О числѣ классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя.

В. А. Маркова.

§ 1. Въ 41 томѣ журнала Крелля Эйзенштейнъ далъ безъ доказательства формулы для счета числа классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя съ цѣлыми коэффиціентами въ тѣхъ случаяхъ, когда опредѣлитель не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1.

Въ настоящей статьѣ я дамъ доказательства этихъ формулъ.

Всѣ формы, о которыхъ будемъ говорить, будемъ предполагать квадратичными и положительными, а коэффиціенты ихъ числами цѣлыми.

Бинарную форму

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

будемъ обозначать для краткости чрезъ

$$(a, b, c).$$

Условимся еще обозначать число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія

$$xz - y^2 = d, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ d нѣкоторое данное число, такихъ, что

$$z > x > y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

y и по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ x и z нечетное, чрезъ

$$f(d),$$

а число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія (1), для которыхъ кромѣ условій (2) имѣютъ мѣсто еще слѣдующія

$$f_1' \equiv a_1',\ f_1'' \equiv a_1'' \ldots (\mathrm{mod.}\ 2),\quad f_2' \equiv a_2',\ f_2'' \equiv a_2'' \ldots (\mathrm{mod.}\ 4),$$

$$\varphi_1' > 0,\ \varphi_1'' > 0 \ldots \varphi_2' \geqq 0,\ \varphi_2'' \geqq 0 \ldots \varphi_3' < 0,\ \varphi_3'' < 0 \ldots \varphi_4' \leqq 0,\ \varphi_4'' \leqq 0, \ldots,$$

гдѣ

$$a_1',\ a_1'', \ldots a_2',\ a_2'', \ldots$$

данныя цѣлыя числа, а

$$f_1',\ f_1'', \ldots,\ f_2',\ f_2'', \ldots,\ \varphi_1',\ \varphi_1'', \ldots,\ \varphi_2',\ \varphi_2'', \ldots,\ \varphi_3',\ \varphi_3'', \ldots,\ \varphi_4',\ \varphi_4'' \ldots$$

данныя линейныя функціи отъ x, y и z съ цѣлыми коэффиціентами, чрезъ

$$f[d,\ f_1' \equiv a_1', \ldots, (\mathrm{mod.}\ 2),\ f_2' \equiv a_2', \ldots, (\mathrm{mod.}\ 4),\ \varphi_1' > 0, \ldots, \varphi_2' \geqq 0, \ldots,$$
$$\varphi_3' < 0, \ldots, \varphi_4' \leqq 0, \ldots]$$

Число чисто-коренныхъ (proprie primitivae) классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$ будемъ обозначать чрезъ

$$h^{(1)}(d),$$

число нечисто-коренныхъ классовъ чрезъ

$$h^{(2)}(d),$$

число чисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, эквивалентныхъ формамъ, у которыхъ коэффиціентъ при xy равенъ нулю, чрезъ

$$\omega^{(1)}(d),$$

а число нечисто-коренныхъ классовъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$\omega^{(2)}(d).$$

Если d не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей и кромѣ того

$$d \equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ 4)$$

то, какъ извѣстно, всѣ бинарныя формы опредѣлителя $-d$ будутъ чисто-коренныя и раздѣлятся на два такихъ разряда, содержащихъ по одному и тому же числу классовъ

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2},$$

что всѣ нечетныя числа, которыя могутъ быть представлены формами перваго разряда, при дѣленіи на 4 даютъ въ остаткѣ 1, а всѣ нечетныя числа, которыя могутъ быть представлены формами второго разряда, при дѣленіи на 4 даютъ въ остаткѣ 3.

Число классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, принадлежащихъ къ первому разряду и эквивалентныхъ формамъ, въ которыхъ коэффиціентъ при xy равенъ нулю, будемъ обозначать чрезъ

$$\omega_1(d),$$

а число классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, принадлежащихъ ко второму разряду и удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$\omega_2(d).$$

Замѣтимъ еще, что двѣ формы нечисто (improprie) эквивалентныя всегда принадлежатъ къ одному и тому же разряду и что число

$$a + c - 2b$$

представляется бинарною формою (a, b, c) при

$$x = 1, \qquad y = -1.$$

§ 2. **Лемма 1.** *Каково бы ни было нечетное и положительное число d, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, имѣетъ мѣсто равенство*

$$f(d) = h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d);$$

если же

$$d \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ 4),$$

то кромѣ того

$$f[d, x + z - 2y \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ 4)] = \frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_1(d),$$

$$f[d, x + z - 2y \equiv 3 \ (\mathrm{mod.}\ 4)] = \frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_2(d).$$

Доказательство. Какъ извѣстно, каждая бинарная форма опредѣлителя $-d$ эквивалентна нѣкоторой приведенной формѣ (a, b, c) Гаусса или Лагранжа, т. е. такой, для которой

$$c \geqq a \geqq 2b.$$

Двѣ же различныя приведенныя формы (a, b, c) и (a', b', c') эквивалентны только тогда, когда или

$$a = c = a' = c', \quad b' = -b,$$

или

$$a = a', \quad b = -b', \quad c = c', \quad a = |2b|\ ^{1)}.$$

---

¹) Чрезъ $|A|$ мы обозначаемъ абсолютную величину числа A.

*

Исключимъ изъ числа приведенныхъ формъ опредѣлителя $-d$ нечисто-коренныя (такъ какъ опредѣлитель $-d$ не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, то всѣ формы опредѣлителя $-d$ коренныя) и тѣ изъ чисто-коренныхъ, для которыхъ или

$$b=0,$$

или

$$a=c, \quad b<0,$$

или

$$a=-2b.$$

Тогда между оставшимися приведенными формами опредѣлителя $-d$ будетъ заключаться по одной и только одной формѣ изъ каждаго чисто-коренного класса бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, не содержащаго формы, въ которой коэффиціентъ при xy равенъ нулю.

Всѣ эти формы разобьемъ на четыре слѣдующія группы:

1) b нечетное и положительное,
2) b нечетное и отрицательное,
3) b четное и положительное,
4) b четное и отрицательное.

Такъ какъ не чисто-коренныя формы исключены, то въ формахъ первыхъ двухъ группъ одно и только одно изъ чиселъ a и c четное, а въ формахъ двухъ послѣднихъ группъ оба числа a и c нечетныя.

Если

$$d\equiv 1 \pmod{4},$$

то число формъ первой группы, принадлежащихъ къ первому изъ упомянутыхъ въ § 1 разрядовъ, очевидно, равно

$$f[d\,,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod{4},\ x-2y\geqq 0],$$

а число формъ первой группы, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d\,,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod{4},\ x-2y\geqq 0].$$

Число же всѣхъ формъ первой группы, какъ при

$$d\equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d\equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f(d\,,\ x-2y\geqq 0).$$

Каждая форма (a, b, c) второй группы, для которой a число четное, посредствомъ подстановки

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = \eta$$

переходитъ въ бинарную форму (a', b', c') такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = a > b' = a + b, \quad c' > 2b' > a',$$
$$a' \text{ четное}, \quad b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

и обратно, каждая бинарная форма (a', b', c') такая, что

$$c' > a' > b', \quad c' > 2b' > a',$$
$$a' \text{ четное}, \quad b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$
$$y = \eta$$

переходитъ въ форму второй группы, для которой a число четное.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ къ первому разряду, для которыхъ a число четное, равно

$$f[d, \ x \equiv 0 \pmod{2}, \ x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}, \ z - 2y > 0, \ x - 2y < 0],$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ ко второму разряду, для которыхъ a число четное, равно

$$f[d, \ x \equiv 0 \pmod{2}, \ x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}, \ z - 2y > 0, \ x - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ второй группы, для которыхъ a число четное, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f[d, \ x \equiv 0 \pmod{2}, \ z - 2y > 0, \ x - 2y < 0].$$

Каждая форма второй группы, для которой a число нечетное и, слѣдовательно, c число четное, посредствомъ нечистой (impropria) подстановки

$$x = \eta,$$
$$y = \xi + \eta$$

переходитъ въ бинарную форму (a', b', c') такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = c > b' = c + b, \quad 2b' > c',$$
$$a' \text{ четное}, \quad b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

и обратно каждая бинарная форма (a', b', c') такая, что

$$c' > a' > b', \quad 2b' > c',$$
$$a' \text{ четное}, \quad b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

посредствомъ нечистой подстановки

$$x = -\xi + \eta,$$
$$y = \xi$$

переходитъ въ форму второй группы, для которой a число нечетное.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ къ первому разряду, для которыхъ a число нечетное, равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}, z - 2y < 0],$$

а число формъ второй группы, принадлежащихъ ко второму разряду, для которыхъ a число нечетное, равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}, z - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ второй группы, для которыхъ a число нечетное, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, z - 2y < 0].$$

Каждая форма (a, b, c) третьей группы посредствомъ подстановки

$$x = -\eta,$$
$$y = \xi + \eta$$

переходитъ въ бинарную форму (a', b', c') такую, что

$$c' = a + c - 2b > a' = c > b' = c - b, \quad 2b' \geqq c',$$
a' и b' нечетныя, c' четное,

и обратно, каждая бинарная форма (a', b', c') такая, что

$$c' > a' > b', \quad 2b' \geqq c',$$
a' и b' нечетныя, c' четное,

посредствомъ подстановки

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = -\xi$$

переходитъ въ форму третьей группы.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число формъ третьей группы, принадлежащихъ къ первому разряду, равно

$$f[d, \ x \equiv 1 \ (\text{mod. } 2), \ x + z - 2y \equiv 1 \ (\text{mod. } 4), \ z - 2y \leqq 0],$$

а число формъ третьей группы, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d, \ x \equiv 1 \ (\text{mod. } 2), \ x + z - 2y \equiv 3 \ (\text{mod. } 4), \ z - 2y \leqq 0].$$

Число же всѣхъ формъ третьей группы, какъ при

$$d \equiv 1 \ (\text{mod. } 4),$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \ (\text{mod. } 4),$$

равно

$$f[d, \ x \equiv 1 \ (\text{mod. } 2), \ z - 2y \leqq 0].$$

Каждая форма четвертой группы посредствомъ подстановки

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = \eta$$

переходитъ въ бинарную форму (a', b', c') такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = a > b' = a + b, \quad a' < 2b' < c',$$

$$a' \text{ и } b' \text{ нечетныя}, \quad c' \text{ четное},$$

и обратно, каждая бинарная форма (a', b', c') такая, что

$$c' > a' > b', \quad a' < 2b' < c',$$

$$a' \text{ и } b' \text{ нечетныя}, \quad c' \text{ четное},$$

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$

$$y = \eta$$

переходитъ въ форму четвертой группы.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число формъ четвертой группы, принадлежащихъ къ первому разряду, равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod{2},\ x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4},\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0],$$

а число формъ четвертой группы, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod{2},\ x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4},\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ четвертой группы, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod{2},\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0].$$

Принимая во вниманіе все изложенное, заключаемъ, что при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_1(d),$$

равное числу формъ всѣхъ четырехъ группъ, принадлежащихъ къ первому разряду, равно

$$f[d,\ x+z-2y\equiv 1\ (\text{mod. } 4),\ x-2y\geqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0\ (\text{mod. } 2),\ x+z-2y\equiv 1\ (\text{mod. } 4),\ z-2y>0,\ x-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0\ (\text{mod. } 2),\ x+z-2y\equiv 1\ (\text{mod. } 4),\ z-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1\ (\text{mod. } 2),\ x+z-2y\equiv 1\ (\text{mod. } 4),\ z-2y\leqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1\ (\text{mod. } 2),\ x+z-2y\equiv 1\ (\text{mod. } 4),\ z-2y>0,\ x-2y<0]=$$
$$=f[d,\ x+z-2y\equiv 1\ (\text{mod. } 4)],$$

