогичной экспонентной.

В. П. Алексѣевскаго.

Періодическія функціи обладаютъ автоморфизмомъ, т. е. не измѣняются отъ замѣны перемѣннаго простѣйшею группою линейныхъ подстановокъ. Однако, не однѣ періодическія, но и автоморфныя функціи въ собственномъ смыслѣ слова, встрѣчаются очень часто, но ихъ основное свойство оставалось незамѣченнымъ; напр. выраженіе

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

служащее исходнымъ пунктомъ для вывода строки e^x, есть автоморфная функція и, при томъ, аналогичная e^x.

Не лишено интереса опредѣлить самый общій видъ функціи, обладающей тѣми-же свойствами.

Задачу можно формулировать такимъ образомъ:

Опредѣлить функцію $F(x)$, обладающую слѣдующими свойствами: 1) при всѣхъ линейныхъ преобразованіяхъ независимаго перемѣннаго x, составляющихъ группу,

$$F\left(\frac{\alpha_i x+\beta_i}{\gamma_i x+\delta_i}\right)=F(x),$$

2) для нѣкоторой функціи z перемѣнныхъ x и y

$$F(z)=F(x)\,.\,F(y).$$

Группа линейныхъ подстановокъ должна быть прерывной; въ противномъ случаѣ искомая функція была-бы постоянной. Но можно къ искомой функціи присоединить непрерывную группу, по отношенію къ которой прерывная будетъ подгруппой. Успѣхъ рѣшенія и зависитъ отъ способа введенія этой непрерывной группы. Мы достигаемъ этого слѣдующимъ *опредѣленіемъ* функціи z.

Функція

$$z = \Phi(x, y)$$

отъ *всякаго* линейнаго преобразованія x преобразуется *такимъ-же* образомъ, т. е.

$$\Phi\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, y\right) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

и z обращается въ y, когда x равно нѣкоторому постоянному c.

Такое опредѣленіе отнюдь не исключаетъ непрерывности линейной подстановки и, слѣдовательно, допускаетъ существованіе безконечно-малыхъ преобразованій.

Всякая линейная подстановка обладаетъ двумя инваріантными точками. Называя ихъ чрезъ a и b и подвергая нашу функцію безконечно-малому преобразованію, получимъ:

$$l\,(z - a)\,(z - b) = \frac{dz}{dx}\,l\,(x - a)\,(x - b),$$

гдѣ l—нѣкоторое постоянное.

Интегрируя это уравненіе, предполагая, что l не равно нулю, и опредѣляя произвольную функцію, вводимую интегрированіемъ съ помощью вышеупомянутыхъ начальныхъ условій, получимъ:

$$\frac{z - a}{z - b} \cdot \frac{c - a}{c - b} = \frac{x - a}{x - b} \cdot \frac{y - a}{y - b}.$$

Отсюда

$$z = \frac{ab(x + y - c) - (a + b - c)xy}{ab - xy + c(x + y - a - b)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

До сихъ поръ мы предполагали, что a и b различны, а l не равно нулю, но формула распространяется и на эти случаи; относительно допущенія $l = 0$ слѣдуетъ замѣтить, что оно эквивалентно удаленію одной или обѣихъ точекъ въ безконечность.

Полагая въ формулѣ (1) $c = a$, находимъ

$$z = b,$$

т. е. при совпаденіи постояннаго c съ одной изъ инваріантныхъ точекъ, z совпадаетъ съ другой; поэтому дальше мы должны предполагать, что c *отлично отъ каждой изъ инваріантныхъ точекъ*.

Итакъ, выраженіе (1) замѣняетъ для искомой функціи $F(x)$ сумму $x+y$, характерную для экспонентной. Но послѣдняя удовлетворяетъ требованіямъ нашей задачи, слѣдовательно и

$$z=x+y$$

должно быть частнымъ случаемъ выраженія (1). И дѣйствительно, формула (1) обращается въ предыдущую, когда $c=0$, а инваріантныя точки a и b удаляются въ безконечность.

Полагая на время $z=x_1$, напишемъ формулу (1) такимъ образомъ:

$$x_1=\Phi_1(x, y).$$

Составимъ теперь рядъ выраженій:

$$x_2=\Phi_1(x_1, y), \quad x_3=\Phi_1(x_2, y) \ldots .$$

По исключеніи изъ нихъ промежуточныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots$, найдемъ

$$x_1=\Phi_1(x, y), \quad x_2=\Phi_2(x, y), \quad x_3=\Phi_3(x, y) \ldots$$

гдѣ правыя части будутъ линейныя функціи относительно x; слѣдовательно, онѣ представляютъ группу, въ которой y—параметръ. Эту группу мы и желали присоединить.