а число

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2}\,\omega_2(d),$$

равное числу формъ всѣхъ четырехъ группъ, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d,\ x+z-2y\equiv 3\ (\text{mod. } 4),\ x-2y\geqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0\ (\text{mod. } 2),\ x+z-2y\equiv 3\ (\text{mod. } 4),\ z-2y>0,\ x-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0\ (\text{mod. } 2),\ x+z-2y\equiv 3\ (\text{mod. } 4),\ z-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1\ (\text{mod. } 2),\ x+z-2y\equiv 3\ (\text{mod. } 4),\ z-2y\leqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1\ (\text{mod. } 2),\ x+z-2y\equiv 3\ (\text{mod. } 4),\ z-2y>0,\ x-2y<0]=$$
$$=f[d,\ x+z-2y\equiv 3\ (\text{mod. } 4)].$$

Число же

$$h^{(1)}(d)-\omega^{(1)}(d),$$

равное числу всѣхъ формъ всѣхъ четырехъ группъ, какъ при

$$d\equiv 1\ (\text{mod. } 4),$$

такъ и при

$$d\equiv 3\ (\text{mod. } 4),$$

равно

$$f[d,\ x-2y\geqq 0]+f[d,\ x\equiv 0\ (\text{mod. } 2),\ z-2y>0,\ x-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0\ (\text{mod. } 2),\ z-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1\ (\text{mod. } 2),\ z-2y\leqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1\ (\text{mod. } 2),\ z-2y>0,\ x-2y<0]=f(d).$$

§ 3. Лемма 2. *Каково бы ни было цѣлое и положительное число d, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1 и удовлетворяющее сравненію*

$$d\equiv 3\ (\text{mod. } 4),$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$f[d,\ x+z-2y\equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ 4)] = f[d,\ x+z-2y\equiv 3 \ (\mathrm{mod.}\ 4)] = \\ = \frac{h^{(1)}(d)-\omega^{(1)}(d)}{2}.$$

Доказательство. Прежде всего замѣтимъ, что если рѣшеніе

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta,$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ таково, что η и одно изъ чиселъ ξ и ζ нечетныя, то одно изъ чиселъ ξ и ζ дѣлится на 4.

Дѣйствительно, изъ равенства

$$\xi\zeta-\eta^2=d$$

и сравненій

$$-\eta^2\equiv 3,\quad d\equiv 3 \ (\mathrm{mod.}\ 4)$$

вытекаетъ сравненіе

$$\xi\zeta\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 4),$$

которое и показываетъ, что одно изъ чиселъ ξ и ζ дѣлится на 4.

Каждому рѣшенію

$$x=\xi_1,\quad y=\eta_1,\quad z=\zeta_1 \ \ldots\ldots\ldots \tag{3}$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ такому, что

$$\zeta_1>\xi_1>\eta_1,$$

$$\xi_1 \text{ и } \eta_1 \text{ нечетныя, } \zeta_1 \text{ четное,}$$

соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\left.\begin{array}{l} x=\xi_1'=\text{меньшему изъ чиселъ } \zeta_1 \text{ и } \xi_1+\zeta_1-2\eta_1,\\ y=\eta_1'=\zeta_1-\eta_1,\\ z=\zeta_1'=\text{большему изъ чиселъ } \zeta_1 \text{ и } \xi_1+\zeta_1-2\eta_1 \end{array}\right\}\ \ldots \tag{4}$$

такое, что

$$\zeta_1'>\xi_1'>\eta_1',$$

$$\eta_1' \text{ и одно изъ чиселъ } \xi_1' \text{ и } \zeta_1' \text{ нечетныя,}$$

$$\xi_1'+\zeta_1'-2\eta_1'=\xi_1\equiv\xi_1+\zeta_1-2\eta_1+2 \ (\mathrm{mod.}\ 4),$$

а каждому рѣшенію

$$x=\xi_2,\quad y=\eta_2,\quad z=\zeta_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ такому, что

$$\zeta_2>\xi_2>\eta_2\,,$$

$$\xi_2 \text{ четное, } \eta_2 \text{ и } \zeta_2 \text{ нечетныя,}$$

соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\left.\begin{aligned} x=\xi_2' &= \text{меньшему изъ чиселъ } \xi_2 \text{ и } \xi_2+\zeta_2-2\eta_2\,,\\ x=\eta_2' &= \xi_2-\eta_2\,,\\ z=\zeta_2' &= \text{большему изъ чиселъ } \xi_2 \text{ и } \xi_2+\zeta_2-2\eta_2 \end{aligned}\right\}\ \ldots\ (6)$$

такое, что

$$\zeta_2'>\xi_2'>\eta_2'\,,$$

$$\eta_2' \text{ и одно изъ чиселъ } \xi_2' \text{ и } \zeta_2' \text{ нечетныя,}$$

$$\xi_2'+\zeta_2'-2\eta_2'=\zeta_2\equiv\xi_2+\zeta_2-2\eta_2+2 \pmod{4}.$$

Притомъ рѣшенія (6), получаемыя по указанному сейчасъ способу изъ рѣшеній (5), отличны отъ рѣшеній (4), получаемыхъ по указанному выше способу изъ рѣшеній (3).

Дѣйствительно, изъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} \xi_2+\zeta_2-2\eta_2 &= \xi_1+\zeta_1-2\eta_1\,,\\ \xi_2-\eta_2 &= \zeta_1-\eta_1\,,\\ \xi_2 &= \zeta_1 \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (7)$$

вытекаютъ, какъ слѣдствія, равенства

$$\xi_2=\zeta_1\,,\quad \eta_2=\eta_1\,,\quad \zeta_2=\xi_1\,,$$

которыя невозможны, такъ какъ

$$\zeta_1>\xi_1\,,\quad \zeta_2>\xi_2,$$

а потому и равенства (7) невозможны. Равенства же

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1+\zeta_1-2\eta_1,\\ \xi_2-\eta_2 &= \zeta_1-\eta_1,\\ \xi_2+\zeta_2-2\eta_2 &= \zeta_1 \end{aligned}$$

невозможны потому, что ξ_2 число четное, а $\xi_1+\zeta_1-2\eta_1$ число нечетное.

Также очевидно, что рѣшенія (4), получаемыя изъ различныхъ рѣшеній (3), различны между собою, а рѣшенія (6), получаемыя изъ различныхъ (5), различны между собою.

Принимая во вниманіе все сказанное, заключаемъ, что

$$f[d\,,\; x+z-2y \equiv 1 \pmod{4}] = f[d\,,\; x+z-2y \equiv 3 \pmod{4}] =$$

$$= \frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2}\,.$$

§ 4. **Лемма 3.** *Пусть P нечетное число, большее 1 и не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1.*

Обозначимъ число разложеній P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

такихъ, что

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4},$$

чрезъ

$$\Phi(P),$$

число остальныхъ разложеній P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

чрезъ

$$\Psi(P),$$

а число всѣхъ разложеній P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

чрезъ

$$\psi(P).$$

Пусть, далѣе, d будетъ дѣлитель числа P, удовлетворяющій сравненію

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

и отличный отъ 1; мы положимъ

$$\Omega_1(d) = \omega_1(d)\,,\quad \Omega_2(d) = \omega_2(d),$$

если

$$P \equiv 1 \pmod{4}\,,$$

и

$$\Omega_1(d) = \omega_2(d)\,,\quad \Omega_2(d) = \omega_1(d),$$

если

$$P \equiv 3 \pmod{4}\,.$$

Пусть, наконецъ, въ суммѣ

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1, въ суммѣ

$$\sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$$

суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, удовлетворяющіе сравненію

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

а въ суммахъ

$$\sum\nolimits_1 \Omega_1(d) \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_1 \Omega_2(d)$$

суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, удовлетворяющіе сравненію

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

и отличные отъ 1.

Въ такомъ случаѣ

$$\sum \omega^{(1)}(d) = 3\psi(P) + 1,$$

и кромѣ того

$$\sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum\nolimits_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + 1,$$

$$\sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum\nolimits_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P),$$

если

$$P \equiv 1 \pmod{4};$$

$$\sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum\nolimits_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \frac{1}{2},$$

$$\sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum\nolimits_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P) + \frac{1}{2},$$

если

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Доказательство. Сумма

$$\sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$$

равна половинѣ числа приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители $-d$ которыхъ, взятые съ обратными знаками, дѣлятъ P и удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

и въ которыхъ коэффиціентъ при xy равенъ нулю.

Совокупность этихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(X).$$

Сумма

$$\sum\nolimits_1 \Omega_1(d)$$

равна числу приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители $-d$ которыхъ дѣлятъ P, удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

и отличны отъ 1, въ которыхъ коэффиціентъ при xy равенъ нулю и которые принадлежатъ къ первому или второму изъ упомянутыхъ въ § 1 разрядовъ, смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

или

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Совокупность всѣхъ этихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(Y).$$

Сумма

$$\sum\nolimits_1 \Omega_2(d)$$

равна числу приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители $-d$ которыхъ дѣлятъ P, удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

и отличны отъ 1, въ которыхъ коэффиціентъ при xy равенъ нулю и которые принадлежатъ ко второму или первому разряду, смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

или

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Совокупность всѣхъ этихъ послѣднихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(Z).$$

Наконецъ сумма

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

равна числу формъ, заключающихся во всѣхъ трехъ совокупностяхъ (X), (Y) и (Z).

Каждому разложенію P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы $(a, 0, c)$ изъ совокупностей (X), (Y) и (Z):

$$1)\ a = d_1,\quad c = d_2,\ \text{опредѣлителя}\ -d_1 d_2,$$

$$2)\ a = d_2,\quad c = d_3,\ \text{опредѣлителя}\ -d_2 d_3,$$

$$3)\ a = d_1,\quad c = d_3,\ \text{опредѣлителя}\ -d_3 d_1.$$

Всѣ эти формы принадлежатъ къ совокупности (Y), если

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4}.$$

Во всѣхъ же остальныхъ случаяхъ двѣ формы принадлежатъ къ совокупности (X) и одна къ совокупности (Z).

Разложенію

$$P = 1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одна форма $(a, 0, c)$ изъ совокупностей (X), (Y) и (Z),

$$a = 1,\quad c = P,\ \text{опредѣлителя}\ -P,$$

которая принадлежитъ къ совокупности (X) или (Y), смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 3 \pmod{4}$$

или

$$P \equiv 1 \pmod{4}.$$

Кромѣ получающихся по указаннымъ сейчасъ способамъ изъ различныхъ разложеній P на три множителя формъ, принадлежащихъ къ совокупностямъ (X), (Y) и (Z), другихъ нѣтъ.

Поэтому при

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + 1,$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P),$$

при

$$P \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum\nolimits_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \frac{1}{2},$$

$$\sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum\nolimits_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P) + \frac{1}{2},$$

и наконецъ, какъ при

$$P \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$P \equiv 3 \pmod{4},$$

$$\sum \omega^{(1)}(d) = 3\psi(P) + 1.$$

§ 5. **Лемма 4.** *Каково бы ни было четное и положительное число d, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, имѣетъ мѣсто равенство*

$$f(d) = \frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2}.$$

Доказательство. Такъ какъ d число четное и не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей, то всѣ формы опредѣлителя $-d$ чисто-коренныя.

Такъ какъ, далѣе, уравненія

$$x^2 - y^2 = d,$$
$$y(2z - y) = d$$

не имѣютъ рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ, то между формами (a, b, c) опредѣлителя $-d$ нѣтъ ни такихъ, для которыхъ

$$a = c,$$

ни такихъ, для которыхъ

$$a = |2b|,$$

и, слѣдовательно, между приведенными формами Гаусса опредѣлителя $-d$ нѣтъ эквивалентныхъ между собою.

Разобьемъ всѣ приведенныя формы Гаусса опредѣлителя $-d$, для которыхъ коэффиціентъ при xy не равенъ нулю, на 6 группъ:

1) b нечетное и положительное, a и c нечетныя,
2) b нечетное и отрицательное, a и c нечетныя,
3) b четное и положительное, a четное, c нечетное,
4) b четное и отрицательное, a четное, c нечетное,
5) b четное и положительное, a нечетное, c четное,
6) b четное и отрицательное, a нечетное, c четное.

Очевидно, что число формъ второй группы равно числу формъ первой группы, число формъ четвертой группы равно числу формъ третьей группы, а число формъ шестой группы равно числу формъ пятой группы.

Число формъ первой группы очевидно равно

$$f(d\,,\ x-2y>0)=f(d\,,\ x-2y\geqq 0).$$

Каждая форма $(a\,,\ b\,,\ c)$ третьей группы посредствомъ подстановки

$$x=-\eta\,,$$

$$y=\xi+\eta\,,$$

переходитъ въ бинарную форму (a',b',c') такую, что

$$c'=a+c-2b>a'=c>b'=c-b\,,\quad 2b'>c',$$

$$a',\ b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

и обратно, каждая бинарная форма (a',b',c') такая, что

$$c'>a'>b',\quad 2b'>c',$$

$$a',\ b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

переходитъ посредствомъ подстановки

$$x=\xi+\eta\,,$$

$$y=-\xi,$$

въ форму третьей группы.

Поэтому число формъ третьей группы равно

$$f(d,\ z-2y<0)=f(d\,,\ z-2y\leqq 0).$$

Каждая форма $(a\,,b\,,c)$ шестой группы посредствомъ подстановки

$$x=\xi+\eta\,,$$

$$y=\eta\,,$$

переходитъ въ бинарную форму (a',b',c') такую, что

$$c'=a+c+2b>a'=a>b'=a+b\,,\quad c'>2b'>a',$$

$$a',\ b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

и обратно, каждая бинарная форма (a',b',c') такая, что

$$c'>a'>b',\quad c'>2b'>a',$$

$$a',\ b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$
$$y = \eta,$$

переходитъ въ форму шестой группы.

Поэтому число формъ шестой группы равно

$$f(d,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0).$$

Число же

$$\frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2},$$

равное половинѣ числа всѣхъ шести группъ, равно

$$f(d,\ x - 2y \geqq 0) + f(d,\ z - 2y \leqq 0) + f(d,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0) = f(d).$$

§ 6. **Лемма 5.** *Каково бы ни было нечетное и положительное число* $P > 1$,

$$\sum \omega^{(1)}(2d) = 2 \sum \omega^{(1)}(d) = 2\,[3\psi(P) + 1],$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d *числа* P, *отличные отъ* 1.

Доказательство. Сумма

$$\sum \omega^{(1)}(2d)$$

равна числу приведенныхъ бинарныхъ формъ Гаусса, опредѣлители которыхъ четные, дѣлятъ $2P$ и отличны отъ 2, и въ которыхъ коэффиціентъ при xy равенъ нулю.

Совокупность всѣхъ такихъ формъ обозначимъ чрезъ (A).

Сумма

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

равна числу приведенныхъ бинарныхъ формъ Гаусса, опредѣлители которыхъ дѣлятъ P и отличны отъ 1, и въ которыхъ коэффиціентъ при xy равенъ нулю.

Совокупность всѣхъ такихъ формъ обозначимъ чрезъ (B).

Каждой формѣ

$$ax^2 + cy^2$$

изъ совокупности (B) соотвѣтствуютъ двѣ формы:

$$ax^2 + 2cy^2,$$
$$a'x^2 + c'y^2,$$

гдѣ

a' равно меньшему изъ чиселъ $2a$ и c,

c' равно большему изъ чиселъ $2a$ и c,

изъ совокупности (A).

Кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу изъ формъ совокупности (B) въ совокупности (A) другихъ нѣтъ.

Поэтому

$$\sum\omega^{(1)}(2d)=2\sum\omega^{(1)}(d)=2\,[3\psi(P)+1].$$

§ 7. Будемъ называть, слѣдуя Зеллингу, тройничную форму

$$g(y-z)^2+h(z-x)^2+k(x-y)^2+lx^2+my^2+nz^2$$

приведенною, если между числами

$$\left.\begin{matrix} g\,, h\,, k\,, \\ l\,, m\,, n \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

нѣтъ отрицательныхъ *).

Всѣ приведенныя формы даннаго опредѣлителя

$$D=gl(h+k+m+n)+hm(k+g+n+l)+kn(g+h+l+m)+$$
$$+g(hn+km)+l(hk+mn),$$

который мы предположимъ >1, разобьемъ на пять группъ перваго порядка:

1) ни одно изъ чиселъ таблицы (8) не равно нулю;

2) одно и только одно изъ этихъ чиселъ равно нулю;

3) два числа, стоящія въ одномъ столбцѣ таблицы (8), равны нулю, всѣ прочія числа этой таблицы отличны отъ нуля;

4) два числа таблицы (8), не стоящія въ одномъ столбцѣ, равны нулю, всѣ прочія числа этой таблицы отличны отъ нуля;

5) три числа таблицы (8) равны нулю.

Приведенныя формы второй группы перваго порядка разобьемъ на шесть группъ второго порядка:

1) $g=0$, 2) $h=0$, 3) $k=0$, 4) $l=0$, 5) $m=0$, 6) $n=0$.

*) Въ этомъ параграфѣ и слѣдующихъ мы предполагаемъ, что читатель знакомъ съ первой частью мемуара Зеллинга: „Des formes quadratiques binaires et ternaires“ (Journ. de Liouville, 1877), или съ тремя первыми главами сочиненія Борисова: „О приведеніи положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ по способу Зеллинга“.

*

Приведенныя формы третьей группы перваго порядка разобьемъ на три группы второго порядка:

$$1)\ g=l=0,\quad 2)\ h=m=0,\quad 3)\ k=n=0.$$

Приведенныя формы четвертой группы перваго порядка разобьемъ на двѣнадцать группъ второго порядка:

1) $g=h=0$, 5) $h=k=0$, 8) $k=l=0$, 10) $l=m=0$, 12) $m=n=0$.
2) $g=k=0$, 6) $h=l=0$, 9) $k=m=0$, 11) $l=n=0$,
3) $g=m=0$, 7) $h=n=0$,
4) $g=n=0$,

Приведенныя формы пятой группы перваго порядка разобьемъ на шестнадцать группъ второго порядка:

1) $g=h=k=0$, 9) $h=k=m=0$, 14) $k=l=m=0$,
2) $g=h=l=0$, 10) $h=k=n=0$, 15) $k=l=n=0$,
3) $g=h=m=0$, 11) $h=l=m=0$, 16) $k=m=n=0$.
4) $g=k=l=0$, 12) $h=l=n=0$,
5) $g=k=n=0$, 13) $h=m=n=0$,
6) $g=l=m=0$,
7) $g=l=n=0$,
8) $g=m=n=0$,

(Случаи

1) $g=h=n=0$, 2) $g=k=m=0$, 3) $h=k=l=0$, 4) $l=m=n=0$

невозможны).

Обозначимъ число чисто-коренныхъ классовъ тройничныхъ формъ опредѣлителя D чрезъ

$$H^{(1)}(D),$$

а число нечисто-коренныхъ классовъ чрезъ

$$H^{(2)}(D),$$

число чисто-коренныхъ классовъ тройничныхъ формъ опредѣлителя D, эквивалентныхъ приведеннымъ формамъ i-ой группы перваго порядка и такихъ, что число μ подстановокъ, посредствомъ которыхъ форма переходитъ сама въ себя, равно α, чрезъ

$$H_i^{(1)}(D, \alpha),$$

число нечисто-коренныхъ классовъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$H_i^{(2)}(D, \alpha),$$

число различныхъ чисто-коренныхъ приведенныхъ формъ, принадлежащихъ къ i-ой группѣ 1-го порядка, для которыхъ $\mu = \alpha$, чрезъ

$$F_i^{(1)}(D, \alpha),$$

число различныхъ нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F_i^{(2)}(D, \alpha),$$

наконецъ число чисто-коренныхъ приведенныхъ формъ, принадлежащихъ къ i-ой группѣ перваго порядка и j-ой группѣ второго порядка, для которыхъ $\mu = \alpha$, чрезъ

$$F_{i,j}^{(1)}(D, \alpha),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F_{i,j}^{(2)}(D, \alpha).$$

Мы будемъ имѣть, каковы бы ни были возможныя значенія i, p, q, j и μ,

$$F_{i,p}^{(j)}(D, \mu) = F_{i,q}^{(j)}(D, \mu)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
H_1^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_1^{(j)}(D, \mu)}{24} \\
H_2^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_2^{(j)}(D, \mu)}{2.24} = \frac{\mu 6 F_{2,1}^{(j)}(D, \mu)}{2.24} = \frac{\mu F_{2,1}^{(j)}(D, \mu)}{8}, \\
H_3^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_3^{(j)}(D, \mu)}{3.24} = \frac{\mu 3 F_{3,1}^{(j)}(D, \mu)}{3.24} = \frac{\mu F_{3,1}^{(j)}(D, \mu)}{24}, \\
H_4^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_4^{(j)}(D, \mu)}{6.24} = \frac{\mu 12 F_{4,1}^{(j)}(D, \mu)}{6.24} = \frac{\mu F_{4,1}^{(j)}(D, \mu)}{12}, \\
H_5^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_5^{(j)}(D, \mu)}{16.24} = \frac{\mu 16 F_{5,1}^{(j)}(D, \mu)}{16.24} = \frac{\mu F_{5,1}^{(j)}(D, \mu)}{24}.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Поэтому для нашей цѣли достаточно разобрать слѣдующіе типы приведенныхъ формъ:

ни одно изъ чиселъ g, h, k, l, m, n не равно нулю . . (1),

$g=0, h, k, l, m, n$ отличны отъ нуля . . . . (2,1),

$g=l=0, h, k, m, n$ отличны отъ нуля . . . . (3,1),

$g=h=0, k, l, m, n$ отличны отъ нуля . . . . (4,1),

$g=h=k=0, l, m, n$ отличны отъ нуля . . . . (5,1).

Мы ограничимся во всемъ дальнѣйшемъ разборомъ двухъ слѣдующихъ случаевъ:

$$D=P, \quad D=2P,$$

гдѣ чрезъ P обозначено нѣкоторое нечетное число, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1. Въ этихъ случаяхъ всѣ тройничныя формы опредѣлителя D коренныя.

Прежде всего докажемъ, что для формъ типовъ (1) и (2,1)

$$\mu=1 \text{ или } 2,$$

для формъ типа (3,1)

$$\mu=1, 2 \text{ или } 6,$$

для формъ типа (4,1)

$$\mu=2, 4 \text{ или } 12,$$

и для формъ типа (5,1)

$$\mu=4 \text{ или } 8.$$

Дѣйствительно, каковъ бы ни былъ опредѣлитель D, для формъ типа (1)

$$\mu>2$$

только въ слѣдующихъ случаяхъ

$$1)\ g=h=l=m;\quad 2)\ h=k=m=n;\quad 3)\ k=g=n=l;$$
$$4)\ g=l,\ h=m,\ k=n;$$
$$5)\ g=h=k,\ l=m=n;\quad 6)\ g=h=n,\ l=m=k;$$
$$7)\ h=k=l,\ m=n=g;\quad 8)\ k=g=m,\ n=l=h.$$

Но при

$$g=h=l=m=\varrho$$

имѣемъ

$$D=2\varrho^2(2\varrho+k+n)+4\varrho kn+2\varrho^2(k+n)=4\varrho(\varrho+k)(\varrho+n)\equiv 0 \pmod{4};$$

а потому первый изъ указанныхъ сейчасъ случаевъ невозможенъ.