Подставляя теперь $x_1, x_2, x_3 \ldots$ въ искомую функцію $F(x)$, по второму ея свойству найдемъ:

$$F(x_1)=F(x)\,F(y), \quad F(x_2)=F(x)\,F^2(y), \quad F(x_3)=F(x)\,F^3(y)$$

и т. д.

Отсюда ясно, что если y будетъ корнемъ уравненія

$$F(x)=1,$$

то

$$F(x_i)=F(x).$$

Итакъ, непрерывная группа линейныхъ подстановокъ обращается въ прерывную, когда положимъ y равнымъ корню вышеупомянутаго уравненія.

Переходимъ къ составленію дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ функція $F(x)$.

Съ этою цѣлью составимъ выраженіе

$$F(z)-F(x).$$

На основаніи условія

$$F(z) = F(x)\, F(y)$$

имѣемъ

$$F(z) - F(x) = F(x)\, [F(y) - 1].$$

Съ другой стороны

$$F(z) - F(x) = \frac{F(z) - F(x)}{z - x} \cdot (z - x).$$

Вычисливъ $(z - x)$ изъ формулы (1), находимъ:

$$z - x = \frac{(y - c)\,(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b) - (c - x)\,(c - y)}.$$

Подставляя это выраженіе въ предыдущее тождество и сравнивая результатъ съ первымъ выраженіемъ, по раздѣленіи на $(y - c)$, получимъ:

$$\frac{(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b) - (c - x)\,(c - y)} \cdot \frac{F(z) - F(x)}{z - x} = F(x) \cdot \frac{F(y) - 1}{y - c}.$$

Допустивъ теперь, что c есть корень уравненія

$$F(x) = 1$$

и замѣтивъ, что когда $y = c$, то $z = x$, найдемъ:

$$\frac{(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b)}\, F'(x) = F(x) \cdot F'(c) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Таково искомое дифференціальное уравненіе.

Изъ него видимъ: 1) что функція $F(x)$ зависитъ отъ значенія $F'(c)$, 2) что послѣдняя величина есть произвольное постоянное количество, 3) что для существованія $F(x)$ вообще $F'(c)$ должна быть отлична отъ нуля (въ противномъ случаѣ $F(x)$ будетъ постоянной), и наконецъ 4) что когда $c = \infty$, $F'(c)$ должна быть нулемъ 2-го порядка, такъ какъ произведеніе

$$(c - a)\,(c - b)\, F'(c)$$

должно быть постоянной величиной.

Съ точки зрѣнія теоріи непрерывныхъ группъ найденный результатъ получаетъ новое толкованіе. Дѣйствительно, просматривая ходъ предыдущихъ разсужденій, видимъ, что лѣвая часть уравненія (2) представляетъ символъ U (С. Ли) безконечно-малаго преобразованія функціи

$F(x)$ относительно группы. Слѣдовательно, уравненіе (2) эквивалентно слѣдующему:

$$UF(x) = F(x) \cdot F'(c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

т. е. *символъ безконечно-малаго преобразованія $F(x)$ пропорціоналенъ самой функціи.*

Этотъ результатъ аналогиченъ извѣстному предложенію: производная экспонентной функціи пропорціональна самой функціи.

Легко убѣдиться повѣркою, что нашъ выводъ остается справедливъ и тогда, когда $c = \infty$. Для этого надо положить сначала въ равенствѣ (1) $c = \infty$ и затѣмъ повторить разсужденія, служившія для вывода дифференціальнаго уравненія.

Для нахожденія $F(x)$ остается проинтегрировать уравненіе (2).

Такимъ образомъ получимъ:

$$F(x) = \left(\frac{\dfrac{x-a}{x-b}}{\dfrac{c-a}{c-b}}\right)^{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

гдѣ

$$g = \frac{(c-a)(c-b)F'(c)}{a-b}.$$

Итакъ, точки a и b суть критическія точки функціи; сама функція вообще многозначная.

Чтобы показать разнообразіе формъ функціи F мы разсмотримъ нѣкоторые частные случаи, при чемъ для упрощенія будемъ давать постояннымъ c и $F'(c)$ частныя значенія.