Точно также невозможны случаи второй и третій.

Случай четвертый невозможенъ, такъ какъ при

$$g=l=\varrho\,,\;\; h=m=\sigma\,,\;\; k=n=\tau$$

имѣемъ

$$D=2\varrho^2(\sigma+\tau)+2\sigma^2(\tau+\varrho)+2\tau^2(\varrho+\sigma)+4\varrho\sigma\tau=$$
$$=2(\varrho+\sigma)(\sigma+\tau)(\tau+\varrho)\equiv 0 \pmod{4}.$$

При

$$g=h=k=\varrho\,,\;\; l=m=n=\sigma$$

опредѣлитель

$$D=6\varrho\sigma(\varrho+\sigma)+2\varrho^2\sigma+\sigma(\varrho^2+\sigma^2)=\sigma(3\varrho+\sigma)^2$$

дѣлится на квадратъ $>\sqrt[3]{D}$, а потому случай пятый невозможенъ.

Также невозможны и остальные три случая.

Итакъ, для формъ типа (1)

$$\mu=1 \text{ или } 2\,.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель D, для формъ типа (2,1)

$$\mu>2$$

только при

$$n=h\,,\;\; k=m\,.$$

Но при

$$n=h=\varrho\,,\;\; k=m=\sigma$$

имѣемъ

$$D=2\varrho\sigma(\varrho+\sigma+l)+2\varrho\sigma l=2\varrho\sigma(\varrho+\sigma+2l)\equiv 0 \pmod{4},$$

а потому при нашемъ предположеніи для формъ типа (2,1)

$$\mu=1 \text{ или } 2\,.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель D, для формъ тина (3,1) μ можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$1\,,\,2\,,\,4\,,\,6 \text{ и } 24\,,$$

причемъ

$$\mu = 4 \text{ или } 24$$

только въ слѣдующихъ случаяхъ:

$$1)\ h = k\,,\ m = n\,,\quad 2)\ h = m\,,\ k = n\,,\quad 3)\ h = n\,,\ k = m\,.$$

Но при

$$g = l = 0\,,\ h = k = \varrho\,,\ m = n = \sigma$$

имѣемъ

$$D = \varrho\sigma(\varrho + \sigma) + \varrho\sigma(\varrho + \sigma) = 2\varrho\sigma(\varrho + \sigma) \equiv 0 \pmod{4},$$

а потому первый изъ указанныхъ сейчасъ случаевъ невозможенъ.

Также невозможны и остальные случаи.

Итакъ, для формы типа (3,1)

$$\mu = 1\,,\ 2 \text{ или } 6\,.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель D, для формъ типа (4,1) μ можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$2\,,\ 4 \text{ и } 12\,.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель D, для формъ типа (5,1) μ можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$4\,,\ 8 \text{ и } 24,$$

причемъ значенiе

$$\mu = 24$$

получается только при

$$l = m = n\,.$$

Но при

$$l = m = n = \varrho$$

имѣемъ

$$D = \varrho^3\,,$$

а потому для формы типа (5,1)

$$\mu = 4 \text{ или } 8\,.$$

Принимая во вниманіе сейчасъ доказанное, изъ формулъ (9) выводимъ

$$\left.\begin{aligned}
H^{(j)}(D,2)&=\frac{F_1^{(j)}(D,2)}{12}+\frac{F_{2,1}^{(j)}(D,2)}{4}+\frac{F_{3,1}^{(j)}(D,2)}{12}+\frac{F_{4,1}^{(j)}(D,2)}{6},\\
H^{(j)}(D,4)&=\frac{F_{4,1}^{(j)}(D,4)}{3}+\frac{F_{5,1}^{(j)}(D,4)}{6},\\
H^{(j)}(D,6)&=\frac{F_{3,1}^{(j)}(D,6)}{4},\\
H^{(j)}(D,8)&=\frac{F_{5,1}^{(j)}(D,8)}{3},\\
H^{(j)}(D,12)&=F_{4,1}^{(j)}(D,12)\,.
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

§ 8. Обратимся къ подробному разбору формъ типа (5,1). Всѣ формы этого типа, очевидно, чисто-коренныя и слѣдовательно

$$F_{5,1}^{(2)}(D,4)=F_{5,1}^{(2)}(D,8)=0,$$

$$H^{(2)}(D,8)=0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Для формъ разсматриваемаго типа

$$D=lmn\,.$$

Значеніе $\mu=8$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (5,1), для которыхъ два изъ чиселъ

$$l,\ m \text{ и } n$$

равны между собою, а это имѣетъ мѣсто только въ трехъ слѣдующихъ случаяхъ:

1) $l=D,\ m=n=1$, 2) $l=1,\ m=D,\ n=1$, 3) $l=m=1,\ n=D$,

такъ какъ D не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1.

Слѣдовательно

$$F_{5,1}^{(1)}(D,8)=3\,,$$

$$H^{(1)}(D,8)=1.\ \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Для всѣхъ остальныхъ формъ типа (5,1)

$$\mu=4\,.$$

Каждому разложенію D на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < D$$

соотвѣтствуютъ шесть формъ типа (5,1), для которыхъ

$$\mu = 4\,,$$

а именно:

$$\begin{aligned}
&1)\ l = d_1\,, \quad m = d_2\,, \quad n = d_3\,,\\
&2)\ l = d_1\,, \quad m = d_3\,, \quad n = d_2\,,\\
&3)\ l = d_2\,, \quad m = d_1\,, \quad n = d_3\,,\\
&4)\ l = d_2\,, \quad m = d_3\,, \quad n = d_1\,,\\
&5)\ l = d_3\,, \quad m = d_1\,, \quad n = d_2\,,\\
&6)\ l = d_3\,, \quad m = d_2\,, \quad n = d_1
\end{aligned}$$

и кромѣ получающихся по указанному сейчасъ способу изъ всевозможныхъ разложеній D на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < D$$

формъ типа (4,1), для которыхъ

$$\mu = 4\,,$$

другихъ нѣтъ.

Поэтому

$$F^{(1)}_{5,1}(D, 4) = 6\psi(D)\,,$$

гдѣ

$$\psi(D)$$

означаетъ, какъ и въ § 4 число разложеній D на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3\,.$$

§ 9. Разсмотримъ формы типа (4,1).

Для формъ этого типа

$$D = n(lm + mk + kl)\,.$$

Значеніе $\mu = 12$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ, для которыхъ

$$k = l = m\,.$$

Это имѣетъ мѣсто только тогда, когда

$$D \equiv 0 \pmod{3},$$

$$k = l = m = 1, \quad n = \frac{D}{3},$$

т. е. только для формы

$$(x-y)^2 + x^2 + y^2 + \frac{D}{3} z^2 = 2x^2 + 2y^2 + \frac{D}{3} z^2 - 2xy,$$

чисто-коренной при

$$D = P$$

и нечисто-коренной при

$$D = 2P.$$

Итакъ, при

$$D = P$$

имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(D, 12) &= F_{4,1}^{(1)}(D, 12) = \alpha, \\ H^{(2)}(D, 12) &= F_{4,1}^{(2)}(D, 12) = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

гдѣ

$$\alpha = 1 \quad \text{при} \quad P \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\alpha = 0 \text{ при } P \text{не} \equiv 0 \pmod{3},$$

а при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(D, 12) &= F_{4,1}^{(1)}(D, 12) = 0, \\ H^{(2)}(D, 12) &= F_{4,1}^{(2)}(D, 12) = \beta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

гдѣ

$$\beta = 1 \quad \text{при} \quad P \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\beta = 0 \text{ при } P \text{не} \equiv 0 \pmod{3}.$$

Значеніе $\mu = 4$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (4,1), которыя принадлежатъ къ одному изъ трехъ слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$$l = m \text{ не} = k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4,1,1)$$

$$m = k \text{ не} = l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4,1,2)$$

$$k = l \text{ не} = m. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4,1,3)$$

Каждый изъ типовъ (4,1,1), (4,1,2) и (4,1,3) содержитъ, очевидно, какъ одно и то же число чисто-коренныхъ формъ, такъ и одно и то же число нечисто-коренныхъ формъ.

При

$$l = m = \varrho$$

имѣемъ

$$D = n\varrho(\varrho + 2k).$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Въ этомъ случаѣ существуютъ только чисто-коренныя формы.

Если

$$P \text{ не} \equiv 0 \pmod{3},$$

то каждому разложенію P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = d_1\,,\quad \varrho = l = m = d_2\,,\quad k = \frac{d_3 - d_2}{2}\,,$$

$$2)\ n = d_2\,,\quad \varrho = l = m = d_1\,,\quad k = \frac{d_3 - d_1}{2}\,,$$

$$3)\ n = d_3\,,\quad \varrho = l = m = d_1\,,\quad k = \frac{d_2 - d_1}{2}\,.$$

Разложенію же

$$P = 1 \cdot 1 \cdot P$$

соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n = 1\,,\quad \varrho = l = m = 1\,,\quad k = \frac{P - 1}{2}\,.$$

Поэтому при

$$D = P \text{ не} \equiv 0 \pmod{3}$$

число формъ типа (4,1,1) равно

$$3\psi(P) + 1\,,$$

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 4) = 9\psi(P) + 3\,,$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F^{(1)}_{4,1}(D, 4)}{3} + \frac{F^{(1)}_{5,1}(D, 4)}{6} = 4\psi(P) + 1\,.$$

Если

$$D=P\equiv 0 \pmod{3},$$

то каждому разложенію P на три множителя

$$d_1<d_2<d_3<P,$$

за исключеніемъ разложенія

$$P=1.3.\frac{P}{3},$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1)\ n=d_1,\quad \varrho=l=m=d_2,\quad k=\frac{d_3-d_2}{2},$$

$$2)\ n=d_2,\quad \varrho=l=m=d_1,\quad k=\frac{d_3-d_1}{2},$$

$$3)\ n=d_3,\quad \varrho=l=m=d_1,\quad k=\frac{d_2-d_1}{2}.$$

разложенію

$$P=1.3.\frac{P}{3}\ \text{при}\ P>3$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (4,1,1)

$$1)\ n=1,\quad \varrho=l=m=3,\quad k=\frac{\frac{P}{3}-3}{2},$$

$$2)\ n=3,\quad \varrho=l=m=1,\quad k=\frac{\frac{P}{3}-1}{2},$$

разложенію же

$$P=1.1.P$$

при $P>3$ соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n=1,\quad \varrho=l=m=1,\quad k=\frac{P-1}{2},$$

а при $P=3$ ни одной.

Поэтому при

$$D=P\equiv 0 \pmod{3}$$

число формъ типа (4,1,1) равно

$$3\psi(P),$$

$$F^{(1)}_{4,1}(D,4)=9\psi(P),$$

$$H^{(1)}(D,4)=\frac{F^{(1)}_{4,1}(D,4)}{3}+\frac{F^{(1)}_{5,1}(D,4)}{6}=4\psi(P).$$

Всѣ эти разсужденія показываютъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$H^{(1)}(D, 4) = 4\psi(P) + 1 - \alpha \ldots\ldots\ldots (15)$$

Разсмотримъ теперь случай

$$D = 2P.$$

Въ этомъ случаѣ существуютъ какъ чисто-коренныя, такъ и нечисто-коренныя формы.