Полагая $c = 0$, $F'(c) = 1$ получимъ:

$$E(x) = \left(\frac{1-\dfrac{x}{a}}{1-\dfrac{x}{b}}\right)^{\frac{ab}{a-b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

когда $a \lesseqgtr b$*); при этомъ

$$z = \frac{ab(x+y)-(a+b)xy}{ab-xy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Полагая $a = b$, имѣемъ:

$$E(x) = e^{\frac{ax}{a-x}}$$

и

$$z = \frac{a^2(x+y)-2axy}{a^2-xy}.$$

---

*) Буквою E означаются частные виды функціи F. (*Ред.*)

Въ этомъ случаѣ функція стала однозначной. Причина понятна; предыдущая функція $E(x)$ при обходѣ перемѣннымъ замкнутаго контура, заключающаго обѣ точки a и b, не мѣняетъ своей величины, поэтому то же самое остается, когда обѣ точки совпали.

Пусть a и b *чисто мнимыя* сопряженныя количества, функція принимаетъ видъ:

$$E(x) = e^{\alpha \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)},$$

гдѣ α коэффиціентъ обоихъ мнимыхъ количествъ.

Соотвѣтственная формула для z такая:

$$z = \frac{\alpha^2(x+y)}{\alpha^2 - xy}.$$

Пусть $b = \infty$; тогда

$$E(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-a}$$

и

$$z = x + y - \frac{1}{a} xy.$$

Если $a = \infty$, $b = \infty$, то

$$E(x) = e\ .$$

Такимъ образомъ, наша *автоморфная функція обращается въ экспонентную, когда обѣ критическія точки въ безконечности.*

Когда одна изъ инваріантныхъ точекъ совпадаетъ съ нулемъ, предыдущая формула не годится, потому-что одновременное существованіе условій $c = 0$ и $b = 0$ требуетъ совпаденія c и b, что, какъ мы видѣли, нужно исключить.

Поэтому, полагая $b = 0$, принимаемъ напр. $c = 1$, $F'(c) = m$; тогда, полагая еще $a = \infty$, получаемъ

$$E(x) = x^m.$$

Если $c = \infty$, то положимъ $\lim. (c-a)(c-b)F'(c) = \lim. c^2 F'(c) = 1$.

Тогда

$$E(x) = \left(\frac{1 - \frac{a}{x}}{1 - \frac{b}{x}}\right)^{\frac{1}{a-b}},$$

$$z = \frac{xy - ab}{x + y - a - b}.$$

Слѣдовательно, когда $b=0$, то

$$E(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{a}}$$

и

$$z=\frac{xy}{x+y-a}.$$

Если $b=0$ и $a=0$

$$E(x)=e^{-\frac{1}{x}}$$

и

$$z=\frac{xy}{x+y}.$$

Вычисленіе группы дѣлается по указанному выше правилу.

Возьмемъ напр. форму (5) для $E(x)$. Опредѣляя корни α_n уравненія

$$E(x)=1,$$

находимъ:

$$\alpha_n=\frac{ab(1-\varrho^{2n})}{b-a\varrho^{2n}},$$

гдѣ

$$\varrho=e^{\frac{\pi i(a-b)}{ab}}.$$

Полагая теперь въ формулѣ (6)

$$z=x_n\,,\quad y=\alpha_n\,,$$

находимъ прерывную группу для взятой формы $E(x)$:

$$x_n=\frac{x(a-b\varrho^{2n})-ab(1-\varrho^{2n})}{x(1-\varrho^{2n})-(b-a\varrho^{2n})}\quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Укажемъ нѣкоторыя слѣдствія.

Линейныя дифференціальныя уравненія съ перемѣнными коэффиціентами, приводимые къ виду

$$U^ny+A_1U^{n-1}y+\ldots+A_{n-1}Uy+A_ny=0,\quad \ldots . (8)$$

интегрируются въ функціяхъ $E(x)$ такъ-же, какъ и линейныя дифференціальныя уравненія съ постоянными коэффиціентами.

*

Дѣйствительно, основаніемъ для интегрированія послѣднихъ служитъ свойство экспонентной функціи:

$$\frac{d^n e^{rx}}{dx^n} = r^n \cdot e^{rx}.$$

Пусть

$$Uy = k(x-a)(x-b)y'.$$

На основаніи предыдущаго всегда существуетъ такая функція $E(x)$, что

$$UE(x) = k(x-a)(x-b)E'(x).$$

или

$$UE(x) = E(x),$$

и слѣдовательно:

$$U^n[E(x)]^r = r^n \cdot [E(x)]^r.$$

Отсюда и явствуетъ справедливость нашего утвержденія.