Изъ равенства

$$D = 2P = n\varrho(\varrho + 2k)$$

слѣдуетъ, что для формъ типа (4,1,1) число n должно быть четнымъ, а число $\varrho = l = m$ нечетнымъ.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго форма

$$k(x-y)^2 + \varrho x^2 + \varrho y^2 + nz^2$$

типа (4,1,1) чисто-коренная или нечисто-коренная, смотря по тому, четное или нечетное число k.

Если

$$P \text{не} \equiv 0 \pmod{3},$$

то каждому разложенію P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = 2d_1, \quad \varrho = l = m = d_2, \quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2)\ n = 2d_2, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3)\ n = 2d_3, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

всѣ чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4}$$

имѣютъ мѣсто; въ противномъ же случаѣ только одна изъ указанныхъ сейчасъ формъ чисто-коренная.

Разложенію

$$P=1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n=2\,,\quad \varrho=l=m=1\,,\quad k=\frac{P-1}{2}\,,$$

чисто-коренная при

$$P\equiv 1 \ (\text{mod. } 4)$$

и нечисто-коренныя при

$$P\equiv 3 \ (\text{mod. } 4)\,.$$

Поэтому при

$$D=2P \text{не} \equiv 0 \ (\text{mod. } 3)$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$3\Phi(P)+\Psi(P)+\gamma\,,$$

гдѣ

$$\gamma=1 \text{ при } P\equiv 1 \ (\text{mod. } 4)\,,$$

$$\gamma=0 \text{ при } P\equiv 3 \ (\text{mod. } 4)\,,$$

а число нечисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$2\Psi(P)+1-\gamma\,.$$

Слѣдовательно, при

$$D=2P \text{не} \equiv 0 \ (\text{mod. } 3)$$

имѣемъ

$$F_{4,1}^{(1)}(D,\,4)=9\Phi(P)+3\Psi(P)+3\gamma\,,$$

$$H^{(1)}(D,\,4)=\frac{F_{4,1}^{(1)}(D,\,4)}{3}+\frac{F_{5,1}^{(1)}(D,4)}{6}=3\Phi(P)+\Psi(P)+\psi(2P)+\gamma\,,$$

$$F_{4,1}^{(2)}(D,\,4)=6\Psi(P)+3(1-\gamma)\,,$$

$$H^{(2)}(D,\,4)=\frac{F_{4,1}^{(2)}(D,\,4)}{3}=2\Psi(P)+1-\gamma\,.$$

Пусть теперь

$$D=2P\equiv 0 \ (\text{mod. } 3)\,.$$

Въ такомъ случаѣ каждому разложенію P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P,$$

за исключеніемъ разложенія

$$1 . 3 . \frac{P}{3},$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = 2d_1, \quad \varrho = l = m = d_2, \quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2)\ n = 2d_2, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3)\ n = 2d_3, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

всѣ чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4}$$

имѣютъ мѣсто; въ противномъ же случаѣ только одна изъ указанныхъ сейчасъ формъ чисто-коренная.

Разложенію

$$P = 1 . 3 . \frac{P}{3} \text{ при } P > 3$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = 2, \quad \varrho = l = m = 3, \quad k = \frac{\frac{P}{3} - 3}{2},$$

$$2)\ n = 6, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{\frac{P}{3} - 1}{2},$$

изъ которыхъ одна чисто-коренная, другая нечисто-коренная.

Наконецъ разложенію

$$P = 1 . 1 . P$$

при $P > 3$ соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n = 2, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{P - 1}{2},$$

чисто-коренная при

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

и нечисто-коренная при

$$P \equiv 3 \pmod{4}$$

а при

$$P = 3$$

ни одной.

Поэтому при

$$D = 2P \equiv 0 \pmod{3}$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$3\Phi(P) + \Psi(P) + \gamma,$$

а число нечисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$2\Psi(P) + (1-\gamma) - 1$$

и, слѣдовательно,

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 4) = 9\Phi(P) + 3\Psi(P) + 3\gamma,$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F_{4,1}^{(1)}(D, 4)}{3} + \frac{F_{5,1}^{(1)}(D, 4)}{6} = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma,$$

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 4) = 6\Psi(P) + 3(1-\gamma) - 1,$$

$$H^{(2)}(D, 4) = 2\Psi(P) + (1-\gamma) - 1.$$

Всѣ разсужденія, относящіяся къ случаю

$$D = 2P,$$

показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(D, 4) &= 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma, \\ H^{(2)}(D, 4) &= 2\Psi(P) + (1-\gamma) - \beta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

§ 10. Обратимся къ опредѣленію чиселъ

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2) \text{ и } F_{4,1}^{(2)}(D, 2).$$

Изъ равенства

$$D = n(lm + mk + kl)$$

видно, что для любой формы типа (4,1) число

$$lm + mk + kl$$

должно быть дѣлителемъ D.

Формы типа (4,1) для которыхъ $\mu = 2$ и число

$$lm + mk + kl$$

равно дѣлителю d опредѣлителя D, будемъ называть принадлежащими къ дѣлителю d опредѣлителя D.

Число чисто-коренныхъ формъ типа (4,1), принадлежащихъ къ дѣлителю d опредѣлителя D, обозначимъ чрезъ

$$F_{4,1}^{(1)}(D\,,\,2\,,\,d)$$

а число нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F_{4,1}^{(2)}(D\,,\,2\,,\,d).$$

Очевидно, что

$$F_{4,1}^{(1)}(D\,,\,2\,,\,1) = F_{4,1}^{(2)}(D\,,\,2\,,\,1) = 0\,,$$

а при D четномъ кромѣ того

$$F_{4,1}^{(1)}(D\,,\,2\,,\,2) = F_{4,1}^{(2)}(D\,,\,2\,,\,2) = 0.$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Въ этомъ случаѣ

$$F_{4,1}^{(2)}(D,\,2) = 0\,.$$

Число

$$F_{4,1}^{(1)}(D\,,\,2\,,\,d)$$

очевидно равно числу бинарныхъ формъ

$$k(x-y)^2 + lx^2 + my^2$$

опредѣлителя $-d$, приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ всѣ три коэффиціента k, l, m отличны отъ нуля и различны между собою.

Слѣдовательно,

$$F_{4,1}^{(1)}(D\,,\,2\,,\,d) = 3(h^{(1)}[d) + h^{(2)}(d) - \Omega(d)]\,,$$

гдѣ

$$\Omega(d)$$

обозначаетъ число классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, для которыхъ въ соотвѣтственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два изъ нихъ равны между собою, и

$$F_{4,1}^{(1)}(D,\,2) = \sum F_{4,1}^{(1)}(D\,,\,2\,,\,d) = 3\left\{\sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} - 3\sum \Omega(d),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Сумма

$$\sum \Omega(d)$$

равна числу классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ, взятые съ обратнымъ знакомъ, дѣлятъ P и отличны отъ 1, и для которыхъ въ соотвѣтственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ коэффиціентъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(T).$$

Каждому разложенію P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности (T), эквивалентныхъ одной изъ трехъ слѣдующихъ приведенныхъ формъ Зеллинга:

$$1)\ d_1x^2 + d_2y^2,$$

$$2)\ d_2x^2 + d_3y^2,$$

$$3)\ d_3x^2 + d_1y^2,$$

въ которыхъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, и три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности (T), эквивалентныхъ одной изъ трехъ слѣдующихъ приведенныхъ формъ Зеллинга:

$$1)\ d_2x^2 + d_2y^2 + \frac{d_3 - d_2}{2}(x-y)^2,$$

$$2)\ d_1x^2 + d_1y^2 + \frac{d_3 - d_1}{2}(x-y)^2,$$

$$3)\ d_1x^2 + d_1y^2 + \frac{d_2 - d_1}{2}(x-y)^2,$$

въ которыхъ по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Разложенію же

$$P = 1 \, . \, 1 \, . \, P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности (T), эквивалентныхъ приведенной формѣ Зеллинга

$$x^2 + Py^2,$$

*

въ которой одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, и одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности (T), эквивалентныхъ приведенной формѣ Зеллинга

$$x^2 + y^2 + \frac{P-1}{2}(x-y)^2 ,$$

въ которой по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Поэтому при

$$D = P$$

имѣемъ

$$\sum \Omega(d) = 6\psi(P) + 2 ,$$

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2) = 3\left\{\sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} - 18\psi(P) - 6 . \quad . \quad . (17)$$

Пусть теперь

$$D = 2P .$$

Для того чтобы форма

$$k(x-y)^2 + lx^2 + my^2 + nz^2$$

типа (4,1) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы n было четное и чтобы бинарная форма

$$k(x-y)^2 + lx^2 + my^2$$

опредѣлителя

$$\frac{2P}{n} ,$$

приведенная по Зеллингу, была нечисто-коренною.

(Первое изъ этихъ условій, очевидно, вытекаетъ изъ второго какъ слѣдствіе).

Принимая во вниманіе сейчасъ сказанное и пользуясь соображеніями, аналогичными тѣмъ, которыми мы пользовались для случая

$$D = P ,$$

легко найдемъ, что

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2, d) = 3\{h^{(1)}(d) - \Omega^{(1)}(d)\} ,$$

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 2, d) = 3\{h^{(2)}(d) - \Omega^{(2)}(d)\} ,$$

гдѣ

$$\Omega^{(1)}(d) \text{ и } \Omega^{(2)}(d)$$

обозначаютъ соотвѣтственно числа чисто-коренныхъ и нечисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, для которыхъ въ соотвѣтственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою; и

$$F_{4,1}^{(1)}(D,2)=3\left\{\sum h^{(1)}(2d)+\sum h^{(1)}(d)\right\}-3\left\{\sum \Omega^{(1)}(2d)+\sum \Omega^{(1)}(d)\right\},$$
$$F_{4,1}^{(2)}(D,2)=3\sum h^{(2)}(d)-3\sum \Omega^{(2)}(d),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P отличные отъ 1.

Сумма

$$\sum \Omega^{(1)}(2d)$$

равна числу классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ четные, дѣлятъ D и отличны отъ 2, и для которыхъ въ соотвѣтствующей приведенной формѣ Зеллинга одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, такъ какъ для четныхъ, но не дѣлящихся на 4, опредѣлителей не существуетъ приведенныхъ бинарныхъ формъ Зеллинга, въ которыхъ два или всѣ три коэффиціента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(S).$$

Суммы

$$\sum \Omega^{(1)}(d) \text{ и } \sum \Omega^{(2)}(d)$$

равны соотвѣтственно числамъ чисто-коренныхъ и нечисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ дѣлятъ P и отличны отъ 1, и для которыхъ въ соотвѣтствующей приведенной формѣ Зеллинга или одинъ коэффиціентъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(R).$$

Каждому разложенію $D=2P$ на три множителя

$$d_1\equiv 0 \pmod{2},\ d_2 \text{ и } d_3,$$

изъ которыхъ каждый отличенъ отъ P и $2P$, соотвѣтствуютъ два класса бинарныхъ формъ изъ совокупности (S), эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$1)\ d_1x^2+d_2y^2,$$
$$2)\ d_1x^2+d_3y^2.$$

Разложенію

$$D = 2 . 1 . P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности (S), эквивалентныхъ формѣ

$$2x^2 + Py^2 .$$

Наконецъ разложенію

$$D = 1 . 1 . 2P$$

соотвѣтствуетъ также одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности (S), эквивалентныхъ формѣ

$$x^2 + 2Py^2 .$$

Поэтому

$$\sum \Omega^{(1)}(2d) = 2\psi(2P).$$

Каждому разложенію числа P на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности (R), эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$1)\ d_1x^2 + d_2y^2 ,$$

$$2)\ d_2x^2 + d_3y^2 ,$$

$$3)\ d_3x^2 + d_1y^2 ,$$

приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю и которыя всѣ чисто-коренныя, и три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности (R), эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ d_2x^2 + d_2y^2 + \dfrac{d_3 - d_2}{2}(x-y)^2, \\[2ex] 2)\ d_1x^2 + d_1y^2 + \dfrac{d_3 - d_1}{2}(x-y)^2, \\[2ex] 3)\ d_1x^2 + d_1y^2 + \dfrac{d_2 - d_1}{2}(x-y)^2, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Всѣ формы (18) чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4}$$

имѣютъ мѣсто, въ противномъ же случаѣ только одна изъ нихъ чисто-коренная.

Разложенію

$$P = 1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности (R), эквивалентныхъ чисто-коренной формѣ

$$x^2 + Py^2,$$

приведенной по Зеллингу, въ которой одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, и одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности (R), эквивалентныхъ формѣ

$$x^2 + y^2 + \frac{P-1}{2}(x-y)^2,$$

приведенной по Зеллингу, въ которой по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою и которая чисто-коренная при

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

и нечисто-коренная при

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Поэтому

$$\sum \Omega^{(1)}(d) = 6\Phi(P) + 4\Psi(P) + 1 + \gamma,$$

$$\sum \Omega^{(2)}(d) = 2\Psi(P) + 1 - \gamma,$$

и слѣдовательно при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2) = 3\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d)\right\} - 6\psi(2P) - 18\Phi(P) - 12\Psi(P) - 3 - 3\gamma =$$

$$= 3\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d)\right\} - 9\psi(2P) - 9\Phi(P) - 3\Psi(P) - 3\beta, \quad . \ (19)$$

такъ какъ

$$\psi(2P) = 3\psi(P) + 1 = 3\Phi(P) + 3\Psi(P) + 1,$$

и

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 2) = 3\sum h^{(2)}(d) - 6\Psi(P) - 3(1-\gamma) \ . \ . \ . \ . \ . \ (20)$$

§ 11. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію формъ типа (3,1).

Для формъ этого типа

$$D = hm(k+n) + kn(h+m)\,.\;\ldots\ldots\ldots\;(21)$$

Значеніе $\mu = 6$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (3,1), для которыхъ три изъ коэффиціентовъ

$$h\,,\; k\,,\; m \text{ и } n$$

равны между собою, а это возможно только при

$$D \equiv 1 \pmod{3}$$

и только для четырехъ слѣдующихъ формъ типа (3,1):

$$1)\; h = k = m = 1\,,\quad n = \frac{D-1}{3}\,,$$

$$2)\; k = m = n = 1\,,\quad h = \frac{D-1}{3}\,,$$

$$3)\; m = n = h = 1\,,\quad k = \frac{D-1}{3}\,,$$

$$4)\; n = h = k = 1\,,\quad m = \frac{D-1}{3}\,.$$

Всѣ эти формы чисто-коренныя при

$$D = P$$

и нечисто-коренныя при

$$D = 2P$$

Итакъ, при

$$D = P$$

имѣемъ

$$F^{(1)}_{3,1}(D,\,6) = 4\delta\,,$$

$$H^{(1)}(D,\,6) = \frac{F^{(1)}_{3,1}(D,\,6)}{4} = \delta\,,\quad \ldots\ldots\;(22)$$

гдѣ

$$\delta = 0\,,\ \text{при } P \text{ не} \equiv 1 \pmod{3}\,,$$

$$\delta = 1\,,\quad \text{при}\quad P \equiv 1 \pmod{3}\,,$$

а при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(D,\,6) &= \frac{F_{3,1}^{(1)}(D,\,6)}{4} = 0\,, \\ F_{3,1}^{(2)}(D,\,6) &= 4\varepsilon\,, \\ H^{(2)}(D,\,6) &= \varepsilon\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

гдѣ

$$\varepsilon = 0\,,\ \text{при}\ P\,\text{не} \equiv 2\ (\text{mod.}\ 3)\,,$$

$$\varepsilon = 1\,,\quad \text{при}\quad P \equiv 2\ (\text{mod.}\ 3)\,.$$

Значеніе $\mu = 2$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (3,1), въ которыхъ два и только два изъ коэффиціентовъ

$$h\,,\ k\,,\ m\ \text{и}\ n$$

равны между собою.

Всѣ такія формы мы разобьемъ на шесть слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$$h = k\ \text{и не} = \text{ни}\ m\,,\ \text{ни}\ n\ \ldots\ldots\ldots (3,1,1)$$

$$h = m\ \text{и не} = \text{ни}\ k\,,\ \text{ни}\ n\ \ldots\ldots\ldots (3,1,2)$$

$$h = n\ \text{и не} = \text{ни}\ k\,,\ \text{ни}\ m\ \ldots\ldots\ldots (3,1,3)$$

$$k = m\ \text{и не} = \text{ни}\ h\,,\ \text{ни}\ n\ \ldots\ldots\ldots (3,1,4)$$

$$k = n\ \text{и не} = \text{ни}\ h\,,\ \text{ни}\ m\ \ldots\ldots\ldots (3,1,5)$$

$$m = n\ \text{и не} = \text{ни}\ h\,,\ \text{ни}\ k\ \ldots\ldots\ldots (3,1,6)$$

Каждый изъ типовъ (3,1,1), (3,1,2), (3,1,3), (3,1,4), (3,1,5) и (3,1,6) содержитъ по одному и тому же числу формъ, такъ какъ вторая часть равенства (21) симметрична относительно h, k, m и n.

При

$$h = k = \varrho$$

имѣемъ

$$D = \varrho m(\varrho + n) + \varrho n(\varrho + m)\,.\ \ldots\ldots\ldots (24)$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Изъ равенства (24) получаемъ такое

$$2P = \varrho(2\varrho m + 2\varrho n + 4mn) = \varrho\{(2\varrho + m + n)(m + n) - (m - n)^2\},$$

изъ котораго слѣдуетъ, что числа $m + n$ и $m - n$ нечетныя.

Если

$$P \text{не} \equiv 1 \pmod{3},$$

то каждому рѣшенію

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz - y^2 = 2d_s$$

изъ уравненій

$$xz - y^2 = 2d_1, \; xz - y^2 = 2d_2, \ldots, \; xz \; y^2 = 2d_t,$$

гдѣ

$$d_1, \; d_2, \ldots, \; d_t$$

всѣ дѣлители P, отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta > \xi > \eta, \quad \zeta - \xi = \frac{2P}{d_s},$$

$$\eta \text{ нечетное},$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1) \; \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad n = \frac{\xi - \eta}{2},$$

$$2) \; \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad n = \frac{\xi + \eta}{2}$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D = P \text{не} \equiv 1 \pmod{3}$$

число формъ типа (3,1,1) равно

$$2 \sum f\left(2d, \; z - x = \frac{2P}{d}\right),$$

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12 \sum f\left(2d, \; z - x = \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Если же

$$D = P \equiv 1 \pmod{3},$$

то каждому рѣшенію

$$x = \xi\,, \quad y = \eta\,, \quad z = \zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz - y^2 = 2d_s$$

изъ уравненій

$$xz - y^2 = 2d_1\,, \quad xz - y^2 = 2d_2\,, \ldots, \quad xz - y^2 = 2d_t\,,$$

гдѣ

$$d_1\,, \quad d_2\,, \ldots, \quad d_t$$

всѣ дѣлители P, отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta > \xi > \eta\,, \quad \zeta - \xi = \frac{2P}{d_s}\,,$$

η нечетное,

за исключеніемъ рѣшенія

$$x = \frac{P+2}{3}\,, \; y = \frac{P-4}{3}\,, \quad z = \frac{P+8}{3}$$

уравненія

$$xz - y^2 = 2P\,,$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1)\; \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}\,, \quad m = \frac{\xi + \eta}{2}\,, \quad n = \frac{\xi - \eta}{2}\,,$$

$$2)\; \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}\,, \quad m = \frac{\xi - \eta}{2}\,, \quad n = \frac{\xi + \eta}{2}\,,$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D = P \equiv 1 \pmod{3}$$

число формъ типа (3,1,1) равно

$$2\left\{\sum f\left(2d,\ z-x=\frac{2P}{d}\right)-1\right\},$$

$$F_{3,1}^{(1)}(D,2)=12\left\{\sum f\left(2d,\ z-x=\frac{2P}{d}\right)-1\right\},$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P.

Всѣ разсужденія, относящіяся къ случаю

$$D=P,$$

показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$F_{3,1}^{(1)}(D,2)=12\left\{\sum f\left(2d,\ z-x=\frac{2P}{d}\right)-\delta\right\}.\ .\ .\ .\ .\ (25)$$

Пусть теперь

$$D=2P.$$

Изъ равенства (24) выводимъ такое

$$4P=\varrho\{(2\varrho+m+n)(m+n)-(m-n)^2\},\ .\ .\ .\ .\ (26)$$

изъ котораго слѣдуетъ, что ϱ число нечетное, а $m+n$ и $m-n$ числа четныя, и слѣдовательно

$$\frac{m+n}{2} \text{ и } \frac{m-n}{2}$$

числа цѣлыя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго заключаемъ, что для того чтобы форма

$$\varrho(z-x)^2+\varrho(x-y)^2+my^2+nz^2$$

типа (3,1,1) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы m и n были числа нечетныя.

Изъ равенства (26) слѣдуетъ, что

$$P=\varrho\left\{\left(\varrho+\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m+n}{2}\right)-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2\right\},$$

откуда видно, что

$$\frac{m-n}{2}$$

число нечетное.

Если

$$P \text{не} \equiv 2 \pmod{3},$$

то каждому рѣшенію

$$x=\xi, \quad y=\eta, \quad z=\zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz-y^2=d_s$$

изъ уравненій

$$xz-y^2=d_1, \quad xz-y^2=d_2, \ldots, \quad xz-y^2=d_t,$$

гдѣ

$$d_1, \quad d_2, \ldots, \quad d_t$$

всѣ дѣлители P, отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta>\xi>\eta, \quad \zeta-\xi=\frac{P}{d_s}$$

η и одно изъ чиселъ ξ и ζ нечетныя,

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1)\ \varrho=h=k=\frac{P}{d_s}, \quad m=\xi+\eta, \quad n=\xi-\eta,$$

$$2)\ \varrho=h=k=\frac{P}{d_s}, \quad m=\xi-\eta, \quad n=\xi+\eta,$$

чисто-коренныя, если

$$\xi+\zeta\pm 2\eta=\frac{m+n}{2}+\frac{m+n}{2}+\varrho-2\frac{m-n}{2}=2n+\varrho\equiv\frac{P}{d_s}\equiv\varrho \text{ (mod. 4)},$$

и нечисто-коренныя, если

$$\xi+\zeta\pm 2\eta=2n+\varrho\equiv\frac{P}{d_s}+2 \text{ (mod. 4)},$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по сейчасъ указанному способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D=2P \text{ не}\equiv 1 \text{ (mod. 3)}$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2\sum f\left(d,\, x+z-2y\equiv\frac{P}{d} \text{ (mod. 4)},\ z-x=\frac{P}{d}\right),$$

$$F_{3,1}^{(1)}(D,2)=12\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d} \text{ (mod. 4)},\ z-x=\frac{P}{d}\right),$$

число нечисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2 \ (\mathrm{mod.}\ 4),\ z-x=\frac{P}{d}\right),$$

а

$$F^{(2)}_{3,1}(D,2)=12\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\ (\mathrm{mod.}\ 4),\ z-x=\frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Если же

$$P\equiv 2\ (\mathrm{mod.}\ 4),$$

то каждому рѣшенію

$$x=\xi,\ y=\eta,\ z=\zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz-y^2=d_s$$

изъ уравненій

$$xz-y^2=d_1,\ xz-y^2=d_2,\ldots,\ xz-y^2=d_t,$$

гдѣ

$$d_1,\ d_2,\ldots,\ d_t$$

всѣ дѣлители P, отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta>\xi>\eta,\quad \zeta-\xi=\frac{P}{d_s}$$

η и одно изъ чиселъ ξ и ζ нечетныя,

за исключеніемъ рѣшенія

$$x=\xi=\frac{P+1}{3},\quad y=\eta=\frac{P-2}{3},\quad z=\zeta=\frac{P+4}{3}$$

уравненія

$$xz-y^2=P,$$

для котораго

$$\xi+\zeta-2\eta=\frac{P+1}{3}+\frac{P+4}{3}-2\,\frac{P-2}{3}=3\equiv\frac{P}{d}+2\ (\mathrm{mod.}\ 4),$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы:

$$1)\ \varrho = h = k = \frac{P}{d_s},\quad m = \xi + \eta,\quad n = \xi - \eta,$$

$$2)\ \varrho = h = k = \frac{P}{d_s},\quad m = \xi - \eta,\quad n = \xi + \eta,$$

чисто-коренныя, если

$$\xi + \zeta - 2\eta \equiv \frac{P}{d_s}\ (\text{mod. } 4)$$

и нечисто-коренныя, если

$$\xi + \zeta - 2\eta \equiv \frac{P}{d_s} + 2\ (\text{mod. } 4).$$

Поэтому при

$$D = 2P \equiv 1\ (\text{mod. } 3)$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d}\ (\text{mod. } 4),\ z - x = \frac{P}{d}\right),$$

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d}\ (\text{mod. } 4),\ z - x = \frac{P}{d}\right),$$

число нечисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2\left\{\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2\ (\text{mod. } 4),\ z - x = \frac{P}{d}\right) - 1\right\},$$

а

$$F_{3,1}^{(2)}(D, 2) = 12\left\{\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2\ (\text{mod. } 4),\ z - x = \frac{P}{d}\right) - 1\right\},$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Всѣ расужденія, относящіяся къ случаю

$$D = 2P$$

показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d}\ (\text{mod. } 4),\ z - x = \frac{P}{d}\right), \quad (27)$$

$$F_{3,1}^{(2)}(D, 2) = 12\left\{\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2\ (\text{mod. } 4),\ z - x = \frac{P}{d}\right) - \varepsilon\right\}. \quad (28)$$

§ 12. Разсмотримъ теперь формы типа (2,1).

Значенiе $\mu = 2$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ этого типа, которыя принадлежатъ къ одному изъ четырехъ слѣдующихъ типовъ

$$h = k, \quad m = n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2,1,1)$$

$$h = m, \quad k = n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2,1,2)$$

$$h = n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2,1,3)$$

$$k = m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2,1,4)$$

При

$$g = 0, \quad h = k = \varrho, \quad m = n = \sigma$$

имѣемъ

$$2D = 4\varrho\sigma(\varrho + \sigma + l) + 2l(\varrho^2 + \sigma^2) = (\varrho + \sigma)\{(2\varrho + l)(2\sigma + l) - l^2\}. \quad (29)$$

Изъ равенства (29) слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

число l нечетное.

Принявъ это во вниманiе, посредствомъ разсужденiй совершенно аналогичныхъ тѣмъ, которыми мы пользовались для формъ типа (3,1), легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (2,1,1) равно

$$2\sum f\left(2d\,,\ x + z - 2y = \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированiе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (29) слѣдуетъ, что $\varrho + \sigma$ число нечетное, а l число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно $\dfrac{l}{2}$ число цѣлое нечетное.

На основанiи сейчасъ замѣченнаго всѣ формы

$$\varrho(z - x)^2 + \varrho(x - y)^2 + lx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$$

типа (2,1,1) чисто-коренныя.

Изъ равенства (29) получаемъ

$$P=(\varrho+\sigma)\left\{\left(\varrho+\frac{l}{2}\right)\left(\sigma+\frac{l}{2}\right)-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D=2P$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,1) равно

$$2\sum f\left(d,\, x+z-2y=\frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

При

$$h=m=\varrho\,,\quad k=n=\sigma$$

имѣемъ

$$2D=2\varrho^2(2\sigma+l)+2\sigma^2(2\varrho+l)+4l\varrho\sigma=(\varrho+\sigma)\{(2\varrho+l)(2\sigma+l)-l^2\}.\ (30)$$

Изъ равенства (30) видно, что при

$$D=P$$

l число нечетное.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D=P$$

число формъ типа (2,1,2) равно

$$2\sum f\left(2d,\, x+z-2y=\frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D=2P.$$

Изъ равенства (30) видно, что $\varrho+\sigma$ число нечетное, а l число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно $\frac{l}{2}$ число цѣлое нечетное.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго всѣ формы

$$\varrho(z-x)^2+\sigma(x-y)^2+lx^2+\varrho y^2+\sigma z^2$$

чисто коренныя.

Изъ равенства (30) вытекаетъ такое

$$P = (\varrho + \sigma)\left\{\left(\varrho + \frac{l}{2}\right)\left(\sigma + \frac{l}{2}\right) - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,2) равно

$$2\sum f\left(d_1 x + z - 2y = \frac{P}{d}\right)$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

При

$$h = n = \varrho$$

имѣемъ

$$2D = \varrho\{(2\varrho + 4l + k + m)(k + m) - (k - m)^2\}. \quad . \quad . \quad (31)$$

Изъ равенства (31) видно, что при

$$D = P$$

$k - m$ число нечетное.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (2,1,3), равное числу формъ типа (2,1,4), равно

$$2\sum f\left(2d,\ z - x > \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Далѣе изъ равенства (31) слѣдуетъ, что при

$$D = 2P$$

ϱ число нечетное, а $k - m$ и $k + m$ числа четныя, и слѣдовательно $\dfrac{k+m}{2}$ и $\dfrac{k-m}{2}$ числа цѣлыя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\varrho(z - x)^2 + k(x - y)^2 + lx^2 + my^2 + \varrho z^2$$

была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы число $k + l$ было нечетное.

Равенство (31) при
$$D=2P$$
приводится къ такому
$$P=\varrho\left\{\left(\varrho+2l+\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k+m}{2}\right)-\left(\frac{k-m}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при
$$D=2P$$
число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,3), равное числу чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,4), равно
$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\ (\mathrm{mod.}\ 4),\ z-x>\frac{P}{d}\right),$$
а число нечисто-коренныхъ формъ типа (2,1,3), равное числу нечисто-коренныхъ формъ типа (2,1,4), равно
$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\ (\mathrm{mod.}\ 4),\ z-x>\frac{P}{d}\right),$$
причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Всѣ разсужденія настоящаго параграфа показываютъ, что при
$$D=P$$
имѣетъ мѣсто равенство
$$F_{2,1}^{(1)}(D,2)=4\sum f\left(2d,\ x+z-2y=\frac{2P}{d}\right)+4\sum f\left(2d,\ z-x>\frac{2P}{d}\right),\quad(32)$$
а при
$$D=2P$$
имѣютъ мѣсто равенства
$$\left.\begin{aligned}F_{2,1}^{(1)}(D,2)&=4\sum f\left(d,\ x+z-2y=\frac{P}{d}\right)+\\&\quad+4\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\ (\mathrm{mod.}\ 4),\ z-x>\frac{P}{d}\right),\\F_{2,1}^{(2)}(D,2)&=4\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2,\ z-x>\frac{P}{d}\right),\end{aligned}\right\}\quad(33)$$
причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1, такъ какъ на основаніи § 7 ни одна тройничная форма не можетъ принадлежать заразъ къ двумъ различнымъ изъ типовъ (2,1,1,), (2,1,2), (2,1,3) и (2,1,4).

*

§ 13. Обратимся наконецъ къ формамъ типа (1).

Значеніе $\mu = 2$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (1), которыя принадлежатъ къ одному изъ девяти слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$$g = l, \quad h = m, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,1)$$

$$h = m, \quad k = n, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,2)$$

$$k = n, \quad g = l, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,3)$$

$$g = h, \quad l = m, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,4)$$

$$h = k, \quad m = n, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,5)$$

$$k = g, \quad n = l, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,6)$$

$$g = m, \quad h = l, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,7)$$

$$h = n, \quad k = m, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,8)$$

$$k = l, \quad g = n, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1,9)$$

При

$$g = l = \varrho, \quad h = m = \sigma$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} 2D &= 2\varrho^2(2\sigma + k + n) + 2\sigma^2(2\varrho + k + n) + 4kn(\varrho + \sigma) + 4\varrho\sigma(k + n) = \\ &= (\varrho + \sigma)\{4\varrho\sigma + 2(k + n)(\varrho + \sigma) + 4kn\} = \\ &= (\varrho + \sigma)\{(2\varrho + k + n)(2\sigma + k + n) - (k - n)^2\}. \quad \ldots \quad (34) \end{aligned}$$

Изъ равенства (34) слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

числа $\varrho + \sigma$, $k + n$ и $k - n$ нечетныя.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (1,1) или, что тоже, число формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4\sum f\left(2d,\ x + z - 2y > \frac{2P}{d},\ z - x < \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (34) слѣдуетъ, что $\varrho+\sigma$ число нечетное, а $k+n$ и $k-n$ числа четныя, и что кромѣ того $k-n$ не дѣлится на 4; слѣдовательно число $\frac{k-n}{2}$ и одно изъ чиселъ $\varrho+\frac{k+n}{2}$ и $\sigma+\frac{k+n}{2}$ нечетныя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\varrho(y-z)^2+\sigma(z-x)^2+k(x-y)^2+\varrho x^2+\sigma y^2+nz^2$$

была нечисто-коренною необходимо и достаточно, чтобы числа k и n были нечетныя.

Изъ равенства (34) вытекаетъ такое

$$P=(\varrho+\sigma)\left\{\left(\frac{k+n}{2}+\varrho\right)\left(\frac{k+n}{2}+\sigma\right)-\left(\frac{k-n}{2}\right)^2\right\}$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D=2P$$

число чисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\ (\mathrm{mod.}\ 4),\ x+z-2y>\frac{P}{d},\ z-x<\frac{P}{d}\right),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\ (\mathrm{mod.}\ 4),\ x+z-2y>\frac{P}{d},\ z-x<\frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

При

$$g=h=\varrho,\quad l=m=\sigma$$

имѣемъ

$$2D=4\varrho\sigma\{\varrho+\sigma+k+n)+4kn(\varrho+\sigma)+2\varrho(\varrho n+k\sigma)+2\sigma(\varrho k+n\sigma)=$$
$$=(\varrho+\sigma+2k)(2n\varrho+2n\sigma+4\varrho\sigma)=(\varrho+\sigma+2k)\{(2\varrho+n)(2\sigma+n)-n^2\}.\ (35)$$

Изъ равенства (35) слѣдуетъ, что при

$$D=P$$

числа $\varrho+\sigma+2k$ и n нечетныя.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (1,4) или, что тоже, число формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8) и (1,9) равно

$$2\sum f\left(2d\,,\; x+z-2y < \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (35) слѣдуетъ, что $\varrho + \sigma$ число нечетное, а n число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно $\frac{n}{2}$ и одно изъ чиселъ $\varrho + \frac{n}{2}$ и $\sigma + \frac{n}{2}$ нечетныя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\varrho(y-z)^2 + \varrho(z-x)^2 + k(x-y)^2 + \sigma x^2 + \sigma y^2 + nz^2$$

типа (1,4) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы число k было нечетное.