Приведеніе дифференціальныхъ уравненій къ указанному типу совершается посредствомъ слѣдующихъ формулъ.

Положимъ для краткости

$$(x-a)(x-b) = t,$$

тогда

$$t' = 2x - a - b, \quad t'' = 2,$$

и

$$Uy = kty'$$

$$U^2y = k^2(t^2y'' + tt'y')$$

$$U^3y = k^3[t^3y''' + 3t^2t'y'' + (tt'^2 + 2t^2)y']$$

. . . .

Такъ какъ мы убѣдились, что интегралы предыдущаго уравненія выражаются чрезъ $E(x)$, то замѣтивъ, что

$$E(x) = e^{\log E(x)}$$

заключаемъ, что ур. (8) приводится къ линейному дифференціальному уравненію съ постоянными коэффиціентами посредствомъ замѣны независимаго перемѣннаго, по формулѣ

$$\xi = \log E(x).$$

Изъ формы (8) легко выводятся другія извѣстныя уравненія, приводимыя къ уравненіямъ съ постоянными коэффиціентами.

Если одна изъ точекъ a или b въ безконечности, то t становится первой степени относительно x; символы упрощаются:

$$Uy = kty' \,, \quad U^2y = k^2t^2y'' \,, \quad U^3y = k^3t^3y''' \,, \ldots .$$

и уравненіе принимаетъ весьма извѣстный видъ.

Для полученія формы Гальфена (Mémoires présentés par divers savants, t. XXVIII, 1884.)

$$z^{(n)} + \frac{A}{(x-a)^n (x-b)^n} z = 0$$

надо предварительно измѣнить зависимое перемѣнное положеніемъ

$$y = (x-a)^{\mu} z$$

и затѣмъ специализировать постоянныя μ , A_1 , A_2 , ...

Напр. уравненіе

$$U^2y + AUy + By = 0$$

или

$$t^2y'' + t(A + t')\, y' + By = 0$$

при выборѣ

$$\mu = -1 \,, \quad A = a - b$$

обращается въ

$$z'' + \frac{B}{(x-a)^2 (x-b)^2} z = 0$$

Добавимъ къ сказанному нѣсколько словъ объ обратной функціи, которая должна быть аналогична логариѳму.

Полагая напр. въ (5)

$$E(x) = u \,,$$

получаемъ обратную функцію

$$x = \lambda(u) \,.$$

На основаніи равенства (6) ея характерное свойство выражается равенствомъ:

$$\lambda(uv) = \frac{ab[\lambda(u) + \lambda(v)] - (a+b)\,\lambda(u)\,\lambda(v)}{ab - \lambda(u)\,\lambda(v)} .$$

Функція $E(x)$ можетъ быть и однозначна, и многозначна. Въ послѣднемъ случаѣ $\lambda(u)$ будетъ автоморфна. Дѣйствительно, общее выраженіе для $E(x)$ таково

$$k^m \cdot E(x)$$

гдѣ

$$k = e^{\frac{2\pi i a b}{a-b}},$$

а m—цѣлое число. Слѣдовательно,

$$\lambda(k^m u) = \lambda(u),$$

такъ что группа функціи $\lambda(u)$ характеризуется типичной подстановкой

$$u_m = k^m u.$$

Наоборотъ, автоморфизму $E(x)$ соотвѣтствуетъ многозначность $\lambda(u)$. Называя ея два значенія чрезъ $\lambda(u)$ и $\lambda_0(u)$, находимъ связь между ними изъ формулы (7):

$$\lambda(u) = \frac{\lambda_0(u)\,(a - b\varrho^{2n}) - ab(1-\varrho^{2n})}{\lambda_0(u)\,(1-\varrho^{2n}) - (b - a\varrho^{2n})}$$

Не останавливаясь на выводѣ различныхъ выраженій для $\lambda(u)$, отмѣтимъ только двѣ формы:

$$\lambda(u) = \log u \quad \text{при} \quad a = b = \infty$$

$$\lambda(u) = \operatorname{tg} \log u \ \text{при} \ a = -i,\ b = +i.$$

Такимъ образомъ, мы можемъ констатировать слѣдующее. Съ точки зрѣнія проективной геометріи равенство (6) или (1), какъ непосредственное слѣдствіе уравненія:

$$\frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-a}{c-b} = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{y-a}{y-b},$$

выражаетъ постоянство сложнаго отношенія четырехъ точекъ на прямой. Въ то-же время въ немъ заключается теорема сложенія функціи $\lambda(u)$, частными случаями которой являются логариѳмъ и тангенсъ.