Изъ равенства (35) вытекаетъ такое

$$P = (\varrho + \sigma + 2k)\left\{\left(\varrho + \frac{n}{2}\right)\left(\sigma + \frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = 2P$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (1,4) или, что тоже, число чисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,4), (1,5), (1,6), (1,7) (1,8) и (1,9) равно

$$2\sum f\left(d\,,\; x+z-2y \equiv \frac{P}{d}\ (\mathrm{mod.}\ 4),\; x+z-2y < \frac{P}{d}\right),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ этихъ типовъ равно

$$2\sum f\left(d\,,\; x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2\ (\mathrm{mod.}\ 4),\; x+z-2y < \frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1.

Всѣ разсужденія настоящаго параграфа показываютъ, что при

$$D=P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$F_1^{(1)}(D,2)=12\sum f\left(2d\,,\ x+z-2y>\frac{2P}{d}\,,\ z-x<\frac{2P}{d}\right)+$$
$$+12\sum f\left(2d\,,\ x+z-2y<\frac{2P}{d}\right),\ \ldots\ldots(36)$$

а при

$$D=2P$$

имѣютъ мѣсто равенства

$$\left.\begin{aligned}F_1^{(1)}(D,2)=12\sum f\left(d,x+z-2y\equiv\frac{P}{d}(\text{mod.}\,4),x+z-2y>\frac{P}{d},z-x<\frac{P}{d}\right)\\+12\sum f\left(d,x+z-2y\equiv\frac{P}{d}(\text{mod.}\,4),x+z-2y<\frac{P}{d}\right),\\F_1^{(2)}(D,2)=12\sum f\left(d,x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2(\text{mod.}\,4),x+z-2y>\frac{P}{d},z-x<\frac{P}{d}\right)\\+12\sum f\left(d,x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\,(\text{mod.}\,4),x+z-2y<\frac{P}{d}\right),\end{aligned}\right\}(37)$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1, такъ какъ на основаніи § 7 ни одна тройничная форма не можетъ принадлежать къ двумъ разнымъ изъ типовъ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8) и (1,9).

§ 14. Изъ формулъ (25), (27), (28), (32), (33), (36) и (37), на основаніи леммъ 1-ой, 2-ой, 3-й и 4-й, слѣдуетъ, что при

$$D=P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$\frac{F_1^{(1)}(D,2)}{12}+\frac{F_{2,1}^{(1)}(D,2)}{4}+\frac{F_{3,1}^{(1)}(D,2)}{12}=$$
$$=\sum\left\{f\left(2d\,,\ x+z-2y>\frac{2P}{d}\,,\ z-x<\frac{2P}{d}\right)+\right.$$
$$+f\left(2d\,,\ x+z-2y<\frac{2P}{d}\right)+f\left(2d\,,\ x+z-2y=\frac{2P}{d}\right)$$
$$\left.+f\left(2d,\ z-x>\frac{2P}{d}\right)+f\left(2d,\ z-x=\frac{2P}{d}\right)\right\}-\delta=$$
$$=\sum f(2d)-\delta=\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(2d)-\frac{1}{2}\sum\omega^{(1)}(2d)-\delta=$$
$$=\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(2d)-3\psi(P)-1-\delta\,.\ \ldots\ldots(38)$$

а при

$$D = 2P$$

имѣютъ мѣсто равенства

$$\frac{F_1^{(1)}(D,2)}{12} + \frac{F_{2,1}^{(1)}(D,2)}{4} + \frac{F_{3,1}^{(1)}(D,2)}{12} =$$

$$= \sum \left\{ f\left(d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} (\mathrm{mod.}\, 4),\, x+z-2y > \frac{P}{d},\, z-x < \frac{P}{d}\right) \right.$$

$$+ f\left(d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} (\mathrm{mod.}\, 4),\, x+z-2y < \frac{P}{d}\right) +$$

$$+ f\left(d,\, x+z-2y = \frac{P}{d}\right) + f\left(d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} (\mathrm{mod.}\, 4),\, z-x > \frac{P}{d}\right)$$

$$\left. + f\left(d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} (\mathrm{mod.}\, 4),\, z-x = \frac{P}{d}\right) \right\} =$$

$$= \sum f\left[d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} (\mathrm{mod.}\, 4)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - \sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} - \sum\nolimits_1 \Omega_1(d) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - 3\Phi(P) - \Psi(P) - \frac{1+\gamma}{2} \ldots\ldots \quad (39)$$

и

$$\frac{F_1^{(2)}(D,2)}{12} + \frac{F_{2,1}^{(2)}(D,2)}{4} + \frac{F_{3,1}^{(2)}(D,2)}{12} =$$

$$= \sum \left\{ f\left(d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 (\mathrm{mod.}\, 4),\, x+z-2y > \frac{P}{d},\, z-x < \frac{P}{d}\right) \right.$$

$$+ f\left(d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 (\mathrm{mod.}\, 4),\, x+z-2y < \frac{P}{d}\right) +$$

$$+ f\left(d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 (\mathrm{mod.}\, 4),\, z-x > \frac{P}{d}\right) +$$

$$\left. + f\left(d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 (\mathrm{mod.}\, 4),\, z-x = \frac{P}{d}\right) \right\} - \varepsilon =$$

$$= \sum f\left[d,\, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 (\mathrm{mod.}\, 4)\right] - \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - \sum\nolimits_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} - \sum\nolimits_1 \Omega_2(d) - \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - 2\Psi(P) - \frac{1-\gamma}{2} - \varepsilon, \ldots\ldots \quad (40)$$

причемъ суммированіе, указываемое знакомъ $\sum$, вездѣ распространяется на всѣ дѣлители d числа P, отличные отъ 1, а суммы $\sum_1 \Omega_1(d)$, $\sum_1 \Omega_2(d)$ и $\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$ имѣютъ то же значеніе, что и въ § 4.

§ 15. Положимъ

$$M^{(j)}(D) = \sum \frac{H^{(j)}(D,\mu)}{\mu},$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ возможныя значенія μ.

Мы будемъ имѣть

$$H^{(j)}(D) = M^{(j)}(D) + \sum \frac{(\mu-1)\,H^{(j)}(D,\mu)}{\mu} \quad \ldots\ldots (41)$$

Числа

$$M^{(1)}(D) \quad \text{и} \quad M^{(2)}(D)$$

Эйзенштейнъ называетъ соотвѣтственно измѣреніями чисто и нечистокоренныхъ классовъ опредѣлителя D.

Пусть

$$D = P$$

изъ формулы (41) и формулъ (10), (12), (13), (15), (17), (22) и (38) выводимъ

$$H^{(1)}(P) = \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \sum \frac{(\mu-1)\,H^{(1)}(P,\mu)}{\mu} - \frac{1}{24} =$$

$$= \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(2d) - 3\psi(P) - 1 - \delta\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d) + \frac{1}{2}\sum h^{(2)}(d) - 3\psi(P) - 1\right\} +$$

$$+ \frac{3}{4}\left\{4\psi(P) + 1 - \alpha\right\} + \frac{5}{6}\delta + \frac{7}{8} + \frac{11\alpha}{12} - \frac{1}{24} =$$

$$= \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} -$$

$$- \frac{1}{4} + \frac{7}{8} - \frac{1}{24} + \frac{\delta}{3} + \frac{\alpha}{6} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} +$$

$$+ \frac{7 + 4\delta + 2\alpha}{12} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{\lambda}{12}, \quad (42)$$

гдѣ

$$\lambda = 9 \quad \text{при} \quad P \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\lambda = 11 \quad \text{при} \quad P \equiv 1 \pmod{3},$$

$$\lambda = 7 \quad \text{при} \quad P \equiv 2 \pmod{3}.$$

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ формулы (41) на основаніи формулъ (10), (11), (14), (16), (19), (20), (23), (39) и (40) выводимъ

$$H^{(1)}(2P) = M^{(1)}(2P) + \sum \frac{(\mu-1)\,H^{(1)}(2P,\,\mu)}{\mu} =$$

$$= M^{(1)}(2P) + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d) - 3\Phi(P) - \Psi(P) - \frac{1+\gamma}{2}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d) - \frac{3}{2}\psi(2P) - \frac{3}{2}\Phi(P) - \frac{1}{2}\Psi(P) - \frac{1}{2}\gamma\right\} +$$

$$+ \frac{3}{4}\left\{3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma\right\} + \frac{7}{8} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d) + M^{(1)}(2P) + \frac{5+2\gamma}{8} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d) + M^{(1)}(2P) + \frac{\nu}{8}, \quad \ldots (43)$$

гдѣ

$$\nu = 7 \text{ при } P \equiv 1 \pmod{4},$$

$$\nu = 5 \text{ при } P \equiv 3 \pmod{4},$$

и

$$H^{(2)}(2P) = M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24} + \sum \frac{(\mu-1)\,H^{(2)}(2P,\,\mu)}{\mu} - \frac{1}{24} =$$

$$= \left\{M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d) - 2\Psi(P) - \frac{1-\gamma}{2} - \varepsilon\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(2)}(d) - \Psi(P) - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}\right\} + \frac{3}{4}\left\{2\Psi(P) + 1 - \gamma - \beta\right\} +$$

$$+ \frac{5}{6}\varepsilon + \frac{11}{12}\beta - \frac{1}{24} = \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \left\{M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\beta}{6} - \frac{1}{24} = \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} +$$

$$+ \left\{M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{5 - 6\gamma + 8\varepsilon + 4\beta}{24} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(2)}(d) + \sum h^{(1)}(d)\right\} + \left\{M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{\varrho}{24}, \quad \ldots (44)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \varrho &= 1 \text{ при } P \equiv 1 \pmod{12}, \\ \varrho &= 9 \text{ при } P \equiv 3 \pmod{12}, \\ \varrho &= 7 \text{ при } P \equiv 5 \pmod{12}, \\ \varrho &= 5 \text{ при } P \equiv 7 \pmod{12}, \\ \varrho &= 3 \text{ при } P \equiv 9 \pmod{12}, \\ \varrho &= 13 \text{ при } P \equiv 11 \pmod{12}. \end{aligned}$$

Въ 35 томѣ журнала Крелля Эйзенштейнъ далъ безъ доказательства слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)}(P) &= \frac{2P-1}{24}, \\ M^{(1)}(2P) &= \frac{P}{8}, \\ M^{(2)}(2P) &= \frac{P-1}{24} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Эти формулы легко вывести изъ болѣе общихъ, данныхъ Смитомъ въ 157 томѣ Philosophical Transactions.

Подставляя въ формулы (42), (43) и (44) вмѣсто

$$M^{(1)}(P),\ M^{(1)}(2P) \text{ и } M^{(2)}(2P)$$

ихъ значенія, даваемыя формулами (45), мы получимъ формулы

$$H^{(1)}(P) = \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \frac{P+\lambda}{12},$$

$$H^{(1)}(2P) = \frac{1}{4}\sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2}\sum {}^{(1)}(d) + \frac{P+\gamma}{8},$$

$$H^{(2)}(2P) = \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \frac{P+\varrho}{24}$$

для счета числа классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя въ тѣхъ случаяхъ, когда опредѣлитель не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, въ томъ видѣ, какъ онѣ даны Эйзенштейномъ.